

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е. П. ПОПОВ
И. П. ПАЛЬТОВ

Е. П. ПОПОВ
И. П. ПАЛЬТОВ



ПРИБЛИЖЕННЫЕ
МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ
АВТОМАТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

ФИЗМАТГИЗ
1960

Е. П. ПОПОВ и И. П. ПАЛЬТОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ
ИССЛЕДОВАНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ
АВТОМАТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960



Scan AAW

Е. П. Попов и И. П. Пальтов

Приближенные методы исследования
нелинейных автоматических систем

Редактор *О. К. Соболев*

Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*

Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 1/II 1960 г. Подписано к печати 30/V 1960 г. Бумага 60×92/16. Физ. печ. л. 49,5. Условн. печ. л. 49,5. Уч.-изд. л. 46,40. Тираж 10000 экз. Т-07125. Цена книги 25 р. 20 к. Заказ № 340.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической промышленности.
Типография № 1 „Печатный Двор“ имени А. М. Горького, Ленинград, Гатчинская, 26.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Введение	15
§ 1.1. Примеры часто встречающихся нелинейностей	15
§ 1.2. Об исследовании нелинейных автоматических систем	28
§ 1.3. Пример отыскания симметричных автоколебаний	42
§ 1.4. Зависимость автоколебаний и устойчивости равновесия от параметров системы	47
§ 1.5. Пример оценки качества симметричных колебательных переходных процессов	52
§ 1.6. Пример несимметричных автоколебаний и статические ошибки автоколебательной системы	57
§ 1.7. Пример медленно меняющихся сигналов в автоколебательной системе	65
§ 1.8. Пример оценки качества несимметричных колебательных переходных процессов	69
§ 1.9. Пример определения одночастотных вынужденных колебаний	74
Глава II. Основы метода гармонической линеаризации и сравнение его с другими методами	82
§ 2.1. Гармоническая линеаризация нелинейностей при симметричных колебаниях	82
§ 2.2. Обоснование метода гармонической линеаризации	96
§ 2.3. Способы определения симметричных автоколебаний	105
§ 2.4. Устойчивость периодического решения	117
§ 2.5. Сравнение с другими приближенными методами для систем второго порядка	132
§ 2.6. Сравнение с другими приближенными методами для систем высокого порядка	144
§ 2.7. Выделение областей устойчивости равновесия	156
§ 2.8. Сравнение с определением областей устойчивости прямым (вторым) методом Ляпунова	173
§ 2.9. Определение устойчивости системы в ограниченной области начальных условий	183
Глава III. Гармоническая линеаризация нелинейностей при симметричных колебаниях	195
§ 3.1. Релейные характеристики	196
§ 3.2. Нелинейные характеристики с зоной нечувствительности, насыщением и переменным коэффициентом усиления	203
§ 3.3. Характеристики с гистерезисными петлями	208
§ 3.4. Степенные нелинейные характеристики	213
§ 3.5. Гистерезисные петли электрических цепей с железом	220

§ 3.6.	Нелинейности типа сухого и квадратичного трения	225
§ 3.7.	Нелинейные характеристики с опережающими петлями	229
§ 3.8.	Графический способ гармонической линеаризации нелинейностей	234
§ 3.9.	Релейный исполнительный механизм	237
Глава IV.	Симметричные автоколебания и устойчивость автоматических систем	241
§ 4.1.	Требования, предъявляемые к автоколебательным системам	241
§ 4.2.	Система стабилизации гиromаятника	243
§ 4.3.	Следящая система с нелинейным усилителем	249
§ 4.4.	Следящая система с нелинейным приводом	258
§ 4.5.	Система регулирования температуры с балансным реле	263
§ 4.6.	Система регулирования температуры с поляризованным реле	271
§ 4.7.	Учет временного запаздывания в релейной системе	276
§ 4.8.	Следящая система второго порядка с сухим трением и люфтом	280
§ 4.9.	Следящая система третьего порядка с нелинейным трением и люфтом	294
§ 4.10.	Система регулирования курса самолета	306
§ 4.11.	Нелинейная система стабилизации с временным запаздыванием	312
§ 4.12.	Система первого класса с двухфазным индукционным двигателем	317
§ 4.13.	Система второго класса с двухфазным индукционным двигателем	324
§ 4.14.	Система с двухфазным индукционным двигателем при учете сухого трения	333
§ 4.15.	Релейная следящая система с линейной и нелинейной обратной связью	338
§ 4.16.	Система генерирования колебаний тока с электромашинным усилителем	346
Глава V.	Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах. Несимметричные автоколебания	353
§ 5.1.	Несимметричные автоколебания и основы их определения	353
§ 5.2.	Статические и установившиеся ошибки автоколебательных систем	361
§ 5.3.	Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах	371
§ 5.4.	Зависимость устойчивости нелинейной системы от внешнего воздействия	380
§ 5.5.	Автоколебания систем с медленно меняющимися во времени параметрами	385
§ 5.6.	Гармоническая линеаризация релейных характеристик при несимметричных колебаниях	386
§ 5.7.	Гармоническая линеаризация кусочно-линейных однозначных и петлевых характеристик	394
§ 5.8.	Гармоническая линеаризация степенных нелинейных характеристик	404
§ 5.9.	Гармоническая линеаризация несимметричных кусочно-линейных характеристик	408
Глава VI.	Автоколебания и устойчивость автоматических систем при несимметричных нелинейностях и при внешнем воздействии	415
§ 6.1.	Исследование несимметричных автоколебаний	415
§ 6.2.	Ошибки автоколебательных систем	421
§ 6.3.	Гиromаятник при внешнем воздействии	426

§ 6.4.	Вибрационный измеритель ускорений	431
§ 6.5.	Интегрирующее устройство	442
§ 6.6.	Система регулирования скорости электродвигателя с центробежным релейным регулятором	454
§ 6.7.	Следящая система при внешнем воздействии	466
§ 6.8.	Система с несимметричной нелинейностью при внешнем воздействии	472
§ 6.9.	Сглаживание релейной характеристики при помощи автоколебаний	482
§ 6.10.	Сглаживание петлевых нелинейностей с помощью автоколебаний	499
Глава VII. Оценка качества переходных процессов		507
§ 7.1.	Обобщение асимптотического метода Крылова — Боголюбова на исследование переходных процессов	507
§ 7.2.	Исследование симметричных колебательных переходных процессов	518
§ 7.3.	Диаграммы качества затухания нелинейных колебаний	527
§ 7.4.	Применение диаграмм для определения качества переходных процессов	536
§ 7.5.	Несимметричные колебательные переходные процессы	545
§ 7.6.	Пример приложения асимптотического метода	553
§ 7.7.	Симметричный колебательный переходный процесс в следящей системе	557
§ 7.8.	Переходный процесс в следящей системе второго класса . .	566
§ 7.9.	Переходный процесс в системе третьего класса	573
§ 7.10.	Пример скользящего переходного процесса	582
Глава VIII. Вычисления высших гармоник автоколебаний		589
§ 8.1.	Отыскание конечного числа высших гармоник и уточнение первой гармоники автоколебаний	589
§ 8.2.	Уточнение первого приближения	598
§ 8.3.	Коэффициенты третьей гармоники для некоторых нелинейностей	608
§ 8.4.	Примеры вычисления третьей гармоники и уточнения первой . .	619
§ 8.5.	Примеры определения зависимости частоты от формы нелинейности	625
§ 8.6.	Определение высших гармоник несимметричных автоколебаний при внешнем воздействии	634
Глава IX. Вынужденные колебания нелинейных систем		644
§ 9.1.	Симметричные одночастотные вынужденные колебания	644
§ 9.2.	Несимметричные вынужденные колебания. Определение функции смещения	652
§ 9.3.	Зависимость устойчивости и качества нелинейных систем от внешних вибраций	661
§ 9.4.	Вычисление высших гармоник вынужденных колебаний	671
§ 9.5.	Примеры определения симметричных одночастотных вынужденных колебаний	680
§ 9.6.	Примеры определения несимметричных вынужденных колебаний	698
§ 9.7.	Пример учета высших гармоник вынужденных колебаний . .	709
Глава X. Случайные процессы в нелинейных системах		713
§ 10.1.	Колебательные системы при медленно меняющихся случайных воздействиях	713

§ 10.2. Статистическая линеаризация нелинейностей	721
§ 10.3. Высокочастотные случайные процессы	732
§ 10.4. Низкочастотные случайные процессы	742
§ 10.5. Пример медленно меняющихся случайных процессов в авто- колебательной системе	750
§ 10.6. Пример влияния помех на динамику нелинейной системы . . .	760
§ 10.7. Другие примеры исследования случайных процессов	765
Л и т е р а т у р а	775
П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь	790

ПРЕДИСЛОВИЕ

Инженерам и научным работникам все чаще приходится сталкиваться с необходимостью учета существенных нелинейностей в системах автоматического управления, стабилизации, регулирования и в следящих системах. Это необходимо не только для учета вредного влияния неизбежно имеющихся в системе нелинейностей, но и для применения специальных нелинейностей с целью улучшения динамических качеств системы. Поэтому расширение практического применения автоматики во всех областях техники предъявляет все большие требования к развитию нелинейной теории автоматического регулирования.

В настоящей книге авторы стремились изложить по возможности наиболее простые и удобные для практического применения приближенные методы исследования и расчета определенного класса нелинейных автоматических систем, пригодные для решения некоторых задач синтеза таких систем. Исходной теоретической базой этих методов являются идеи гармонического баланса и эквивалентной линеаризации, предложенные в известных трудах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, а также развитая в трудах Б. В. Булгакова специальная форма метода малого параметра.

После первых применений метода гармонического баланса к нелинейным системам регулирования, данных Л. С. Гольдфарбом, В. А. Котельниковым, Р. Дж. Кохенбургером, удалось значительно развить указанные выше методы для решения новых задач исследования и расчета нелинейных автоматических систем. Предлагаемые в данной книге различные способы решения разнообразных, возникавших из потребностей практики нелинейных задач, доведенные до конкретных приложений, объединены общей идеей гармонической линеаризации нелинейностей в разных ее формах с привлечением в последней главе статистической линеаризации, предложенной И. Е. Казаковым.

Книга рассчитана на широкие круги инженеров и научных работников в области техники и теории систем автоматического управления, регулирования, измерения и других применений автоматики, а также на студентов и аспирантов.

Работа между авторами книги распределилась следующим образом. Е. П. Поповым написаны главы I, II, V (§§ 1—5), VII (§§ 1—5),

VIII, IX (§§ 1—4) и X. Они отражают в основном работы автора в данной области с их дальнейшим развитием в направлении разработки методов инженерных расчетов при проектировании замкнутых нелинейных автоматических систем (в интересах анализа и синтеза этих систем).

И. П. Пальтовым написаны главы III, IV, V (§§ 6—9), VI, VII (§§ 6—10) и IX (§§ 5—7). В них изложены как полученные самим автором, так и обработанные им результаты других авторов по исследованию конкретных замкнутых нелинейных автоматических систем на основании указанных методов.

В главе I содержатся описание основных форм нелинейностей, встречающихся в различных автоматических системах, и разделение нелинейных систем на три больших класса по количеству переменных, входящих под знаки нелинейных функций, и по виду связей между этими переменными. В дальнейших главах книги различные задачи решаются параллельно для всех трех классов нелинейных систем при разнообразных формах нелинейностей. Поэтому и разбивка материала книги на главы произведена не по типам нелинейностей и не по классам нелинейных систем, а по виду решаемых задач.

В той же главе I излагается аналитическое исследование различных процессов в простейшей нелинейной системе третьего порядка методом гармонической линеаризации с целью показа простоты применения метода и его возможностей, легко понятных в этом простом случае даже без изучения основ метода, которое производится ниже.

Глава II раскрывает в общем виде понятие гармонической линеаризации нелинейностей и теоретические основы применения метода гармонической линеаризации к определению симметричных автоколебаний нелинейных автоматических систем. При этом даются условия, накладываемые на вид дифференциальных уравнений (или передаточных функций) системы, при которых можно применять данный приближенный метод исследования. Эти условия почти всегда удовлетворяются в разнообразных системах автоматического управления, стабилизации, регулирования и в следящих системах.

Далее в главе II излагаются в общем виде различные практические способы определения автоколебаний (и их устойчивости), позволяющие в большинстве случаев обойтись без вычерчивания годографов на комплексной плоскости. Производится сопоставление этих способов с различными формами известных методов, использующих в той или иной форме малый параметр. Показывается идентичность конечного результата первого приближения во всех сравниваемых методах, но различие подходов к решению задачи и процессов вычислений, что существенно для практики.

В главе II даются также приближенный метод выделения областей устойчивости равновесия для нелинейных систем и его сопоставление с результатами прямого метода Ляпунова для различных частных видов нелинейных систем. Результаты этого сопоставления говорят

о простоте и практической эффективности метода, а также о возможности и целесообразности постановки задачи перед математиками о строгом его обосновании (с учетом материала § 2.2). Изложенные факты, видимо, позволяют надеяться на то, что возможно развитие некоторой строгой теории устойчивости по первому приближению не с помощью разложения Тейлора, а с помощью разложения Фурье, т. е. на основе не обычной, а гармонической линеаризации.

В дополнение к этому исследованию абсолютной устойчивости нелинейной системы (при любых начальных условиях) в конце главы даются способы приближенной оценки устойчивости нелинейных автоматических систем в ограниченной области начальных условий, а также выделение области практической устойчивости автоколебательной нелинейной системы, определяемой тем, чтобы величина амплитуды автоколебаний не превышала заданной допустимой величины, причем могут быть учтены и ограничения допустимых частот автоколебаний.

Глава III содержит вывод и сводку готовых выражений коэффициентов гармонической линеаризации для различных типов нелинейностей, которые необходимы для исследования конкретных нелинейных автоматических систем, применительно ко всем задачам главы II.

В главе IV собрано решение многих практических задач методами главы II на примерах конкретных автоматических систем с учетом различных нелинейностей. Эти примеры не только преследуют цель иллюстрации применения метода, но во многих отношениях имеют и самостоятельное значение, ибо только на типовых примерах можно выяснить массу различных принципиальных особенностей динамического поведения нелинейных систем.

Кроме того, в этих примерах показаны практические приемы получения зависимостей частоты и амплитуды автоколебаний от различных параметров системы в интересах синтеза автоматических систем. Наконец, эти примеры могут иметь непосредственное практическое значение для конкретных областей техники, к которым каждый из них относится.

Глава V содержит разработку метода исследования несимметричных автоколебаний в общем виде при наличии постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия. Разделение решения на периодическую и на постоянную (или медленно меняющуюся) составляющую производится нелинейным образом, т. е. обе части решения оказываются взаимозависящими друг от друга. Они проходят через нелинейность с разными взаимосвязанными коэффициентами усиления. Это обстоятельство позволяет на базе метода гармонической линеаризации исследовать специфические нелинейные особенности медленно меняющихся динамических процессов в автоколебательных системах и явление вибрационного сглаживания нелинейностей с помощью автоколебаний. Обнаруживается зависимость устойчивости и качества процессов в нелинейной системе от величины постоянного внешнего

воздействия или, в астатических системах, от скорости изменения внешнего воздействия.

Изложенный в главе V метод позволяет приближенно исследовать двухчастотные колебания с большой разницей между частотами. Колебания с этими частотами проходят через нелинейность с разными коэффициентами усиления, соответствующими гармонической линеаризации разных нелинейных функций. При этом для меньшей частоты производится двойная гармоническая линеаризация, а именно сначала определяется так называемая функция смещения, которая затем подвергается снова гармонической линеаризации. Аналогично можно определять и трехчастотные колебания. Обычно это имеет место в сложных системах автоматического управления. Указанная разбивка движения системы на двухчастотное или трехчастотное, производимая на базе гармонической линеаризации, позволяет значительно упростить динамические исследования сложных многоконтурных нелинейных систем автоматического управления и последовательно наращивать контуры, начиная рассмотрение с простейшего внутреннего контура.

Кроме того, в главе V даны готовые выражения коэффициентов гармонической линеаризации и величины смещения для разных типов нелинейностей, часто встречающихся в автоматических системах.

В главе VI проводится исследование ряда конкретных автоматических систем методами, разработанными в главе V. Исследуются автоколебательные измерители и интеграторы ускорений с определением их ошибок, а также системы автоматического регулирования с несколькими нелинейностями, в том числе несимметричными. Проиллюстрировано смещение границы устойчивости нелинейной системы при изменении величины постоянного внешнего воздействия.

Глава VII посвящена разработке методов приближенного исследования качества переходных процессов в нелинейных автоматических системах. Сначала асимптотический метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, относящийся к медленным процессам установления, обобщается на исследование быстрозатухающих переходных процессов путем введения конечного слагаемого в уравнение для производной от амплитуды по времени. Показано, что и в этом случае при определенных условиях можно свести решение к использованию гармонической линеаризации, но с добавлением некоторых специфических членов. Предложено наглядное изображение зависимости качества переходных процессов от параметров системы в виде диаграмм качества. Даны три различных общих способа построения этих диаграмм, а также еще два способа, специально предназначенных для более сложных нелинейных систем второго и третьего классов с двумя или несколькими нелинейностями.

При этом рассматриваются не только симметричные колебательные процессы, но и более сложные формы переходных процессов, разбиваемые нелинейным образом на аperiodическую составляющую и колебательную составляющую с изменяющейся амплитудой. В част-

ности, речь идет также и о переходных процессах в условиях вибрационного сглаживания нелинейностей и о скользящих процессах.

Там же в главе VII приводятся примеры конкретных исследований для некоторых нелинейных автоматических систем методами, описанными в данной главе. Показано хорошее совпадение полученных оценок качества переходных процессов с результатами численно-графического решения исходных нелинейных уравнений системы.

В главе VIII предлагается приближенный метод вычисления высших гармоник автоколебаний и уточнения частоты и амплитуды первой гармоники, найденной ранее в первом приближении. Непосредственное отыскание высших гармоник с помощью обычного разложения всех колеблющихся переменных в ряды Фурье привело бы к большому числу неразрешимых уравнений. Задачу удается достаточно просто решить, введя некоторые специальные упрощения, вполне обоснованные путем анализа степени малости различных членов разложения, проведенного на основании материала § 2.2. Метод развивается далее для определения зависимости частоты автоколебаний от формы нелинейности и от величины постоянного внешнего воздействия, в то время как применявшееся до сих пор первое приближение не давало возможности это сделать для однозначных нечетно-симметричных нелинейностей.

Интересно отметить, что рассматриваемое здесь уточнение первого приближения приводит к определению малых высших гармоник для переменной, стоящей под знаком нелинейности, и к получению конечных высших гармоник для самой нелинейной функции. Это хорошо отвечает природе изучаемых явлений. Такая уточненная гармоническая линеаризация наиболее полно аппроксимирует нелинейный колебательный процесс (колебания самой нелинейной функции). Примеры, рассмотренные в той же главе VIII, подтверждают это и показывают хорошее совпадение с точным решением задачи.

Глава IX содержит методы исследования вынужденных колебаний нелинейных систем как в общем виде, так и на примерах расчета конкретных автоматических систем. Дается два метода решения задачи для одночастотных вынужденных колебаний: графический на комплексной плоскости и аналитический, который в случае неразрешимости полученных уравнений приводит к несложным графическим построениям в действительных переменных как для симметричных, так и для несимметричных колебаний.

Затем в главе IX рассматривается прохождение медленно меняющихся сигналов через нелинейную систему в присутствии вынужденных колебаний. В общем случае предполагается, что вынужденные колебания проходят по всему замкнутому контуру системы вместе с медленно меняющимися сигналами. Уравнения для них разделяются нелинейным образом, т. е. с сохранением взаимосвязи между ними и с различными коэффициентами усиления для каждого из них. Решение задачи значительно упрощается для случая, когда вынужденные

колебания не проходят через весь контур. Как частный случай получается известная задача вибрационного сглаживания нелинейностей при помощи вынужденных колебаний.

Если медленно меняющийся сигнал колебательный, то фактически при этом исследуются двухчастотные колебания с большой разностью частот, как это делалось в главе V для автоколебаний. Таким образом, могут быть получены частотные характеристики замкнутой системы по медленно меняющемуся сигналу при наличии в системе дополнительных высокочастотных вибраций.

Существенное отличие от автоколебаний состоит здесь в том, что коэффициент усиления, с которым проходит медленно меняющийся сигнал через нелинейность, может сильно зависеть от заданных амплитуды и частоты внешнего периодического воздействия. Следовательно, это внешнее воздействие может сильно влиять на динамические качества по медленно меняющемуся сигналу и даже на устойчивость системы. Поэтому при преднамеренном введении такого воздействия оно может использоваться для улучшения качества нелинейной системы управления. В случае же, если это воздействие представляет собой вибрационные помехи, то они могут вредно повлиять на качество системы, а при достаточно большой амплитуде могут даже сделать систему неустойчивой. Это подчеркивает важность разработки подобного рода приближенных методов расчета.

Затем в главе IX рассматривается также вычисление гармоник одночастотных вынужденных колебаний с уточнением первой гармоники, что дает возможность исследовать влияние несинусоидальных внешних воздействий на нелинейные автоматические системы. Все разработанные в главе IX общие способы исследования иллюстрируются на примерах конкретных нелинейных автоматических систем, в том числе и комбинированного действия (с регулированием по возмущению).

Последняя глава X посвящается случайным процессам в нелинейных системах. Здесь для построения удобных для практики приближенных методов применяется два вида линеаризации нелинейностей: гармоническая и статистическая, как по отдельности, так и совместно. Сначала с использованием только гармонической линеаризации исследуются медленно протекающие случайные процессы в нелинейных системах, работающих в режиме автоколебательных и вынужденных вибраций, которые сглаживают нелинейность и позволяют затем применять чисто линейную теорию случайных процессов. При этом определение сглаженной нелинейной характеристики и разбивка исходных нелинейных уравнений производятся полностью методами глав V и IX. Если же обычная линеаризация сглаженной характеристики почему-либо недопустима (например, вследствие ее сильной кривизны), то после гармонической линеаризации применяется еще статистическая линеаризация. В обоих случаях амплитуда вибраций будет случайной величиной, причем определяются ее математическое ожидание и дисперсия.

Кроме этих двух типов задач, в главе X рассматриваются методы решения еще пяти различных типов задач, в которых разбивка искомого решения производится не по степени быстроты процессов во времени, как выше, а на регулярную (математическое ожидание) и случайную (центрированную) составляющие. Сначала рассматривается известная задача, решенная И. Е. Казаковым, об определении случайных процессов в установившемся режиме работы замкнутых нелинейных автоматических систем. Затем аналогичный способ развивается для исследования неустойчившихся медленно меняющихся регулярных процессов в присутствии высокочастотных случайных флуктуаций. Это позволяет исследовать новые специфические для нелинейных систем явления зависимости устойчивости и качества динамических процессов от характеристик спектральной плотности внешних флуктуаций. Здесь, как и в главах V и IX, приближенное исследование основывается на нелинейном разделении дифференциальных уравнений, но с другим, статистическим, содержанием. Дело сводится тоже к определению функции смещения, представляющей собой сглаженную нелинейную характеристику, после чего исследуется неустойчившийся медленно меняющийся регулярный процесс с помощью либо обычной, либо гармонической линеаризации этой функции смещения.

Другие задачи, рассмотренные в главе X, относятся к исследованию автоколебаний и условий их существования (или срыва) при наличии случайных внешних воздействий как высокочастотных, так и низкочастотных, а также и в промежуточном случае с исключением, однако, резонансной частоты. Все описанные методы иллюстрируются примерами исследования конкретных автоматических систем.

В конце книги приводится список литературы, не только использованной авторами, но и другой, посвященной приближенным методам исследования и расчета нелинейных автоматических систем. В указанной литературе описываются другие приемы исследования, не рассматриваемые в данной книге. Ознакомление с этими методами может быть полезно читателю, интересующемуся вообще приближенными нелинейными методами, которые применяются при исследовании автоматических систем.

В списке литературы не приводятся работы, посвященные точным методам решения нелинейных задач теории регулирования (кроме тех, которые цитируются в тексте книги), так как это представляет собой самостоятельную богатую область исследований.

Для облегчения обзора литература классифицирована по отдельным циклам глав, хотя и имеет единую нумерацию. Расположена она в хронологическом порядке выхода в свет, причем литература на иностранных языках выделена в отдельный список. Иностранные работы, изданные в переводе на русский язык, указываются среди литературы на русском языке. В тех случаях, когда цитируемая книга выдержала два или несколько изданий, приводится только последнее ее издание с указанием его номера. Ссылки на литературу в тексте обозначены соответствующим номером в квадратных скобках.

В заключение надо сказать, что данная книга, как и всякая другая, не претендует на исчерпывающую полноту разработки и освещения приближенных методов исследования нелинейных автоматических систем. Авторы изложили те методы, которые, по их мнению, при решении рассмотренных в книге нелинейных задач являются, во-первых, наиболее простыми и удобными для практического применения и, во-вторых, пригодными для распространения на исследование наиболее сложных нелинейных автоматических систем, встречающихся на практике.

Кроме того, авторы стремились к тому, чтобы дать не просто собрание хороших методов, а объединить методы решения разнообразных нелинейных задач единой идеей, базирующейся на единой основе, в данном случае — на гармонической линеаризации нелинейностей в широком смысле с охватом различных ее форм. Это дало возможность с единой общей точки зрения рассмотреть широкий круг задач с доведением результатов до примеров исследования и расчета конкретных автоматических систем.

В выборе методов исследования, кроме указанных объективных соображений, вероятно, сыграли роль и собственные научные интересы авторов. В частности, они посчитали, что, базируясь на аппарате дифференциальных уравнений (хотя законно применение и частотных характеристик), можно получить наиболее общие и наиболее широко применимые методы. Поэтому частотные приемы решения отражены в книге в меньшей мере. Однако очевидно, что, имея теорию расчетов, исходящую из дифференциальных уравнений, можно эти расчеты переложить и на язык частотных характеристик, как это уже делается сейчас в литературе для решения пока простейших нелинейных задач, например с помощью логарифмических частотных характеристик. Это может во многих практических задачах быть весьма полезным.

Предпринятая здесь первая попытка цельного изложения приближенных методов исследования нелинейных автоматических систем на основе гармонической линеаризации нелинейностей может оказаться несвободной от недостатков. Авторы будут весьма признательны всем читателям, которые пришлют в их адрес или в издательство свои пожелания и критические замечания, а также сообщения об удачных и неудачных примерах применения изложенных методов.

Авторы выражают признательность академику Н. Н. Боголюбову за ценные советы, а также приносят благодарность всем товарищам, участвовавшим в решении отдельных задач. Авторы благодарны редактору О. К. Соболеву и художнику А. И. Климанову за их большой труд при подготовке рукописи к печати.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Примеры часто встречающихся нелинейностей

В книге рассматриваются замкнутые автоматические системы любой конструкции и различного назначения (системы автоматического регулирования, следящие системы, системы стабилизации, счетно-решающие и измерительные системы, работающие по замкнутому циклу). Ограничение класса рассматриваемых систем, которое будет выяснено

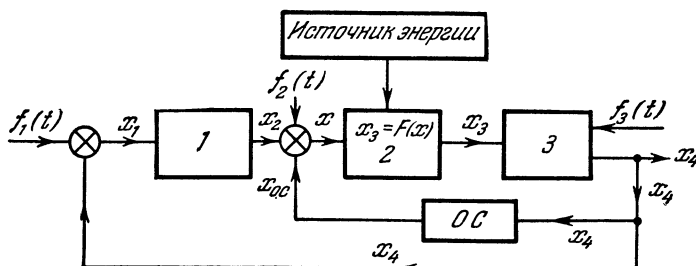


Рис. 1.1.

в дальнейшем, определяется не конструкцией и не назначением, а видом уравнений (или передаточных функций), описывающих динамические процессы в системе.

Нелинейная автоматическая система обычно представляет собой комплекс некоторого произвольного конечного числа звеньев, причем динамика большинства из них описывается линейными уравнениями, а одно или несколько (весьма ограниченное число) звеньев описывается нелинейными уравнениями.

Например, на рис. 1.1 некоторая автоматическая система представлена в виде комплекса четырех звеньев, определенным образом соединенных между собой. При этом, например, звено 1 может соответствовать фильтру или усилителю, звено 2 — поляризованному электромагнитному реле, звено 3 — приводному двигателю, а четвертое

звено OC — жесткой обратной связи. Кружки с крестами обозначают места сложения и вычитания различных воздействий.

Возможен и другой физический смысл всех звеньев при той же общей схеме системы.

Все внутренние переменные, выражающие взаимодействие звеньев системы между собой, в такого общего типа примерах будем обозначать буквами x с различными индексами, а все внешние переменные, выражающие приложенные к системе извне воздействия, будем обозначать буквами f также с различными индексами. Обычно последние являются либо заданными функциями времени в явном виде $f(t)$, либо произвольно меняющимися в ограниченных пределах, либо случайными функциями, заданными своими вероятностными характеристиками.

Из внешних переменных, например, на рис. 1.1 $f_1(t)$ обозначает задающее или управляющее воздействие, которое данная система должна воспроизводить в виде x_4 на выходе (иногда в состав $f_1(t)$ может входить еще и помеха, которая не должна воспроизводиться); $f_2(t)$ обозначает на рис. 1.1 дополнительное внешнее воздействие, например для создания принудительных вибраций (подробнее см. § 1.9); $f_3(t)$ — возмущающее воздействие со стороны управляемого объекта, на который передается воспроизведенная системой переменная величина x_4 (например, $f_3(t)$ может быть механической нагрузкой выходного вала системы).

Для каждого звена системы можно написать свое дифференциальное уравнение динамики. Собственно говоря, сама разбивка системы на звенья и предпринимается в основном для удобства составления уравнений динамики системы (кроме очевидной цели наглядного показа функционирования системы). Производные по времени во всех уравнениях условимся обозначать коротко символом p , как это принято в теории регулирования:

$$p = \frac{d}{dt}.$$

В данном примере (рис. 1.1) запишем уравнение звена I (фильтра или усилителя) в линейном виде:

$$(T_1 p + 1) x_2 = k_1 x_1, \quad x_1 = f_1(t) - x_4, \quad (1.1)$$

где T_1 — постоянная времени, k_1 — коэффициент усиления. Уравнение фильтра может включать и введение производной в закон управления

$$(T_1 p + 1) x_2 = k_1 (1 + kp) x_1, \quad (1.2)$$

где k — коэффициент интенсивности введения производной.

Для звена $З$ (приводной двигатель) тоже напишем линейное уравнение динамики:

$$(T_2 p + 1) p x_4 = k_2 x_3 + f_3(t), \quad (1.3)$$

где T_2 и k_2 — постоянные, $f_3(t)$ — возмущающее воздействие.

Уравнение жесткой обратной связи будет

$$x_{o.c} = k_{o.c} x_k, \quad (1.4)$$

где $k_{o.c}$ — постоянная. Если же обратная связь гибкая, то

$$x_{o.c} = k_{o.c} p x_k. \quad (1.5)$$

Могут иметь место и более сложные уравнения обратной связи.

Звено 2 (поляризованное реле) является существенно нелинейным звеном, не поддающимся обычному способу линеаризации. Его уравнение часто может быть записано в виде

$$x_3 = F(x), \quad (1.6)$$

где $F(x)$ есть характеристика реле. Реле включает напряжение x_3 постоянного тока, равное $+c$ или $-c$, что соответствует изменению направления тока. При этом входная величина реле x складывается согласно рис. 1.1 из трех переменных:

$$x = x_2 - x_{o.c} + f_2(t). \quad (1.7)$$

Вообще говоря, характеристика реле может иметь любую из форм, указанных на рис. 1.2. В общем случае (рис. 1.2, а) имеются зона

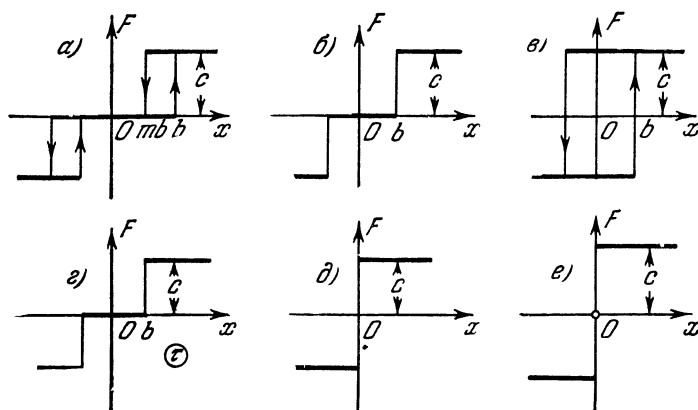


Рис. 1.2.

нечувствительности и петля гистерезисного типа, т. е. петля, выражающая нелинейное (координатное) запаздывание в срабатывании реле, вследствие того, что ток отпускания $x = mb$ меньше тока срабатывания $x = b$ (m — коэффициент возврата). В частном случае имеется только зона нечувствительности без петли (рис. 1.2, б) или же только петля гистерезисного типа без зоны нечувствительности (рис. 1.2, в), когда реле не имеет среднего положения.

Иногда важно бывает учесть запаздывание во времени срабатывания реле τ (рис. 1.2, г). Последнее не изображается графически, так

как на статической характеристике нет координаты времени, но записывается символически в виде

$$x_3 = F_\tau(x) = e^{-\tau p} F(x), \quad (1.8)$$

где $F(x)$ — любая из характеристик рис. 1.2. В данном случае (рис. 1.2, з) запаздывание по времени τ вводится одновременно с наличием зоны нечувствительности, когда в формуле (1.8) нелинейная функция $F(x)$ имеет вид рис. 1.2, б.

Изобразим, наконец, еще идеальную релейную характеристику без среднего положения (рис. 1.2, д), когда

$$F(x) = c \operatorname{sign} x,$$

и со средним положением (рис. 1.2, е), когда

$$F(x) = c \operatorname{sign} x \quad \text{при } x \neq 0,$$

$$F(x) = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Последний случай является идеализацией случая рис. 1.2, б при $b = 0$, а предыдущий — случая рис. 1.2, в при $b = 0$. Аналогично могут быть аналитически записаны и остальные характеристики рис. 1.2 [73], но такая запись в дальнейшем не потребуется.

Характеристики релейного типа могут быть и несимметричными, например, если реле или просто контактная пара работает в режиме

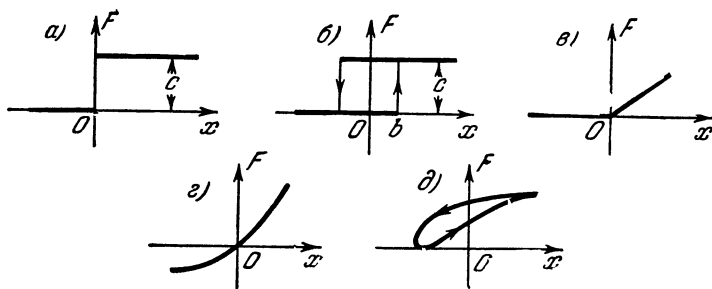


Рис. 1.3.

включения и выключения напряжения одной полярности (рис. 1.3, а и б). Несимметричной может быть также упругая сила пружины, если последняя действует только на одном участке перемещения какого-либо устройства (рис. 1.3, в). Несимметричными могут быть также и криволинейные характеристики (рис. 1.3, г и д).

Уравнения динамики для всякой реальной системы всегда записывают с какой-то степенью идеализации, причем пренебрегают второстепенными факторами, мало влияющими на решение данной конкретной задачи. Очевидно, что в написанных выше простых уравнениях (1.1) — (1.8) не учтены многие обстоятельства, которые можно обнаружить и считать важными при детальном изучении каждого реального

звена системы по отдельности, но которые в определенных границах не будут играть существенной роли при установлении общей картины динамических процессов в системе в целом.

Одной из таких идеализаций является в данном примере также предположение о линейности уравнений всех звеньев системы, кроме

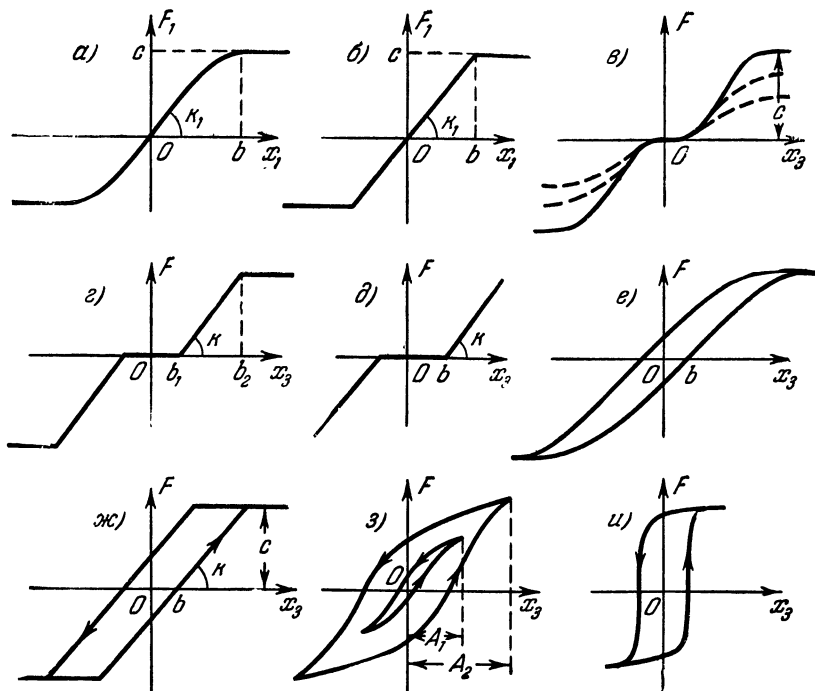


Рис. 1.4.

реле. На самом деле реальные характеристики всех звеньев в большей или меньшей степени отличаются от идеальной прямой линии. Поэтому их можно считать в первом приближении линейными только в определенной области изменения переменных, в которой и будут справедливы написанные уравнения.

Допустим, что в отличие от сказанного в исследуемой области изменения переменных наблюдается насыщение или ограничение уровня выходной величины в звене 1 (рис. 1.1), влияние которого на динамику системы необходимо учесть. Тогда в нашей системе кроме (1.6) появится еще другая нелинейность, так как уравнение звена 1 вместо (1.1) примет вид

$$(T_1 p + 1) x_2 = F_1(x_1), \quad (1.9)$$

где нелинейная функция $F_1(x_1)$ имеет вид рис. 1.4, а или б (условимся на графиках нелинейных характеристик обозначать наклон или

крутизну прямолинейного участка не углом, а тангенсом угла, т. е. коэффициентом усиления, как, например, k_1 на рис. 1.4, б).

Многие нелинейности можно аппроксимировать аналитическими зависимостями. Например, нелинейность $F_1(x_1)$, заданную в виде рис. 1.4, а, можно описать функцией

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= k_1(1 - kx_1^2)x_1 & \text{при } |x_1| \leq b, \\ F_1 &= c \operatorname{sign} x_1 & \text{при } |x_1| \geq b, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

причем из условий

$$F_1 = c \quad \text{и} \quad \frac{dF_1}{dx_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = b$$

имеем:

$$k_1 = \frac{3c}{2b}, \quad k = \frac{1}{3b^2}. \quad (1.11)$$

В случае же нелинейности вида рис. 1.4, б получим:

$$F_1 = k_1 x_1 \quad \text{при } |x_1| \leq b \quad \text{и} \quad F_1 = c \operatorname{sign} x \quad \text{при } x \geq b,$$

где $k_1 = \frac{c}{b}$.

При нелинейном введении производной вместо (1.2) получим уравнение

$$(T_1 p + 1)x_2 = F_1(x_1, px_1). \quad (1.12)$$

Можно представить себе также случай, когда постоянная времени фильтра T_1 меняется с изменением входной или выходной величины, т. е. когда в уравнении (1.1)

$$T_1 = F_2(x_1) \quad \text{или} \quad T_1 = F_3(x_2). \quad (1.13)$$

Тогда уравнение звена I принимает вид

$$F_2(x_1)px_2 + x_2 = k_1 x_1 \quad (1.14)$$

или

$$F_3(x_2)px_2 + x_2 = k_1 x_1. \quad (1.15)$$

Нелинейность типа рис. 1.4, б — ограничение линейной зависимости — встречается также в механических устройствах с упорами, например в виде ограничения хода руля на самолете (регулирующего органа автопилота).

Известно, что приводные устройства разных типов (электрические, пневматические, гидравлические) во многих следящих системах, системах автоматического регулирования и управления, в том числе и рулевые машинки автопилотов, имеют нелинейные характеристики вида

$$px_4 = F(x_3), \quad (1.16)$$

где x_4 — угол поворота выходного вала привода, а x_3 — входная электрическая или механическая величина (управляемое напряжение питания, перемещение золотника и т. п.). При этом $F(x_3)$ имеет вид

характеристики с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 1.4 *в* или *г*) или же вид характеристики только с зоной нечувствительности (рис. 1.4, *д*), когда значения входной величины x_3 невелики.

В выражении (1.16), как и в (1.8), может быть введено время запаздывания τ :

$$px_4 = F_\tau(x_3) = e^{-\tau p} F(x_3). \quad (1.17)$$

Наконец, при наличии гистерезисной петли нелинейная функция $F(x_3)$ в формуле (1.16) получит вид рис. 1.4, *е*, *ж* или *и*. Такие петлевые характеристики сложны тем, что ширина петли и даже вся ее форма могут меняться с изменением амплитуды колебаний A входной величины x_3 и смещением центра колебаний (рис. 1.4, *з*).

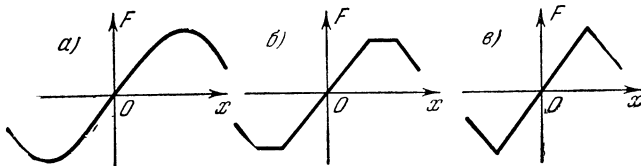


Рис. 1.5.

Встречаются также и нелинейности со спадом, имеющие участки с отрицательным наклоном (рис. 1.5, *а*, *б*, *в*).

Заметим, что уровень c , равно как и сам наклон нелинейной характеристики, может меняться с изменением нагрузки привода, как показано на рис. 1.4, *в* пунктиром.

Если учесть влияние инерции приводимых в движение масс, то уравнение нелинейного привода вместо (1.16) аналогично написанному ранее (1.3) будет иметь вид

$$(Tp + 1)px_4 = F(x_3). \quad (1.18)$$

Рассмотрев отдельные элементы нелинейных систем, запишем для примера уравнения системы автоматического управления движением самолета по курсу с помощью автопилота (с учетом угла скольжения, но без учета крена). Уравнения самолета как объекта регулирования [49] будут:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1)p\psi + k_2\beta &= -k_1\delta + f_1(t), \\ (T_2 p + 1)\beta &= T_2 p\psi + f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

где ψ — угол отклонения самолета от заданного курса, β — угол скольжения, δ — отклонение руля направления,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{J}{M_c^{\rho\psi}}, & T_2 &= \frac{mV}{Z^\beta}, & k_1 &= \frac{M_p^\delta}{M_c^{\rho\psi}}, & k_2 &= \frac{M_c^\beta}{M_c^{\rho\psi}}, \\ f_1(t) &= \frac{M_B(t)}{M_c^{\rho\psi}}, & f_2(t) &= \frac{Z_B(t)}{Z^\beta}. \end{aligned}$$

В этих формулах J , m , V — момент инерции, масса, скорость самолета; $M_c^{p\psi}$, M_c^β , M_p^δ , Z^β — крутизны (тангенсы углов наклона) аэродинамических характеристик, а именно: момента сопротивления воздушной среды вращению самолета M_c по угловой скорости $p\psi$ и углу β , момента руля M_p по углу δ и боковой силы Z по углу β ; M_ψ и Z_ψ — возмущающие момент и сила, уводящие самолет с заданного курса.

Уравнение привода автопилота запишем в виде

$$(T_3 p + 1) p \delta = F(x), \quad (1.20)$$

где T_3 — постоянная времени; $F(x)$ может быть задано в виде некоторых из форм, изображенных на рис. 1.4. Могут иметь место и другие формы (рис. 1.2), соответствующие случаю привода постоянной скорости в отличие от привода переменной скорости (рис. 1.4). Уравнение для переменной x с учетом сигналов чувствительных элементов (гироскопов) и жесткой обратной связи запишем в виде

$$x = (k_4 + k_5 p + k_6 p^2) \psi - k_{0c} \delta. \quad (1.21)$$

Оно определяется выбранным законом управления.

Далее, желая учесть ограничение хода руля при линейном приводе руля, обозначим через δ_1 то значение угла отклонения руля, при котором последний доходит до упора и останавливается. Тогда вместо (1.20) получим:

$$\left. \begin{aligned} (T_3 p + 1) p \delta &= F(x) & \text{при } \delta < \delta_1, \\ p \delta &= 0 & \text{при } \delta = \delta_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

если не учитывать упругих свойств упора.

Иногда бывает необходимо учесть также и нелинейность аэродинамических характеристик, что изменит уравнения (1.19), придав им нелинейный вид.

Довольно часто встречающейся нелинейностью является зазор в механической передаче любого типа. При наличии зазора сначала перемещение x ведущего элемента механической передачи не будет вызывать никакого перемещения y ведомого элемента, пока не будет «выбран» весь зазор (половину всей ширины зазора обозначим через b) — участок OH на рис. 1.6, а. После этого начнется движение ведомого элемента, изображаемое прямой HB . При перемене направления движения ведущего элемента в любом месте прямой HB сначала ведомый элемент будет неподвижен все время, пока «выбирается» зазор (переход по любому горизонтальному отрезку $F = \text{const}$ с прямой HB на прямую CD), после чего начнется движение ведомого элемента в обратную сторону согласно прямой CD . Эту нелинейную

характеристику зазора $y = F(x)$ опишем формулами (рис. 1.6, а):

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= x - b & \text{при } \dot{y} > 0, \\ y &= x + b & \text{при } \dot{y} < 0, \\ \dot{y} &= 0, \quad y = \text{const} & \text{при } |x - y| < b. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Очевидно, что учет зазора тем более важен, чем меньше перемещение x . При больших (сравнительно с величиной b) перемещениях x зазор не будет играть существенной роли.

Влияние зазора может не ограничиваться только что описанным явлением. Дело в том, что во время «выбирания» зазора (на горизонтальных отрезках графика рис. 1.6, а) ведомый элемент механической передачи отключается от ведущего и, следовательно, уменьшаются

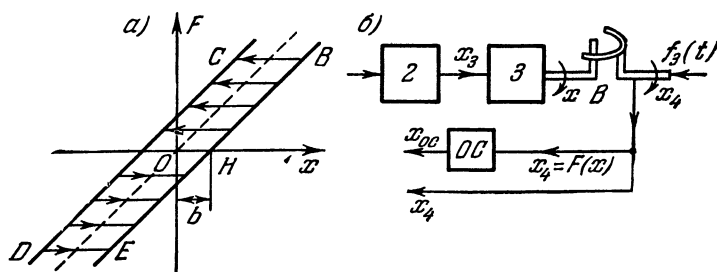


Рис. 1.6.

статическая и динамическая нагрузки на ведущий элемент. Например, в автоматической (следящей) системе (рис. 1.1) это соответствует отключению управляемого объекта от вала привода B (рис. 1.6, б). В результате уравнение движения вала привода будет

$$\left. \begin{aligned} (T_2 p + 1) p x &= k_2 x_3 + f_3(t) & \text{при } p x_4 \neq 0, \\ [(T_2 - T) p + 1] p x &= k_2 x_3 & \text{при } p x_4 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

где T пропорционально моменту инерции управляемого объекта, $f_3(t)$ — момент нагрузки со стороны управляемого объекта, а $x_4 = F(x)$ согласно рис. 1.6, а. Одновременно с этим изменяются и сигналы обратных связей (рис. 1.6, б) — основной и дополнительной. Во время «выбирания» зазора сигнал жесткой обратной связи остается постоянным, а сигнал гибкой обратной связи становится равным нулю. Следовательно, на это время как бы меняется передаточная функция всей системы.

Такого рода форма нелинейности системы, связанная с изменением структуры передаточных функций или дифференциальных уравнений системы, встречается и во многих других случаях (см. пример в § 3.9). Приведем один пример системы, в которой нелинейность заключается

в преднамеренном изменении передаточных функций (нелинейное корректирующее устройство). К основной линейной части системы $W_1(p)$ (рис. 1.7) добавляется одна из двух обратных связей: $W_1(p)$ или $W_2(p)$ — в зависимости от значения переменной x . Например, при

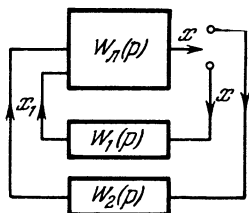


Рис. 1.7.

достаточно малых значениях $|x| < b$ включается обратная связь $W_1(p)$, а при больших значениях $|x| > b$ включается обратная связь $W_2(p)$. Тогда уравнение нелинейного звена системы будет

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= W_1(p) x & \text{при } |x| < b, \\ x_1 &= W_2(p) x & \text{при } |x| > b. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Хотя здесь каждая из связей $W_1(p)$ и $W_2(p)$ является сама по себе линейной, в целом получается нелинейное корректирующее устройство, так как переключение с одной из связей на другую определяется значением самой переменной x .

Следующий вид нелинейности проиллюстрируем на примере характеристик двухфазного индукционного двигателя (рис. 1.8, а) для разных значений управляющего напряжения u и угловой скорости $\omega_{дв}$,

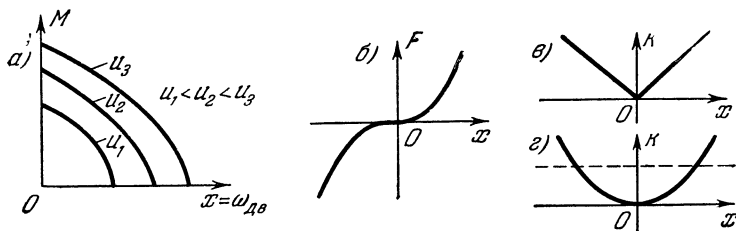


Рис. 1.8.

обозначенной в данном случае через x . Линеаризуя характеристики, обычно считают, что

$$M = c_1 u - c_2 x.$$

Но это справедливо в первом приближении только для левого участка характеристики. Если же используется большая часть характеристики, то необходимо учесть ее нелинейность. Имея в виду, что на рис. 1.8, а с увеличением x коэффициент c_1 уменьшается, а коэффициент c_2 увеличивается, примем для описания этой характеристики следующее нелинейное выражение:

$$M = \frac{c_1}{1 + c_3 |x|} u - (c_2 + c_4 |x|) x \quad (1.26)$$

(абсолютные значения x в коэффициентах поставлены потому, что x меняет знак, а сами коэффициенты должны оставаться положительными числами). Существуют и другие способы описания нелинейных характеристик двигателя (см. главу IV).

Тогда дифференциальное уравнение двигателя $Jpx = M$, где J — момент инерции всех вращаемых двигателем масс, приведенных к валу двигателя, можно записать в виде

$$Jpx + Jc_3 |x| px + c_2 x + (c_2 c_3 + c_4) |x| x + c_3 c_4 x^3 = c_1 u. \quad (1.27)$$

Здесь имеются три нелинейные функции:

$$F_1 = |x| px, \quad F_2 = |x| x = x^2 \operatorname{sign} x, \quad F_3 = x^3. \quad (1.28)$$

Вторая и третья из них имеют вид рис. 1.8, б. Первая же имеет форму

$$F_1 = k(x) px \quad (1.29)$$

с переменным передаточным числом k при скорости px , зависящим от координаты x в виде $k(x) = |x|$ (рис. 1.8, в).

В качестве другого примера нелинейной функции типа (1.29) можно привести зависимость

$$F = x^2 px, \quad (1.30)$$

когда $k(x) = x^2$ (рис. 1.8, г). При линейной зависимости было бы $k = \text{const}$, как показано пунктиром на рис. 1.8, в.

Рассмотрим теперь пример нелинейности с неразделяющимися переменными. Уравнение двухфазного индукционного двигателя иногда записывается в виде

$$Jrx + (c_2 r + \dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) x = \psi_1 \dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_2 \dot{\psi}_1, \quad (1.31)$$

где

$$\psi_1 = \int u_1 dt, \quad \psi_2 = \int u_2 dt,$$

причем u_1 и u_2 — напряжения, обозначенные на рис. 1.9, r — омическое сопротивление роторных цепей, c_2 — коэффициент линейного трения, x — угловая скорость вала.

Пусть $u_1 = U_0 \cos \omega_0 t$ — напряжение питания от сети, а $u_2 = u(t) \sin \omega_0 t$ — управляющее напряжение, сдвинутое по фазе на 90° , и ω_0 — частота питающего переменного тока. Предполагается, что амплитуда управляющего напряжения $u(t)$ меняется сравнительно медленно.

Подставляя выражения для u_1 и u_2 в уравнение (1.31) и производя упрощения, в процессе которых отбрасываются колебательные слабые двойной частоты, а также члены, содержащие в знаменателе ω_0^3 и высшие ее степени, можно прийти окончательно к следующему уравнению двигателя:

$$(T_1 p + 1) x + bu^2 x = k_1 u, \quad (1.32)$$

где

$$T_1 = \frac{2Jr\omega_0^2}{2c_2 r \omega_0^2 + U_0^2}, \quad b = \frac{1}{2c_2 r \omega_0^2 + U_0^2}, \quad k_1 = \frac{2U_0 \omega_0}{2c_2 r \omega_0^2 + U_0^2}.$$

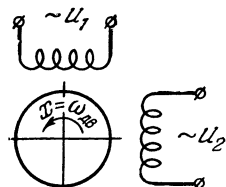


Рис. 1.9.

В данном случае мы имеем нелинейность u^2x с неразделяющимися входной u и выходной x переменными.

В механических колебательных звеньях, которые в линейной теории описываются уравнением

$$(mp^2 + kp + k_2)x_2 = k_1x_1,$$

могут иметься нелинейное трение и нелинейная восстанавливающая сила (нелинейная пружина). Тогда уравнение звена примет вид

$$mp^2x_2 + F_1(px_2) + F(x_2) = k_1x_1. \quad (1.33)$$

Характеристика восстанавливающей силы $F(x_2)$ может отклоняться от линейной в любую сторону (рис. 1.10, а и б).

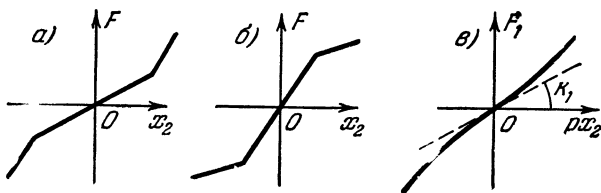


Рис. 1.10.

Трение может быть квадратичным (рис. 1.10, в):

$$F_1(px_2) = k_1px_2 + c(px_2)^2 \operatorname{sign} px_2 \quad (1.34)$$

или сухим (рис. 1.11, а или б), причем весьма важной особенностью сухого трения является то, что при $px_2 = 0$ сила трения F_1 может принимать любое значение в пределах

$$-c \leq F_1 \leq +c, \quad (1.35)$$

равное в каждый данный момент времени сумме всех других действующих сил (включая силу инерции). Поэтому, если в тот момент времени,

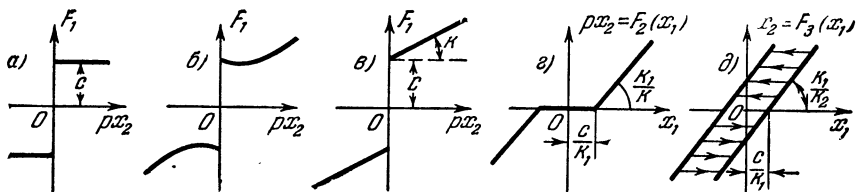


Рис. 1.11.

когда $px_2 = 0$, сумма всех других сил окажется по модулю меньше c , система остановится. Зстой будет продолжаться до тех пор, пока изменение сил не приведет к значению $|F_1| = c$, после чего снова начнется движение системы. Следовательно, надо помнить, что в этом

случае характеристика сухого трения (рис. 1.11, *a*) принципиально отлична от релейной (рис. 1.2, *д*), имеющей внешне аналогичный вид. Если же в процессе движения системы всегда оказывается, что при $px_2 = 0$ сила $|F_1| \geq c$, то застоев не будет и характеристика трения (рис. 1.11, *a*) не будет отличаться от релейной (рис. 1.2, *д*). На рис. 1.11, *б* показан другой реально возможный закон сухого трения, а на рис. 1.11, *в* — сумма сухого и линейного трения.

При наличии линейного и сухого трения (рис. 1.11, *в*) и линейной восстанавливающей силы уравнение колебательного звена (1.33) запишется в виде

$$mp^2x_2 + kpx_2 + c \operatorname{sign} px_2 + k_2x_2 = k_1x_1, \quad (1.36)$$

если только

$$|k_1x_1 - k_2x_2 - mp^2x_2| \geq c \quad \text{при} \quad px_2 = 0. \quad (1.37)$$

Если же в процессе движения в момент наступления значения $px_2 = 0$ окажется, что

$$|k_1x_1 - k_2x_2 - mp^2x_2| < c, \quad (1.38)$$

то уравнение (1.36) будет справедливо только при $px_2 \neq 0$, а при $px_2 = 0$ начнется застой согласно (1.35), который будет продолжаться до тех пор, пока правая часть k_1x_1 изменится в пределах

$$(k_2x_m - c) < k_1x_1 < (k_2x_m + c) \quad \text{при} \quad px_2 = 0, \quad (1.39)$$

где через x_m обозначено значение x_2 , получившееся в момент остановки. Кроме застоев, здесь могут быть скачки и срывы движения.

В случае чисто сухого трения (рис. 1.11, *a*) без линейного надо в уравнении (1.36) положить $k = 0$.

Так, достаточно сложно выглядит нелинейное колебательное звено с сухим трением при наличии массы и восстанавливающей силы. Дело значительно упрощается, во-первых, в общем случае (1.36) при выполнении условия отсутствия застоев (1.37) (тогда характеристика сухого трения сводится к идеальной релейной) и, во-вторых, при наличии застоев в двух частных случаях, которые сейчас будут рассмотрены.

В случае, когда массой за ее малостью можно пренебречь и восстанавливающей силы нет, уравнение звена (1.36) при наличии линейного и сухого трения (рис. 1.11, *в*) с учетом (1.35) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} kpx_2 + c \operatorname{sign} px_2 &= k_1x_1 & \text{при} & \quad px_2 \neq 0, \\ -c < k_1x_1 < +c & & \text{при} & \quad px_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Очевидно, что это эквивалентно нелинейной функции

$$px_2 = F_2(x_1), \quad (1.41)$$

изображенной на рис. 1.11, *г*. Следовательно, в данном случае влияние сухого трения сводится к возникновению зоны нечувствительности для зависимости скорости на выходе звена от входной величины.

Это и имеет место обычно в приводных устройствах с уравнением типа (1.16) (см. рис. 1.4, д).

Наконец, в том случае, когда величиной массы пренебрегается, причем имеются чисто сухое трение (рис. 1.11, а) и линейная восстаивающая сила, уравнение звена (1.36) примет с учетом (1.39) вид

$$\left. \begin{aligned} c \operatorname{sign} p x_2 + k_2 x_2 &= k_1 x_1 && \text{при } p x_2 \neq 0, \\ (k_2 x_m - c) < k_1 x_1 < (k_2 x_m + c) && \text{при } p x_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Легко видеть, что это эквивалентно нелинейной функции

$$x_2 = F_3(x_1), \quad (1.43)$$

изображенной на рис. 1.11, д, где горизонтальные линии соответствуют различным значениям x_m . В данном случае влияние сухого трения оказалось эквивалентным зазору в механической передаче (см. рис. 1.6). Это бывает в чувствительных и управляющих элементах с легкими подвижными частями.

Итак, вообще говоря, сложное явление сухого трения, приводящее в общем случае к сложным движениям, трудно поддающимся анализу, в трех частных случаях может быть описано более простыми нелинейными характеристиками (типа идеальной релейной, типа зоны нечувствительности и типа зазора), анализ которых в дальнейшем не представляет затруднений.

Можно было бы привести еще множество других примеров нелинейностей, которые встречаются в автоматических системах. Они будут даны позже в примерах и конкретных задачах. Здесь же ограничимся пока указанными примерами, достаточными для иллюстрации излагаемых ниже общих вопросов.

§ 1.2. Об исследовании нелинейных автоматических систем

Будем различать понятие нелинейного звена системы и понятие нелинейности.

Нелинейным звеном называется такое реальное звено системы, которое описывается нелинейным уравнением. Уравнение нелинейного звена может иметь довольно произвольный вид: (1.6), (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.15), (1.16), (1.18), (1.22), (1.24), (1.25), (1.27), (1.32), (1.33), (1.36), (1.42) и т. п. При этом под знаками нелинейных функций могут находиться как входная, так и выходная переменные звена.

В дальнейшем нам неважны будут структура отдельных линейных звеньев и их соединения в системе сами по себе, а важно будет лишь результирующее уравнение всей их совокупности. При расчете нелинейных автоматических систем принято выделять нелинейное звено (например, звено 2 на рис. 1.1), а все остальные звенья — линейные — объединять условно в один блок, называемый линейной частью системы

(рис. 1.12, *а*). Поэтому схемы на рис. 1.12, *а* вовсе не подразумевают рассмотрение простых систем, ибо линейная часть может иметь любую структуру, в том числе многоконтурную с любого типа линейными корректирующими устройствами и она может описываться линейным дифференциальным уравнением высокого порядка. Если в системе имеется не одно, а два или больше нелинейных звеньев, то, выделив нелинейные звенья, получим соответственно несколько отдельных линейных частей.

Однако и в уравнении самого нелинейного звена могут находиться некоторые линейные члены, как, например, $(T_1 p + 1)x_2$ в уравнении (1.9), $p x_4$ в уравнении (1.16), $J p x + c_2 x$ и $c_1 u$ в уравнении (1.27),

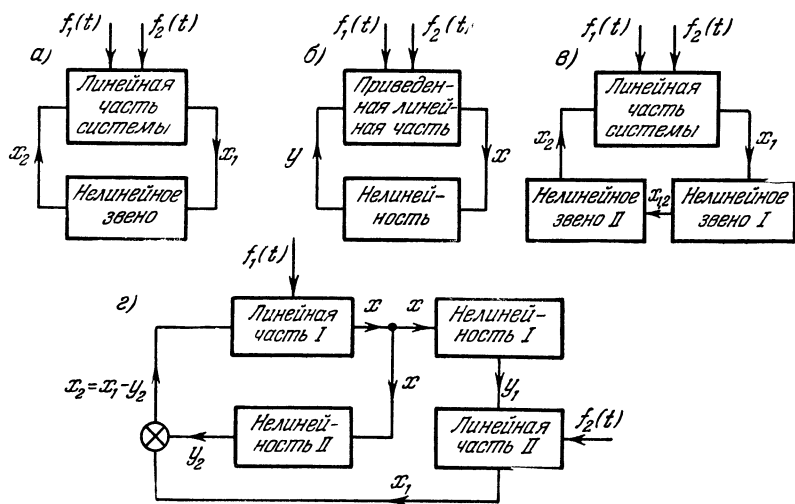


Рис. 1.12.

mp^2x_2 и k_1x_1 в уравнении (1.33), $mp^2x_2 + kpx_2 + k_2x_2$ и k_1x_1 в уравнении (1.36) и т. п. Поэтому, продолжая далее идею объединения линейных элементов системы, выделим из уравнения самого нелинейного звена *нелинейность*, т. е. входящую в это уравнение нелинейную функцию. Например, в уравнении нелинейного звена (1.9) выделим нелинейность в виде

$$y = F_1(x_1), \quad (1.44)$$

$$(T_1 p + 1) x_2 = y \quad (1.45)$$

и отнесем последнее линейное уравнение к общей линейной части системы, назвав ее *приведенной линейной частью* (рис. 1.12, б). Так, если реальная линейная часть (рис. 1.12, а) описывалась некоторым уравнением

$$Q_{\mu}(p) x_1 = R_{\mu}(p) x_2 + S_1(p) f_1(t) + S_2(p) f_2(t), \quad (1.46)$$

а реальное нелинейное звено — уравнением (1.9), то уравнение приведенной линейной части (рис. 1.12, б) в данном случае согласно (1.45) и (1.46) будет

$$(T_1 p + 1) Q_n(p) x_1 = -R_n(p) y + (T_1 p + 1) S_1(p) f_1(t) + (T_1 p + 1) S_2(p) f_2(t), \quad (1.47)$$

а нелинейность будет иметь вид (1.44). Аналогичное выражение получим для x_4 и $x = F(x_3)$ в случае (1.16), если в (1.47) заменить $(T_1 p + 1)$ на p .

При наличии в системе запаздывания τ последнее также будем относить к линейной части. Например, в случае, когда линейная часть описывается уравнением (1.46), а нелинейное звено типа (1.17) имеет уравнение

$$p x_2 = e^{-\tau p} F(x_1), \quad (1.48)$$

для приведенной линейной части можно написать:

$$p Q_n(p) x_1 = -R_n(p) e^{-\tau p} y + p S_1(p) f_1(t) + p S_2(p) f_2(t), \quad (1.49)$$

а для нелинейности

$$y = F(x_1). \quad (1.50)$$

Далее, когда уравнение нелинейного звена имеет более сложный вид (1.27), обозначив через y нелинейность

$$y = J c_3 |x| p x + (c_2 c_3 + c_4) |x| x + c_3 c_4 x^3, \quad (1.51)$$

перепишем уравнение (1.27) в виде

$$J p x + y + c_2 x = c_1 u. \quad (1.52)$$

Пусть уравнение линейной части (рис. 1.12, а) имеет вид (1.46), причем $x_1 = u$, $x_2 = x$. Тогда, исключив из уравнений (1.46) и (1.52) величину $x_1 = u$, получим уравнение приведенной линейной части (рис. 1.12, б):

$$\left[\left(\frac{J}{c_1} p + \frac{c_2}{c_1} \right) Q_n(p) + R_n(p) \right] x = -\frac{1}{c_1} Q_n(p) y + S_1(p) f_1(t) + S_2(p) f_2(t). \quad (1.53)$$

При этом нелинейность будет иметь вид (1.51).

Аналогично обстоит дело в случае нелинейного звена (1.33) и во многих других случаях, когда таким же образом выделяется нелинейность вида $y = F(x, p x)$ или, в частности, $y = F(x)$. Это имеет место и для систем с сухим трением в трех случаях: (1.36) — (1.37), (1.40) — (1.41) и (1.42) — (1.43). Более общий случай сухого трения, характеризуемый формулами (1.36), (1.38) и (1.39) вместе, не сводится к такой простой форме.

Назовем *нелинейными системами первого класса* [46] такие системы, в уравнениях которых под знаки нелинейных функций входит

только одна переменная, возможно со своей производной. Наиболее распространенными нелинейными системами первого класса являются такие, у которых выражение нелинейности в общей записи имеет вид

$$y = F(x, px) \quad \text{или} \quad y = F(x), \quad (1.54)$$

причем уравнение приведенной линейной части можно представить в виде ¹⁾

$$Q(p)x = -R(p)y + S_1(p)f_1(t) + S_2(p)f_2(t). \quad (1.55)$$

Здесь операторные многочлены $Q(p)$ и $R(p)$ могут быть самым различным образом связаны с операторными многочленами реальной линейной части системы $Q_n(p)$ и $R_n(p)$. Например, в случае (1.47)

$$Q(p) = (T_1 p + 1) Q_n(p), \quad R(p) = R_n(p);$$

в случае (1.49)

$$Q(p) = p Q_n(p), \quad R(p) = R_n(p) e^{-\tau p},$$

а в случае (1.53)

$$Q(p) = \left(\frac{J}{c_1} p + \frac{c_2}{c_1} \right) Q_n(p) + R_n(p), \quad R(p) = \frac{Q_n(p)}{c_1}.$$

К такого же типа нелинейным системам первого класса могут быть в большинстве случаев приведены и системы с двумя последовательно соединенными нелинейными звеньями (рис. 1.12, в). Такие два звена могут рассматриваться как одно более сложное нелинейное звено, так как в результате двух нелинейных операций можно получить нелинейное уравнение, непосредственно связывающее переменные x_2 и x_1 .

Примером такой сложной нелинейности является зазор в следящей системе с учетом различия моментов инерции, что описывается уравнениями (1.24), в общем случае имеющими вид

$$F_1(p^2 x, px) = k_2 x_3 + f_3(t), \quad x_4 = F_2(x).$$

Здесь применительно к системе рис. 1.12, в переменные x_3 , x_4 , x играют соответственно роль величин x_1 , x_2 , $x_{1,2}$.

Однако схема типа рис. 1.12, в может иногда приводить и к нелинейной системе третьего класса.

Как видим, рассмотренный тип нелинейных систем первого класса (1.54) — (1.55) охватывает весьма широкий круг нелинейных автоматических систем. К нему относится подавляющее большинство рассматривавшихся в литературе до сих пор нелинейных автоматических систем. Ограничения, накладываемые на уравнение линейной части (1.55), будут указаны ниже (§ 2.2).

Но могут быть нелинейные системы первого класса и *другого типа*. Например, если в схеме на рис. 1.12, г нелинейные звенья I и II описываются соотношениями

$$y_1 = F_1(x, px), \quad y_2 = F_2(x, px), \quad (1.56)$$

¹⁾ Число внешних воздействий не играет роли.

то уравнение линейной части системы будет иметь вид

$$Q(p)x = -R_1(p)y_1 - R_2(p)y_2 + S_1(p)f_1 + S_2(p)f_2, \quad (1.57)$$

т. е., в отличие от (1.55), линейная часть имеет два входа (y_1 и y_2) вместо одного y . Аналогично можно себе представить и линейную часть с n входами, которые соответствуют нелинейностям от одной и той же переменной.

Наконец, к нелинейным системам первого класса может относиться и система, показанная на рис. 1.7, если дело сводится к нелинейной зависимости от одной переменной x (см. об этом § 2.1).

Нелинейными системами второго класса назовем такие, в уравнениях которых под знаками нелинейных функций находятся две (или более) переменные, связанные друг с другом линейными дифференциальными уравнениями.

Например, если в системе имеется нелинейное звено (1.15) и других нелинейностей нет, то она относится к первому классу, так как произведение $F_3(x_2)px_2$ является нелинейным выражением типа (1.54). Но если нелинейное звено описывается уравнением (1.14), то, даже и без наличия других нелинейностей, система будет относиться ко второму классу нелинейных систем, так как произведение $F_2(x_1)px_2$ является нелинейным выражением типа

$$y = F(x_1, px_2), \quad (1.58)$$

где x_1 и px_2 связаны между собой линейным дифференциальным уравнением, а именно уравнением линейной части системы (1.46).

Точно так же к нелинейным системам второго класса относится и система с нелинейным звеном (1.32).

В обоих этих случаях схема системы имеет вид рис. 1.12, а с одним нелинейным звеном.

Однако к нелинейным системам второго класса могут относиться и нелинейные системы с двумя (или несколькими) нелинейными звеньями, а именно схема рис. 1.13, а, в случае, если уравнение нелинейного звена I содержит нелинейную функцию от выходной переменной x_2 (возможно, и ее производной), как, например, (1.33), а уравнение нелинейного звена II — нелинейную функцию от входной переменной x_3 (и ее производной), как, например, (1.16). Линейным дифференциальным уравнением, связывающим переменные x_2 и x_3 , будет уравнение линейной части II (рис. 1.13, а).

Если же линейная часть II будет описываться одним из простых соотношений:

$$x_3 = kx_2, \quad x_3 = kpx_2, \quad x_3 = \frac{k}{p}x_2,$$

то в большинстве случаев систему со схемой рис. 1.13, а можно отнести к системе первого класса.

Аналогично и в схеме рис. 1.13, б получается система второго класса, когда в обоих нелинейных звеньях под знаком нелинейных

функций стоят входные переменные (x_1 и x_3). Эти переменные связаны через линейную часть I .

Система типа 1.7 может быть отнесена к системам второго класса в случае, если получается нелинейная зависимость от двух переменных (см. § 2.1).

Нелинейными системами третьего класса назовем такие, в уравнениях которых под знаками нелинейных функций находятся две (или более) переменные, связанные между собой нелинейными дифференциальными уравнениями.

Сюда относятся, например, системы со схемой рис. 1.13, а, когда в уравнениях обоих нелинейных звеньев под знаками нелинейных

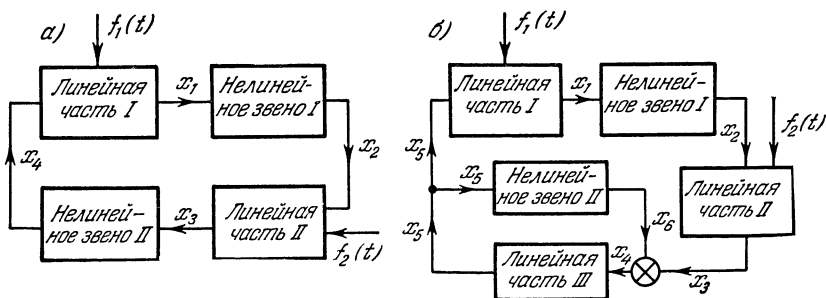


Рис. 1.13.

функций стоят либо входные переменные (x_1 и x_3), либо выходные переменные (x_2 и x_4). Эти переменные не могут быть связаны между собой линейными дифференциальными уравнениями.

Система со схемой рис. 1.13, б будет системой третьего класса например, когда в нелинейном звене I под знаком нелинейной функции стоит входная величина x_1 , а в нелинейном звене II — выходная величина x_6 .

Система третьего класса получается, например, в случае, если при рассмотрении автоматической системы (рис. 1.1) имеются насы-

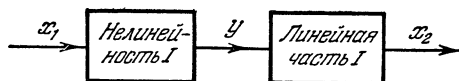


Рис. 1.14.

щение вида (1.9) в звене I и релейная характеристика (1.6) в звене 2. В самом деле, обозначив в уравнении (1.9)

$$y = F_1(x_1), \quad (T_1 p + 1)x_2 = y,$$

разобьем звено I на два (рис. 1.14) и получим нелинейную систему с двумя нелинейностями $y = F_1(x_1)$ и $x_3 = F(x)$, причем переменные

x_1 и x , стоящие под знаками нелинейных функций, не могут быть связаны между собой линейными уравнениями.

Также к системам третьего класса относится система со схемой типа рис. 1.12, в в случае, когда последовательность двух нелинейных звеньев описывается уравнениями (1.23) и (1.32) с заменой x на px . Уравнения таких двух нелинейных звеньев можно разбить на три части:

$$y = F(x), \quad (T_1 p + 1)px = x_2, \quad x_2 = k_1 u - bu^2 px,$$

что приводит фактически к уже обсуждавшейся схеме рис. 1.13, а, причем $x_1 = u$, $x_3 = x$, $x_4 = y$. Таким образом, между двумя нелинейностями появляется линейная часть II, что соответствует системе третьего класса.

Если же в уравнениях (1.32) можно пренебречь постоянной времени T_1 , то такую систему с двумя нелинейными звеньями можно привести к нелинейной системе второго класса.

Оперирование со структурными схемами выше привлекалось исключительно в целях наглядности при классификации нелинейных систем. Для решения же нелинейных задач излагаемыми ниже методами совершенно не обязательно иметь дело со структурными схемами, если заданы дифференциальные уравнения автоматической системы. Решение конкретных задач в дальнейшем не потребует дополнительных преобразований, ни структурных, ни аналитических. Уравнения будут решаться в той форме, в какой они заданы. Обычно они задаются в виде системы нескольких уравнений по звеньям, как, например, (1.1) — (1.7) или (1.19) — (1.21) и т. п. Излагаемые ниже методы позволяют решать задачу также и в том случае, если заданы не дифференциальные уравнения, а частотные характеристики звеньев, в том числе и экспериментальные.

В теоретических исследованиях, посвященных теории устойчивости и теории колебаний, чаще всего исходят из системы уравнений, разрешенных относительно первых производных:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.59)$$

Но, как видно из написанных ранее уравнений (1.1) — (1.7) и (1.19) — (1.21), чтобы записать уравнения автоматической системы в виде (1.59) (или в какой-либо специальной канонической форме), уже требуется проделать некоторые преобразования. Поскольку с точки зрения рассматриваемых ниже методов решения такие преобразования не являются необходимыми, мы, как правило, не будем пользоваться формой уравнений (1.59).

Наиболее общей формой записи уравнений *линейной* автоматической системы по звеньям является следующая ([45], стр. 217):

$$D_{i1}(p)x_1 + D_{i2}(p)x_2 + \dots + D_{im}(p)x_m = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1.60)$$

где $D_{ii}(p)$ — операторные многочлены, m — число звеньев. В конкретных задачах многие из операторных многочленов $D_{ii}(p)$ будут нулями,

Для другого типа систем первого класса (с двумя нелинейностями от одной переменной в разных звеньях), описываемых уравнениями (1.56) — (1.57), в общем виде имеем:

$$\left. \begin{aligned} D_{11}(p)x_1 + \dots + D_{1l}(p)x_l + \dots + D_{1m}(p)x_m &= f_1(t), \\ \dots & \\ D_{k1}(p)x_1 + \dots + D_{kl}(p)x_l + F_1(x_l, px_l) + \dots + D_{km}(p)x_m &= f_k(t), \\ \dots & \\ D_{j1}(p)x_1 + \dots + D_{jl}(p)x_l + F_2(x_l, px_l) + \dots + D_{jm}(p)x_m &= f_j(t), \\ \dots & \\ D_{m1}(p)x_1 + \dots + D_{ml}(p)x_l + \dots + D_{mm}(p)x_m &= f_m(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

причем в уравнении (1.57) $Q(p)$ будет иметь прежнее выражение (1.63), $R_1(p)$ и $R_2(p)$ будут алгебраическими дополнениями (k, l) -и (j, l) -элементов определителя (1.63), а

$$y_1 = F_1(x_l, px_l), \quad y_2 = F_2(x_l, px_l). \quad (1.65)$$

Аналогичный вид будут иметь и уравнения нелинейной системы первого класса с несколькими нелинейностями от одной и той же переменной в разных звеньях.

Нелинейные системы второго и третьего классов будут в своих уравнениях содержать нелинейности от разных переменных, например:

$$\left. \begin{aligned} D_{11}(p)x_1 + \dots + D_{1l}(p)x_l + \dots + D_{1s}(p)x_s + \dots + \\ \quad \quad \quad + D_{1m}(p)x_m &= f_1(t), \\ \dots & \\ D_{k1}(p)x_1 + \dots + D_{kl}(p)x_l + F_1(x_l, px_l) + \dots + \\ \quad \quad \quad + D_{ks}(p)x_s + \dots + D_{km}(p)x_m &= f_k(t), \\ \dots & \\ D_{j1}(p)x_1 + \dots + D_{jl}(p)x_l + \dots + D_{js}(p)x_s + F_2(x_s, px_s) + \\ \quad \quad \quad + \dots + D_{jm}(p)x_m &= f_j(t), \\ \dots & \\ D_{m1}(p)x_1 + \dots + D_{ml}(p)x_l + \dots + D_{ms}(p)x_s + \dots + \\ \quad \quad \quad + D_{mm}(p)x_m &= f_m(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

или при наличии нелинейности типа (1.58):

$$\left. \begin{aligned} D_{11}(p)x_1 + \dots + D_{1m}(p)x_m &= f_1(t), \\ \dots & \\ D_{k1}(p)x_1 + \dots + D_{km}(p)x_m + F(x_l, px_l, x_s, px_s) &= f_k(t), \\ \dots & \\ D_{m1}(p)x_1 + \dots + D_{mm}(p)x_m &= f_m(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Как уже было сказано, при решении конкретных задач далее не потребуется производить ни структурных, ни аналитических преобразований уравнений к каким-либо специальным каноническим формам. Они могут решаться в том виде, в каком заданы в условиях задачи.

Вообще говоря, математическое исследование нелинейных динамических систем представляет большие трудности. Однако в настоящее время инженерам и научным работникам в области автоматики во всех ее многообразных применениях все чаще приходится сталкиваться с нелинейными динамическими явлениями. Особенно в замкнутых системах автоматического управления, стабилизации и регулирования наличие нелинейностей в характеристиках некоторых звеньев приводит на практике к самым неожиданным явлениям, принципиально изменяющим реальную динамику объекта по сравнению с результатами произведенных расчетов системы по линейной теории регулирования. В современных сложных автоматических системах управления бывает так, что спроектированная по линейной теории регулирования казалась бы высококачественная автоматическая система оказывается на практике вследствие влияния не учтенных в расчете, но реально имеющих в системе нелинейностей непригодной по своим динамическим качествам, а иногда даже и теряет устойчивость, что противоречит результатам расчета.

В других случаях имеющиеся неизбежно в отдельных звеньях автоматических систем нелинейности могут оказывать и благоприятное влияние на динамические качества системы. Поэтому все чаще начинают специально вводиться в автоматические системы различные нелинейные корректирующие устройства либо для компенсации вредного влияния уже имеющихся в системе нелинейностей (которые неустранимы сами по себе), либо независимо от последних для придания желаемых динамических качеств системе в целом.

При выявлении влияния на динамические качества системы реально имеющихся в ней нелинейностей, а также и при специальном введении в нее нелинейных корректирующих устройств (независимо от того, решается ли задача анализа или синтеза) необходимо, следовательно, иметь удобные для инженеров методы исследования и расчета нелинейных автоматических систем. Проблема разработки таких методов весьма трудна, если учесть, во-первых, что даже линейная теория регулирования с точки зрения потребностей инженерных расчетов еще не во всем достигла совершенства, во-вторых, что не существует таких, как в линейной теории, универсальных математических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений, а имеются лишь различные методы для некоторых частных видов нелинейных уравнений, наконец, в-третьих, что даже в сравнительно простых нелинейных задачах часто выявляется большое число качественно новых явлений, малоизученных и потому неожиданных для инженера, привыкшего мыслить образами линейных динамических явлений. С этим связано то, что теперь решение многих наиболее важных и

наиболее интересных проблем автоматики основывается так или иначе на развитии нелинейных методов теории автоматического регулирования.

Точному математическому решению поддается лишь небольшое количество нелинейных задач теории автоматического регулирования. Кроме того, если учесть, что большинство практических задач требует решения нелинейных дифференциальных уравнений выше второго порядка, точное решение, даже если оно и проделано, часто оказывается слишком сложным для применения в инженерных расчетах, хотя в ряде случаев оно и приводит к фундаментально важным результатам. В связи с этим первостепенное значение для теории и практики систем автоматического управления и регулирования приобретает развитие приближенных методов исследования динамических качеств нелинейных автоматических систем.

Большое значение в этой области приобрели приближенные методы, основанные на идеях гармонического баланса и эквивалентной линеаризации, предложенных в известных работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, а также на развитой в работах Б. В. Булгакова специальной форме метода малого параметра. На них в основном и базируются различные способы аналитического исследования и расчета нелинейных автоматических систем, рассматриваемых в данной книге и объединенные здесь под общим названием *метода гармонической линеаризации* (в последней главе книги к нему присоединяется еще метод статистической линеаризации).

Эти приближенные методы позволяют весьма эффективно и с вполне достаточной для инженеров степенью точности решать многие задачи, связанные с исследованием динамических свойств нелинейных автоматических систем. Однако наличие и совершенствование эффективных приближенных методов, конечно, не исключают необходимости дальнейшего развития точных решений, начатых в СССР в основном в двух научных школах: А. А. Андропова и А. И. Лурье. Развитие последних важно не только с точки зрения непосредственного получения результатов, но также и для исследования различных особых тонких форм динамических процессов в нелинейных системах, не улавливаемых приближенными методами, с целью установления границ применимости приближенных методов.

Во всех случаях важно правильно оценивать значение точного и приближенного решений. Стремясь к применению строгих методов, где это возможно, нельзя забывать о том, что часто для выполнения точного решения приходится в заданное уравнение нелинейной системы вводить ряд упрощений. В этом случае приближенное решение исходного нелинейного уравнения может оказаться более ценным практически, чем указанное точное, так как при упрощениях заданного уравнения может быть потеряна даже качественная картина исследуемых динамических явлений. Особенно это относится к случаям снижения порядка дифференциального уравнения с третьего до второго

путем отбрасывания влияния одного из параметров системы (например, одной из постоянных времени).

Большое значение для уверенного практического применения приближенных методов имеет предыдущий опыт и экспериментальные данные. Однако весьма важными являются также задача строгого математического обоснования применяемых на практике приближенных решений (в частности, описанных в данной книге) и оценка степени их точности для различного класса нелинейных дифференциальных уравнений динамики автоматических систем. Целесообразно было бы привлечь внимание математиков к этой трудной задаче, имея в виду уже апробированную на практике эффективность указанных приближенных методов.

Многие теоретические и практические вопросы, представляющие большие трудности для аналитического решения, могут в настоящее время сравнительно легко решаться с помощью электрических вычислительных машин непрерывного и дискретного действия как полностью математически, так и путем частичного моделирования с присоединением некоторых блоков реальной аппаратуры или объекта регулирования (со всеми их реальными нелинейными динамическими свойствами). Однако, несмотря на колоссальную роль вычислительных машин и моделирования в инженерных применениях, в том числе и при проектировании сложных автоматических систем, ни одна из указанных выше проблем развития теоретических исследований и разработки практических методов расчета не снимается с повестки дня.

Наоборот, в связи с возможностью решения сложных задач на машинах особое значение приобретает развитие именно наиболее простых приближенных методов расчета, позволяющих хотя бы грубо в первом приближении оценить основные динамические качества проектируемой автоматической системы с учетом нелинейностей. Такая оценка позволит произвести первоначальную наметку структуры автоматической системы и определить хотя бы область наивыгоднейших значений параметров этой системы. После этого на вычислительных машинах и путем моделирования можно проделать уже окончательный выбор структуры и параметров системы. Без указанного предварительного расчетного этапа применение машин и моделирование велось бы вслепую методом проб, так как каждое решение на машине дает результат только для заданных числовых значений параметров системы, а какие варианты их нужно брать, заранее было бы неизвестно. Таким образом, предварительный, хотя бы грубо приближенный и простой расчет (или теоретическое исследование) освещает пути последующего применения вычислительных машин. Эта его роль останется также и при развитии автоматически программирующих и автоматически синтезирующих вычислительных машин. Кроме того, следует иметь в виду, что для многих не столь сложных автоматических систем приближенный нелинейный расчет может

давать сразу приемлемый окончательный результат. Ценным свойством аналитического исследования является также возможность получения из него важных практических рекомендаций более общего характера, имеющих силу не только для данной конкретной системы, но и для целого класса аналогичных систем.

Приемы аналитического исследования динамических процессов в нелинейных автоматических системах, на которых целесообразно строить практические методы расчета этих систем, существенно различаются для монотонных процессов и для колебательных процессов.

При исследовании монотонных процессов в нелинейных системах значительно проще, чем при колебательных, применяются точное решение и обычные численные или графические методы решения даже в системах, описываемых уравнениями высокого порядка. Дело в том, что во многих случаях динамика нелинейных систем может быть описана при помощи ряда линейных дифференциальных уравнений с различными коэффициентами на разных участках процесса, ограниченных определенными размерами искомой переменной (в простейшем случае это выражается в виде нелинейной статической характеристики, составленной из отрезков прямых). Тогда для получения точного решения достаточно решить эти линейные уравнения отдельно на каждом участке и согласовать между собой значения переменной и ее производных в конце предыдущего и в начале следующего участков. Такой «метод припасовывания», дающий точное решение задачи, может оказаться удобным для исследования монотонного процесса, так как последний разбивается обычно всего на два-три участка и потому соотношения величин, получаемые из согласования участков, могут быть не очень громоздкими для анализа. Для численного же и графического решения нелинейных уравнений монотонный процесс удобен тем, что здесь можно получить хорошую точность даже при не очень малом шаге интегрирования.

При исследовании же колебательных процессов непосредственно по заданному нелинейному дифференциальному уравнению даже в случае, когда задачу можно свести к решению линейных уравнений по участкам, получается настолько большое число участков, что соотношения, получаемые методом припасовывания, оказываются необозримыми, а потому практически бесполезными (особенно для уравнений высокого порядка). Этот метод может принести пользу при отыскании периодических решений, для чего он и применяется, так как там достаточно рассмотреть малое число участков внутри одного периода. При построении колебательных процессов численными или графическими методами легко можно получить большую ошибку и даже неверный результат вследствие быстрого изменения переменной во времени, не говоря уже о невозможности получения каких-либо общих закономерностей. Для систем второго порядка в этом случае в лучшем положении оказывается метод изображения процессов на фазовой плоскости.

Указанные обстоятельства вынуждают искать особые приемы для приближенного исследования (и расчета) колебательных процессов в нелинейных автоматических системах, отличные от методов исследования монотонных процессов, к которым проще можно применить обычные способы решения дифференциальных уравнений. Эти особые приемы состоят в том, что выбираются такие величины, характеризующие форму колебательного процесса, которые изменяются монотонно или, во всяком случае, медленно. Такими величинами для не очень сложных форм нелинейных колебаний можно считать, во-первых, координату некоторой средней линии (смещение центра колебаний), максимальное отклонение от нее (огibaющая) и время одного полного колебания (или частота). В большинстве случаев бывает вполне достаточно знания этих величин. В периодическом процессе это будут соответственно: постоянная составляющая, амплитуда и период (или частота). В общем случае колебательного процесса все три величины меняются с течением времени. Определение очень сложных форм колебательных процессов не сводится к знанию трех величин. Однако при проектировании автоматических систем такие процессы встречаются весьма редко. В книге рассматриваются некоторые сложные формы колебательных процессов, которые разделяются нелинейно на сумму простых процессов.

Когда говорится о применении разных методов исследования к определению колебательных и монотонных процессов, надо иметь в виду, что при проектировании нелинейных автоматических систем далеко не всегда заранее известен характер исследуемого динамического процесса. Поэтому, кроме умения вычислять сам колебательный процесс, нужно уметь сначала определить, будет ли процесс при данной структуре, данных параметрах системы, данном внешнем воздействии и при данных начальных условиях колебательным или монотонным. Другими словами, надо уметь находить границы существования колебательных процессов в зависимости от параметров системы и внешних воздействий (а иногда и от начальных условий), а также границы существования затухающих и расходящихся процессов (что связано с определением устойчивости нелинейной системы). Это важно для решения задачи синтеза автоматической системы с учетом нелинейностей как в тех случаях, когда добиваются получения определенных колебательных процессов, так и в тех случаях, когда надо избежать колебательного характера процессов.

В данной книге и разрабатываются наиболее простые приближенные методы решения различных задач в области исследования и расчета нелинейных автоматических систем, исходя из вышеуказанных приемов рассмотрения колебательных процессов с определением границ их существования и с выделением областей устойчивости нелинейной системы. При этом в рассмотрение входят не только колебательные процессы как таковые, но и монотонные процессы, сопровождающиеся вибрационными явлениями, а также и случайные про-

цессы. Рассматриваются также двухчастотные процессы с большой разницей частот.

Исследуются системы с несколькими нелинейностями, в том числе и несимметричные при различных внешних воздействиях на систему. Почти для всех случаев разработаны методы, позволяющие обойтись без вычерчивания годографов на комплексной плоскости. Они применяются и к системам с неоднозначными нелинейностями, и к таким системам, в которых эквивалентная передаточная функция нелинейности зависит не только от амплитуды, но также от частоты и от смещения центра колебаний как в установившихся, так и в переходных процессах. При этом нелинейность мыслится не только в форме нелинейной статической характеристики, но также и в виде изменяющихся дифференциальных уравнений (или передаточных функций) отдельной части системы в зависимости от величины входной переменной.

Все исследования в данной книге ведутся с целью разработки наиболее удобных инженерных методов расчета нелинейных систем и иллюстрируются большим числом решений конкретных задач в этой области.

§ 1.3. Пример отыскания симметричных автоколебаний

В дальнейших главах будет подробно изложен *метод гармонической линеаризации* в общем виде и его разнообразные применения к различным конкретным типам нелинейных задач. Будут также освещены некоторые вопросы обоснования метода и сравнение его с другими существующими методами решения аналогичных нелинейных задач.

Однако, прежде чем приступить к общему изложению вопроса, целесообразно показать основные идеи данного метода расчета на примере одной простейшей нелинейной (релейной) автоматической системы, что и будет сделано в этом и во всех последующих параграфах первой главы [109].

Иллюстрация решения различных нелинейных задач на этом простейшем примере позволит читателю, даже еще не знакомому с методом гармонической линеаризации, убедиться в простоте его общей идеи и всей процедуры его применения к практическим расчетам. Кроме того, на простейших примерах лучше всего могут быть приобретены первоначальные наглядные представления о характере решаемых задач и изучаемых при этом явлениях, которые помогут читателю полнее осознать смысл более общих выкладок, фигурирующих в дальнейших главах.

В качестве примера возьмем автоматическую систему, схема которой изображена на рис. 1.1, описываемую уравнениями (1.1) — (1.7). В настоящем параграфе будут рассматриваться симметричные автоколебания системы, т. е. устойчивые собственные периодические ко-

лебания нелинейной системы, при отсутствии внешних воздействий¹⁾ на систему ($f_1=f_2=f_3=0$). Поэтому схема системы примет вид рис. 1.15, а уравнения будут:

$$(T_1 p + 1) x_2 = -k_1 x_4, \quad (1.68)$$

$$x_3 = F(x), \quad x = x_2 - k_{o.c.} x_4, \quad (1.69)$$

$$(T_2 p + 1) p x_4 = k_2 x_3, \quad (1.70)$$

где $F(x)$ — простейшая из релейных характеристик, а именно идеальная (рис. 1.2, б), как показано на рис. 1.15.

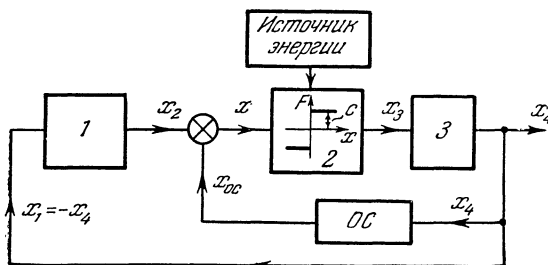


Рис. 1.15.

Автоколебания нелинейной системы, строго говоря, будут всегда иметь несинусоидальную форму, но часто она может быть близка к синусоиде. В рассматриваемой системе (рис. 1.15) выходная величина реле x_3 будет иметь прямоугольную форму при любом законе изменения входной величины реле x (рис. 1.16). Следовательно, x_3 всегда далека от синусоиды. В случае периодических колебаний с основной частотой Ω ее можно разложить в ряд Фурье

$$x_3 = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \sin(r\Omega t + \beta_r), \quad (1.71)$$

где B_r и β_r — амплитуда и фаза r -й гармоники, причем здесь будут присутствовать ввиду нечетной симметрии и однозначности нелинейной функции $F(x)$ только нечетные гармоники ($r=1, 3, 5, \dots$).

Проследим, какую форму получит при этом величина x_4 на выходе линейного звена \mathcal{S} :

$$x_4 = \sum_{r=1}^{\infty} C_r B_r (r\Omega t + \beta_r + \varphi_r), \quad (1.72)$$

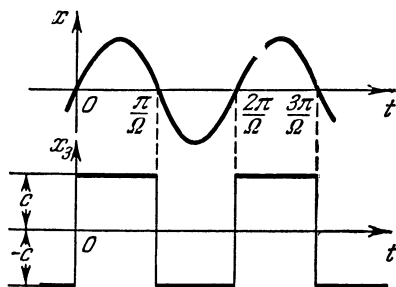


Рис. 1.16.

¹⁾ Внешняя связь остается только в виде подвода энергии постоянного тока к контактам реле.

где согласно уравнению данного звена (1.70) имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_r &= \left| \frac{k_2}{p(T_2 p + 1)} \right|_{p=jr\Omega} = \frac{k_2}{r\Omega \sqrt{T_2^2 r^2 \Omega^2 + 1}}, \\ \varphi_r &= \arg \left(\frac{k_2}{p(T_2 p + 1)} \right)_{p=jr\Omega} = -\frac{\pi}{2} - \arctg T_2 r \Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

($r = 1, 3, 5, \dots$).

Из формулы для C_r видно, что амплитуды высших гармоник (третьей, пятой и т. д.) на выход линейного звена 3 проходят со значи-

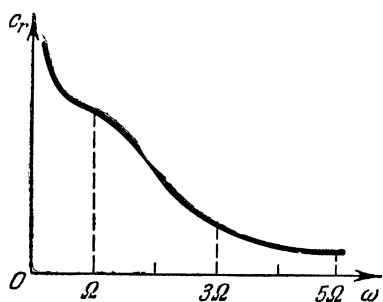


Рис. 1.17.

тельно меньшим «усилением», чем первая гармоника ($r = 1$), и тем меньшим, чем выше номер гармоники (рис. 1.17). Колебания высоких частот практически не пропускаются данным звеном (звено является как бы фильтром нижних частот). Этим свойством всегда обладают электромеханические и механические приводы. Кроме того, надо учесть, что и сами амплитуды B_r высших гармоник прямоугольной входной величины x_3 тоже тем меньше, чем выше номер гармоники.

В результате при этих условиях величину x_4 можно считать практически близкой к синусоиде, определяемой первой гармоникой:

$$x_4 \approx C_1 B_1 \sin(\Omega t + \beta_1 + \varphi_1). \quad (1.74)$$

Все рассуждение было проведено для любой одночастотной периодической формы кривой x (рис. 1.16). Но если при этом x_4 оказывается близкой к синусоиде (1.74), то, согласно уравнениям (1.68) и (1.69), величины x_2 и x тоже будут близки к синусоиде, причем

$$x_2 \approx D_1 C_1 B_1 \sin(\Omega t + \beta_1 + \varphi_1 + \psi_1),$$

где

$$D_1 = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \Omega^2 + 1}}, \quad \psi_1 = -\pi - \arctg T_1 \Omega, \quad (1.75)$$

и

$$\begin{aligned} x &= x_2 - k_{o.c} x_4 \approx \\ &\approx C_1 B_1 [D_1 \sin(\Omega t + \beta_1 + \varphi_1 + \psi_1) - k_{o.c} \sin(\Omega t + \beta_1 + \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Следовательно, определение симметричных автоколебаний системы в указанных выше условиях можно основывать на отыскании синусоидального периодического решения заданных уравнений для переменных x_4 , x_2 и x . Переменную же x_3 на выходе реле нельзя искать

в синусоидальной форме. Но в этом и нет необходимости, так как, определив лишь частоту Ω колебаний переменной x , можно получить всю кривую x_3 (рис. 1.16).

Итак, будем искать периодическое решение для переменной x приближенно в виде

$$x = A \sin \Omega t, \quad (1.76)$$

где A и Ω — искомые амплитуда и частота¹⁾. Поскольку все переменные (x , x_2 и x_4) определяются согласно вышенаписанным формулам приближенно через первую гармонику величины x_3 , то для отыскания решения (1.76) берется не полное выражение нелинейной функции (1.71), а только ее первая гармоника в виде²⁾

$$[x_3]_1 = [F(x)]_1 = B_1 \sin \Omega t, \quad (1.77)$$

где B_1 — коэффициент Фурье:

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad \psi = \Omega t.$$

Учитывая выражение (1.76) для x , перепишем формулу (1.77) в виде

$$[x_3]_1 = [F(x)]_1 = qx, \quad (1.78)$$

где (см. рис. 1.16)

$$\begin{aligned} q = \frac{B_1}{A} &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi} c \sin \psi \, d\psi + \frac{1}{\pi A} \int_{\pi}^{2\pi} (-c) \sin \psi \, d\psi, \end{aligned}$$

т. е.

$$q = \frac{4c}{\pi A}. \quad (1.79)$$

Операция (1.78) называется *гармонической линеаризацией нелинейности*, а величина q — *гармоническим коэффициентом усиления* данного нелинейного звена, который показывает усиление первой гармоники колебаний в данном звене. Здесь оно обратно пропорционально амплитуде A входной величины x (рис. 1.18), так как ампли-

¹⁾ Начальная фаза принимается равной нулю для переменной x . Для других переменных будет вычисляться соответствующий сдвиг фазы.

²⁾ Сдвига фазы здесь нет ввиду нечетной симметрии и однозначности данной нелинейной функции.

туда первой гармоники на выходе такого реле постоянна и равна $\frac{4c}{\pi}$ (независимо от частоты и амплитуды x). Следовательно, *нелинейное* звено $x_3 = F(x)$ в этом исследовании как бы заменяется *линейным* с определенным коэффициентом усиления q , но *принимаящим разные значения для разных амплитуд A* .

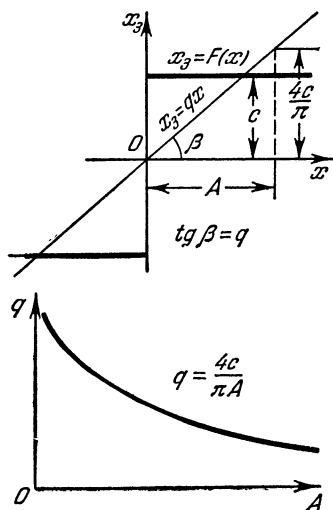


Рис. 1.18.

После замены (1.78) уравнения нашей системы (1.68) — (1.70) переписутся в виде

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_4, \\ x_3 &= q x, \quad x = x_2 - k_{o.c} x_4, \\ (T_2 p + 1) p x_4 &= k_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

Поскольку ищется решение в форме (1.76) с постоянной амплитудой A , то $q = \text{const}$ и (1.80) есть система линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Но особенность этой системы состоит в том, что величина постоянного коэффициента q при этом неизвестна. Она определится из (1.79), когда будет найдена A .

Запишем характеристическое уравнение системы (1.80), сохраняя для пеме-

ременной этого уравнения ту же букву p :

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q = 0, \quad (1.81)$$

где q выражается через A по формуле (1.79).

Предполагая синусоидальную форму решения (1.76), необходимо потребовать наличие пары чисто мнимых корней $p = \pm j\Omega$ в этом уравнении. Поэтому сделаем в уравнении (1.81) подстановку $p = j\Omega$ и определим, при каких условиях она удовлетворяет данному уравнению. С этой подстановкой уравнение (1.81) принимает вид

$$X(q, \Omega) + jY(q, \Omega) = 0, \quad (1.82)$$

или

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{o.c}) k_2 q - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

Из первого уравнения (1.83), подставив (1.79), находим:

$$\Omega^2 = \frac{4c (k_1 + k_{o.c}) k_2}{\pi A (T_1 + T_2)}, \quad (1.84)$$

а из второго уравнения (1.83) с учетом (1.84) и (1.79) получаем:

$$1 + T_1 k_2 k_{o.c} \frac{4c}{\pi A} - \frac{4c T_1 T_2}{\pi A (T_1 + T_2)} (k_1 + k_{o.c}) k_2 = 0,$$

откуда

$$A = \frac{4ck_2T(T_2k_1 - T_1k_{o.c})}{\pi(T_1 + T_2)}, \quad (1.85)$$

причем из (1.84)

$$\Omega^2 = \frac{k_1 + k_{o.c}}{T_1(T_2k_1 - T_1k_{o.c})}. \quad (1.86)$$

Поскольку A и Ω по физическому смыслу величины положительные, то, согласно (1.85) и (1.86), условием существования периодического решения будет соотношение

$$T_2k_1 - T_1k_{o.c} > 0. \quad (1.87)$$

Итак видно, что чисто алгебраическим путем легко определились величины амплитуды A (1.85) и частоты Ω (1.86) искомого периодического решения (1.76). Здесь A и Ω выражены в общем виде через параметры исследуемой системы. Поэтому формулами (1.85) и (1.86) можно воспользоваться для исследования влияния любого из параметров на колебания системы в широкой области изменения каждого параметра. Изменяя параметры системы, надо помнить, что должно сохраняться свойство непропускания высших гармоник звеном 3. Для проверки этого согласно (1.73) надо вычислить

$$C_r = \frac{k_2}{r\Omega \sqrt{r^2T_2^2\Omega^2 + 1}},$$

где Ω определяется формулой (1.86), и потребовать, чтобы $C_r \ll C_1$, т. е. чтобы

$$\frac{k_2}{r\Omega \sqrt{r^2T_2^2\Omega^2 + 1}} \ll \frac{k_2}{\Omega \sqrt{T_2^2\Omega^2 + 1}},$$

откуда после упрощения и подстановки (1.86) получаем условие

$$\frac{(r^2 + 1)T_2^2(k_1 + k_{o.c})}{T_1(T_2k_1 - T_1k_{o.c})} + 1 \gg 0. \quad (1.88)$$

Это условие не накладывает никаких ограничений на параметры системы, если они все положительны, так как решение (1.86) имеет смысл только при $T_2k_1 > T_1k_{o.c}$, а при этом условие (1.88) всегда выполняется. Следовательно, в этой задаче описанный приближенный прием решения при любых положительных значениях параметров системы является вполне оправданным во всей области (1.87) существования периодического решения.

§ 1.4. Зависимость автоколебаний и устойчивости равновесия от параметров системы

Выше были найдены амплитуды (1.85) и частота (1.86) периодического решения. Это периодическое решение с амплитудой A будет соответствовать реальным автоколебаниям в системе, если оно устойчиво.

При исследовании устойчивости периодического решения будем полагать, что вблизи него малым изменениям начальных условий соответствует малое изменение формы решения, т. е. решение сохраняет вид $x = a \sin \psi$, но с медленно меняющейся во времени амплитудой $a(t)$ (рис. 1.19), которая для периодического решения принимает постоянное значение $a = A$. Система (1.80) и характеристическое уравнение (1.81) сохраняют свою силу и для переходного процесса

при малых отклонениях от периодического решения, причем по аналогии с формулой (1.79) имеем:

$$q = \frac{4c}{\pi a}. \quad (1.89)$$

Периодическое решение будет устойчиво, если при начальном значении $a_0 > A$ (рис. 1.19, а) в переходном процессе амплитуда a уменьшается, стремясь к установившемуся значению A (здесь имеются в виду малые отклонения a_0 от A). В этом случае при $a_0 > A$ наше линейное характеристическое уравнение (1.81) должно удовлетворять критерию Гурвица (колебания затухают), а при $a_0 < A$ — не удовлетворять (колебания расходятся).

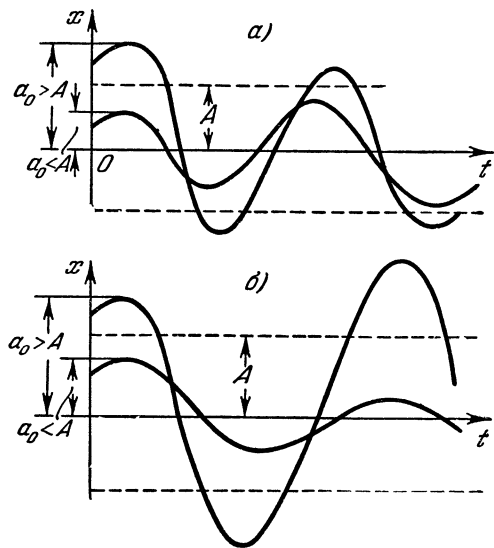


Рис. 1.19.

Если же найденное периодическое решение с амплитудой A неустойчиво (рис. 1.19, б), то автоколебаний с данной амплитудой A в системе не будет.

Итак, теперь необходимо установить, имеет ли место в рассматриваемой задаче случай, изображенный на рис. 1.19, а, или случай, изображенный на рис. 1.19, б.

Для этого применим, как указано, критерий Гурвица к уравнению (1.81). Первое условие — положительность всех коэффициентов — здесь всегда удовлетворяется. Второе условие будет

$$(T_1 + T_2)(1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) - T_1 T_2 (k_1 + k_{o.c}) k_2 q > 0,$$

или с учетом (1.89)

$$\pi a (T_1 + T_2) + 4c T_1^2 k_2 k_{o.c} > 4c T_1 T_2 k_2 k_1. \quad (1.90)$$

Поскольку при подстановке значения $a = A$ из (1.85) здесь получается равенство, то очевидно, что при $a_0 > A$ условие (1.90) удовлетворяется, а при $a_0 < A$ не удовлетворяется.

Отсюда делаем вывод, что в данной задаче имеет место случай устойчивого периодического решения, изображенный на рис. 1.19, а, т. е. найденное периодическое решение (1.76), (1.85), (1.86) действительно определяет автоколебания системы.

При этом формулы (1.85) и (1.86) дают зависимости амплитуды A и частоты Ω автоколебаний от различных параметров системы, изображенные на рис. 1.20.

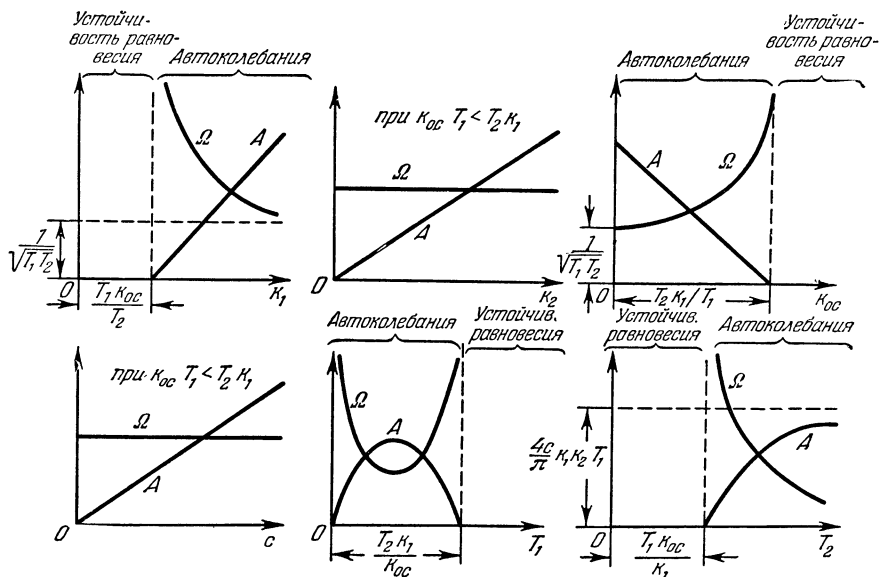


Рис. 1.20.

Кроме графиков рис. 1.20, дающих зависимость A и Ω от любого одного из параметров системы, можно построить также зависимость A и Ω сразу от любых двух параметров в виде линий равных значений A и линий равных значений Ω на плоскости этих двух параметров. Например, на плоскости параметров $k_1, k_{0.c}$ уравнение линий $A = \text{const}$, согласно (1.85), будет

$$k_{0.c} = \frac{T_2}{T_1} k_1 - \frac{\pi A (T_1 + T_2)}{4c k_2 T_1^2};$$

это параллельные наклонные прямые (рис. 1.21, а). Уравнение же линий $\Omega = \text{const}$, согласно (1.86), будет

$$k_{0.c} = \frac{T_1 T_2 \Omega^2 - 1}{T_1^2 \Omega^2 + 1} k_1;$$

это прямые лучи, идущие из начала координат (рис. 1.21, б). По тем же самым формулам можно построить линии $A = \text{const}$ и $\Omega = \text{const}$ на плоскости параметров $k_2, k_{0.c}$ (рис. 1.22) и т. д.

Таким образом, на плоскости любых двух параметров системы можно получить область существования автоколебаний, причем в каждой точке будут известны их амплитуда и частота.

Остальная часть плоскости двух параметров, которая не заполнена линиями $A = \text{const}$ и $\Omega = \text{const}$, обозначает отсутствие авто-

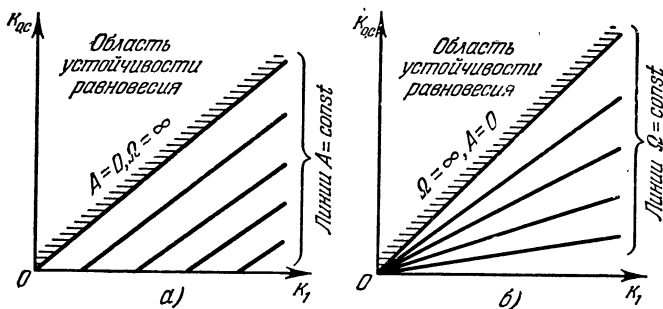


Рис. 1.21.

колебаний в системе. Область отсутствия автоколебаний по каждому из параметров в отдельности видна также на рис. 1.20. В этой области должны находиться значения параметров в том случае, когда

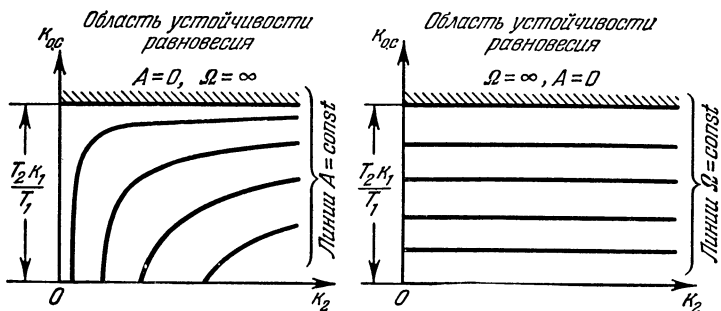


Рис. 1.22.

необходимо, чтобы система работала без автоколебаний, причем надо убедиться в том, что равновесное состояние системы в этой области будет устойчивым.

Поскольку свойства системы меняются постепенно при изменении ее параметров, то за границей области автоколебаний ¹⁾ (выше линии $A=0, \Omega=\infty$ на рис. 1.21 и 1.22) при любых начальных условиях будет иметь место неперiodический колебательный процесс, либо затухающий, либо расходящийся. В первом случае характеристическое

¹⁾ По крайней мере, вблизи от этой области.

уравнение (1.81) будет удовлетворять критерию Гурвица при всех значениях амплитуды a , т. е. будет удовлетворяться условие (1.90). Во втором случае оно не будет удовлетворяться.

Проверим, удовлетворяется ли условие (1.90) в области $k_{o.c} > \frac{T_2 k_1}{T_1}$, изображенной на рис. 1.22. Разделив обе части (1.90) на $4cT_1^2 k_2$, получим:

$$\frac{\pi a (T_1 + T_2)}{4cT_1^2 k_2} + k_{o.c} > \frac{T_2 k_1}{T_1},$$

откуда видно, что в указанной области это условие удовлетворяется при любом a . Следовательно, в области выше линии $A = 0$, $\Omega = \infty$ на рис. 1.22 имеют место затухающие колебания при любой их амплитуде, т. е. *равновесное состояние системы устойчиво*.

То же самое получается и для областей устойчивости равновесия на рис. 1.21 и 1.20.

Этот результат вполне соответствует физической картине явлений. В самом деле, из рис. 1.20, 1.21, 1.22 видно, что с увеличением коэффициента обратной связи $k_{o.c}$ амплитуда автоколебаний уменьшается, а при достаточно большом значении $k_{o.c}$ автоколебания в системе совсем подавляются и равновесное состояние системы становится устойчивым. Это согласуется с хорошо известным общим свойством всякой отрицательной обратной связи в системах регулирования. При отсутствии же обратной связи ($k_{o.c} = 0$) автоколебания имеют место при любом соотношении параметров системы, причем их амплитуда увеличивается с ростом коэффициентов усиления и постоянных времени, что также согласуется с практикой.

Заметим, что не всегда автоколебания будут нежелательным явлением. Часто при малой их амплитуде и при частоте в безопасном диапазоне они полезны для ликвидации застоев из-за сухого трения, зазоров, для повышения чувствительности регулятора и т. п. (сглаживание или «линеаризация» нелинейностей при помощи автоколебаний). Встречаются и такие автоматические системы, в которых бывает необходимо специальное получение устойчивого автоколебательного режима с вполне определенными амплитудой и частотой.

Формулы (1.85), (1.86) и графики рис. 1.20—1.22 дают величину амплитуды автоколебаний A для переменной x . Для переменных x_4 и x_2 (см. рис. 1.15) можно вычислить амплитуды A_4 и A_2 по передаточным функциям, вытекающим из заданных уравнений (1.80):

$$A_4 = \frac{k_2 q(A)}{\Omega \sqrt{T_2^2 \Omega^2 + 1}} A, \quad A_2 = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \Omega^2 + 1}} A_4. \quad (1.91)$$

Что же касается переменной x_3 , то она имеет вид периодической прямоугольной кривой (рис. 1.16) с периодом $\frac{2\pi}{\Omega}$.

§ 1.5. Пример оценки качества симметричных колебательных переходных процессов

Выше были рассмотрены автоколебания и выделена область устойчивости равновесного состояния системы при отсутствии автоколебаний. Теперь в той же системе без внешнего воздействия (рис. 1.15) исследуем переходный процесс для любой точки плоскости параметров (рис. 1.20—1.22) как в области существования автоколебаний, так и в области устойчивости равновесия системы, но только там, где имеет место колебательный переходный процесс. Он может

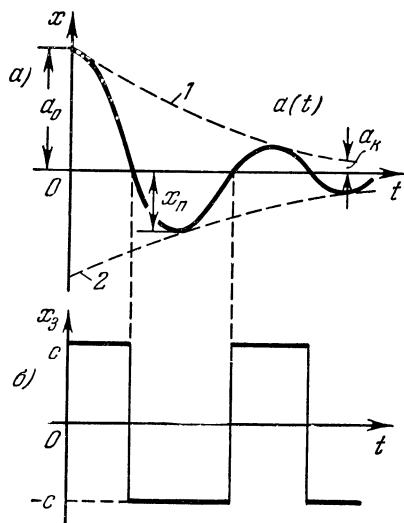


Рис. 1.23.

затухать в одних случаях медленно, в других быстро, вплоть до затухания практически за один период, когда наблюдается всего одно перерегулирование.

Предположим, что для переменной x процесс имеет форму, показанную на рис. 1.23, а, причем огибающие 1 и 2 приблизительно симметричны относительно оси t . Затухающие колебания входной величины x имеют здесь, в отличие от линейной системы, переменную частоту. Обычно она увеличивается с уменьшением амплитуды (как это имеет место и для автоколебаний, рис. 1.20), хотя могут быть и другие случаи. В результате, частота переключений реле тоже будет переменной (рис. 1.23, б).

Будем считать, что эта частота меняется плавно с течением времени. Очевидно, что при этом свойство фильтра (рис. 1.17) звена 3 (рис. 1.15) будет по-прежнему иметь место. Это дает возможность искать решение для переменной x в переходном процессе в виде указанной на рис. 1.23 плавной кривой.

Если бы рассматривалась линейная система третьего порядка, то решение для колебательного переходного процесса имело бы вид

$$x = a_0 e^{\xi_\lambda t} \sin(\omega_\lambda t + \psi_0) + C e^{\eta_\lambda t},$$

что соответствовало бы следующим трем корням характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \xi_\lambda \pm j\omega_\lambda, \quad p_3 = \eta_\lambda.$$

Если $|\eta_\lambda| \gg |\xi_\lambda|$, то при начальном условии $\dot{x}_0 = 0$ или при малом \dot{x}_0 (как, например, на рис. 1.23) последний член решения будет мал, вследствие чего

$$x \approx a_0 e^{\xi_\lambda t} \sin(\omega_\lambda t + \psi_0). \quad (1.92)$$

Будем считать, что в нелинейной системе искомую кривую $x(t)$ (рис. 1.23) ввиду ее плавного колебательного характера можно приблизительно описать тоже затухающей синусоидой, но с переменной частотой ω и переменным показателем затухания ξ , которые будут меняться плавно и достаточно *медленно* во времени. При этом амплитуда колебаний a может меняться *быстро*, т. е. процесс может быть *быстрозатухающим*, каким он бывает и при постоянном $\xi = \xi_d$.

Таким способом можно описать широкий класс нелинейных колебательных процессов, не накладывая ограничения на быстроту изменения амплитуды, т. е. сохраняя возможность исследования быстро-затухающих (при $\xi < 0$) или расходящихся ($\xi > 0$) колебательных переходных процессов.

Заметим, что при этом решение $x(t)$ будет рассматриваться на конечном отрезке времени (один-два или несколько периодов колебаний), после чего процесс практически будет считаться затухшим.

Условившись считать частоту ω и показатель затухания ξ переменными, нельзя записывать выражения для амплитуды и фазы колебаний в виде (1.92) как для линейной системы. Искомое решение запишем в форме

$$x = a \sin \psi, \quad (1.93)$$

причем

$$\frac{da}{dt} = a\xi(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(a). \quad (1.94)$$

Легко проверить, что при $\xi = \text{const} = \xi_d$ и при $\omega = \text{const} = \omega_d$ формулы (1.93) и (1.94) сводятся к виду (1.92). При переменных же ξ и ω они дают

$$x = a_0 e^{\int \xi dt} \sin \left(\int \omega dt + \psi_0 \right).$$

Итак, в данном случае качество нелинейного переходного процесса в первом приближении определяется двумя величинами: показателем затухания $\xi(a)$ и частотой $\omega(a)$. Определив их, можно затем оценить форму переходного процесса (в том числе время затухания и «перерегулирование») на любом участке изменения амплитуды a : от начального a_0 до конечного a_k (рис. 1.23), при котором процесс считается практически затухшим. Задача сводится, следовательно, к отысканию величин $\xi(a)$ и $\omega(a)$.

В линейной системе величины ξ_d и ω_d определялись как вещественная и мнимая части пары комплексных корней характеристического уравнения. Аналогично будем поступать и здесь. Для этого произведем гармоническую линеаризацию нелинейности.

В данном примере (рис. 1.15) формулы (1.78) и (1.89) сохраняют прежний вид, поскольку прежний процесс вычисления гармонического коэффициента усиления $q(a)$ соответствует принятой здесь форме

решения (1.93). Поэтому и уравнения гармонически линеаризованной системы здесь будут прежними:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_4, \\ x_3 &= q x, \quad x = x_2 - k_{o.c} x_4, \\ (T_2 p + 1) p x_4 &= k_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.95)$$

Следовательно, и характеристическое уравнение сохранит прежний вид:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q = 0, \quad (1.96)$$

где, согласно (1.89):

$$q = \frac{4c}{\pi a}. \quad (1.97)$$

Это уравнение в своих коэффициентах содержит величину q , зависящую от a , что и позволяет путем отыскания пары комплексных корней этого уравнения, в отличие от линейной системы с постоянными коэффициентами, найти переменные значения $\xi(a)$ и $\omega(a)$. Такой процесс вычисления вполне допустим ввиду предположенного ранее достаточно медленного изменения величин $\xi(a)$ и $\omega(a)$.

Для отыскания пары комплексных корней подставим в левую часть характеристического уравнения (1.96) $p = \xi + j\omega$. В результате получим выражение, состоящее из вещественной и мнимой части:

$$X(q, \xi, \omega) + jY(q, \xi, \omega) = 0,$$

причем

$$\left. \begin{aligned} X &= T_1 T_2 \xi^3 + (T_1 + T_2) \xi^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) \xi + \\ &\quad + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q - (3 T_1 T_2 \xi + T_1 + T_2) \omega^2 = 0, \\ Y &= [3 T_1 T_2 \xi^2 + 2 (T_1 + T_2) \xi + 1 + T_1 k_2 k_{o.c} q] \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

Эти два уравнения и позволяют найти две величины: $\xi(a)$ и $\omega(a)$ — при разных сочетаниях параметров системы и тем самым оценить качество переходных процессов с целью выбора наилучших параметров системы.

Из второго уравнения (1.98) с учетом (1.97) находим:

$$\omega^2 = 3\xi^2 + 2 \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \xi + \frac{1}{T_1 T_2} + \frac{4ck_2 k_{o.c}}{\pi T_2 a}, \quad (1.99)$$

а из первого

$$a = \frac{4ck_2}{\pi f(\xi)} \left[k_1 - T_1 k_{o.c} \left(\frac{1}{T_2} + 2\xi \right) \right], \quad (1.100)$$

где

$$f(\xi) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2 \left[1 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \right] \xi + 8(T_1 + T_2) \xi^2 + 8 T_1 T_2 \xi^3. \quad (1.101)$$

Заметим, что отсюда как частный случай при $\xi = 0$ получаются амплитуда (1.85) и частота (1.86) периодического решения (автоколебаний).

Чтобы наглядно представить полученные здесь величины $\xi(a)$ и $\omega(a)$, характеризующие качество переходного процесса, поступим следующим образом. Построим на плоскости с координатами k_1 и a (рис. 1.24) линии $\xi = \text{const}$ и линии $\omega = \text{const}$. Согласно формуле (1.100) линии $\xi = \text{const}$ на этой плоскости будут прямыми, у которых тангенс угла наклона и начальная абсцисса зависят от величины ξ . Согласно же (1.99) величина ω вдоль каждой линии $\xi = \text{const}$ будет уменьшаться с увеличением a . Поэтому линии $\omega = \text{const}$ будут более пологими, чем линии $\xi = \text{const}$, и, вообще говоря, криволинейными.

Линия $\xi = 0$ на рис. 1.24 дает указанную на первом графике рис. 1.20 зависимость амплитуды автоколебаний A от коэффициента k_1 . Левее точки G (рис. 1.24) имеем $\xi < 0$ при всех значениях a , что соответствует устойчивости равновесного состояния системы. Правее точки G имеем $\xi < 0$ только при $a > A$, т. е. при амплитуде, большей амплитуды автоколебаний (выше линии $\xi = 0$), и $\xi > 0$ при меньших амплитудах ($a < A$). Это соответствует наличию устойчивого автоколебательного процесса и неустойчивости равновесного состояния системы в данной области значений параметра k_1 .

Линия $\omega = 0$ (рис. 1.24) является такой граничной линией, левее которой наше исследование не имеет смысла (получаются мнимые значения частоты). Можно полагать, что левее этой линии имеет место *монотонный* аperiodический переходный процесс (мы же ограничиваемся рассмотрением только колебательных процессов). Уже сама граница области колебательных процессов ($\omega = 0$) должна рассматриваться как грубо ориентировочная.

Изображенную на рис. 1.24 диаграмму будем называть *диаграммой качества затухания нелинейных процессов*. Она может быть

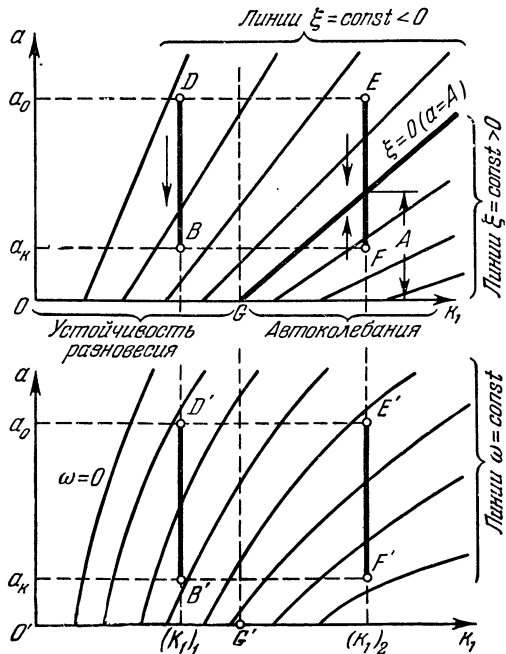


Рис. 1.24.

построена аналогичным путем и для любых других параметров системы, фигурирующих на рис. 1.20. Если построить такую диаграмму для линейной системы, то все линии $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ на ней будут вертикальными.

На основании данной диаграммы можно оценить качество переходного процесса при различных значениях параметра k_1 . Возьмем два различных значения: $(k_1)_1$ левее точки G' и $(k_1)_2$ правее точки G' . Рассмотрим протекание переходного процесса на участке изменения амплитуды от a_0 до a_k . Проведем соответственно вертикальные линии DB , $D'B'$ и EF , $E'F'$ (рис. 1.24) и изобразим на отдельном

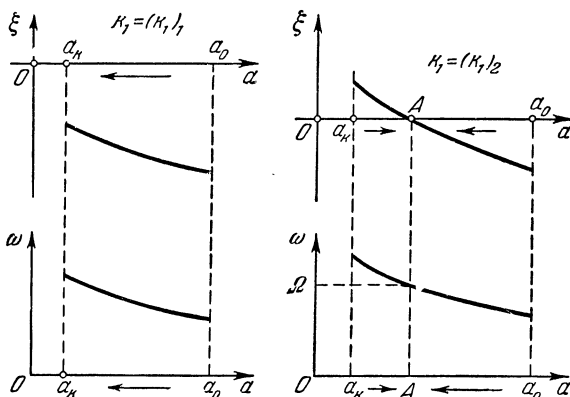


Рис. 1.25.

графике (рис. 1.25) взятые из рис. 1.24 изменения величин ξ и ω вдоль этих линий в зависимости от амплитуды. Направление течения переходного процесса во времени показано стрелками (при отрицательном ξ амплитуда уменьшается, а при положительном — увеличивается). Через A и Ω обозначены амплитуда и частота автоколебаний. По величине ξ можно судить о скорости затухания переходного процесса, а по величине ω — о числе колебаний за время длительности переходного процесса и о величине перерегулирования x_n (рис. 1.23). Это будет подробно описано в главе VII. Там же будет рассмотрен вопрос о пересчете этих величин, найденных для переменной x , на другие переменные, в частности на выходную величину x_4 .

Следовательно, при помощи диаграмм затухания нелинейных процессов, составленных для разных параметров системы, можно производить выбор области наилучших значений этих параметров, исходя из желаемого качества колебательного переходного процесса¹⁾ или требуя, чтобы переходный процесс был монотонным.

¹⁾ См. также § 1.8.

Заметим, что вблизи автоколебательного режима (т. е. вблизи линии $\xi=0$, рис. 1.24) процесс установления автоколебаний характеризуется сравнительно малыми значениями ξ . В этом случае согласно (1.101) приближенно имеем:

$$f(\xi) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2 \left[1 + \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right)^2 \right] \xi.$$

Подставив это в формулу (1.100), найдем из нее в явном виде

$$\xi = - \frac{T_1 + T_2}{2 T_1 T_2} \frac{a - A}{Ha + D}, \quad (1.102)$$

где A — амплитуда автоколебаний, определяемая формулой (1.85), т. е.

$$A = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c.})}{\pi (T_1 + T_2)};$$

$$H = 1 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2}, \quad D = \frac{4c}{\pi} k_2 k_{o.c.} T_1.$$

Это позволяет проинтегрировать уравнение (1.94) и найти огибающую колебаний $a(t)$ [208].

§ 1.6. Пример несимметричных автоколебаний и статические ошибки автоколебательной системы

Сначала рассмотрим ту же автоматическую систему (рис. 1.15) без внешних воздействий, но с *несимметричной нелинейностью* в простейшем виде (рис. 1.26, а). В этом случае, очевидно, в уста-

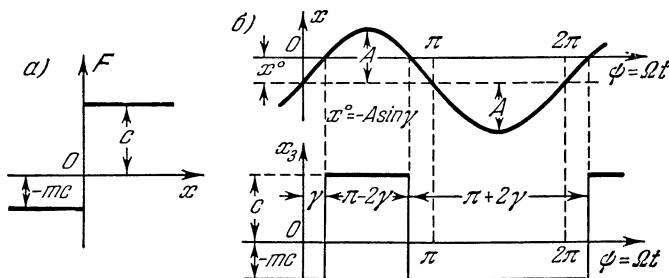


Рис. 1.26.

новившемся колебательном режиме должна возникнуть постоянная составляющая. Следовательно, приближенное решение для автоколебаний, в отличие от (1.76), надо искать здесь в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где } x^* = A \sin \Omega t, \quad (1.103)$$

причем x^0 — постоянная составляющая, а x^* — периодическая (колебательная) составляющая.

В соответствии с этим и к разложению нелинейной функции $F(x)$ в ряд Фурье (1.71) добавится постоянная составляющая. Имея в виду по-прежнему, что высшие гармоники не пропускают звеном 3 (см. § 1.3), ограничимся здесь постоянной составляющей и первой гармоникой. Тогда аналогично (1.78) будем иметь:

$$[x_3]_{0,1} = [F(x)]_{0,1} = x_3^0 + qx^*, \quad (1.104)$$

где, согласно известным формулам для коэффициентов ряда Фурье, имеем (см. рис. 1. 26, б):

$$\begin{aligned} x_3^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{(\pi - 2\gamma)c - (\pi + 2\gamma)mc}{2\pi} = \\ &= \frac{(1-m)c}{2} - \frac{(1+m)\gamma c}{\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{c}{\pi A} \int_{+\gamma}^{\pi-\gamma} \sin \psi d\psi - \frac{mc}{\pi A} \int_{\pi-\gamma}^{2\pi+\gamma} \sin \psi d\psi = \frac{2(1+m)c}{\pi A} \cos \gamma. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что, согласно рис. 1.26, б, $x^0 = -A \sin \gamma$, получаем:

$$x_3^0 = \frac{(1-m)c}{2} + \frac{(1+m)c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \quad (1.105)$$

$$q = \frac{2(1+m)c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}. \quad (1.106)$$

Уравнения системы (1.68) — (1.70) после гармонической линеаризации (1.104) с учетом (1.103) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_4, & x_3 &= x_3^0 + qx^*, \\ x^0 + x^* &= x_2 - k_{0,c} x_4, & (T_2 p + 1) p x_4 &= k_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.107)$$

Очевидно, что и остальные переменные x_2 и x_4 будут складываться из постоянных и периодических составляющих:

$$x_2 = x_2^0 + x_2^*, \quad x_4 = x_4^0 + x_4^*.$$

При этом для постоянных составляющих из (1.107) с учетом (1.105) получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_2^0 &= -k_1 x_4^0, & x_3^0 &= \frac{(1-m)c}{2} + \frac{(1+m)c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \\ x^0 &= x_2^0 - k_{0,c} x_4^0, & 0 &= k_2 x_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.108)$$

Для периодических же составляющих из (1.107) находим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^* &= -k_1 x_4^*, & x_3^* &= q x^*, \\ x^* &= x_2^* - k_{o.c} x_4^*, & (T_2 p + 1) p x_4^* &= k_2 x_3^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.109)$$

где величина q определяется формулой (1.106).

Из уравнения (1.108) находим:

$$\left. \begin{aligned} x_3^0 &= 0, & x^0 &= -A \sin \frac{\pi(1-m)}{2(1+m)} = A \cos \frac{\pi}{1+m}, \\ x_2^0 &= \frac{k_1 x^0}{k_1 + k_{o.c}}, & x_4^0 &= -\frac{x^0}{k_1 + k_{o.c}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.110)$$

Уравнения же (1.109) для периодических составляющих совпадают с прежними (1.80), но только здесь имеет место новое значение q . Подставив выражение x^0 из (1.110) в формулу (1.106), находим:

$$q = \frac{2(1+m)c}{\pi A} \sin \frac{\pi}{1+m}. \quad (1.111)$$

Поэтому, воспользовавшись прежним характеристическим уравнением (1.81) и уравнениями (1.83), получим здесь решение для амплитуды автоколебаний вместо (1.85) в виде

$$A = \frac{A_c}{2} (1+m) \sin \frac{\pi}{1+m}, \quad (1.112)$$

где

$$A_c = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}{\pi (T_1 + T_2)}$$

представляет собой амплитуду автоколебаний при симметричной нелинейности (при $m=1$).

Решение для частоты автоколебаний приводит к тому же выражению, что и для симметричных колебаний:

$$\Omega^2 = \frac{k_1 + k_{o.c}}{T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}. \quad (1.113)$$

Величины постоянных составляющих для всех переменных определяются после этого по формулам (1.110).

Графики полученных зависимостей амплитуды A и смещения x^0 от величины m , характеризующей несимметрию нелинейности (рис. 1.26, а), представлены на рис. 1.27.

Перейдем теперь к рассмотрению *статических ошибок* нелинейной автоматической системы, работающей в режиме автоколебаний, при наличии внешнего воздействия.

Пусть на автоматическую систему, схема которой изображена на рис. 1.1, действует только одно *внешнее воздействие* $f_1(t)$,

которое называется *задающим или управляющим* (рис. 1.28). Уравнения системы (1.1) — (1.7) принимают вид

$$(T_1 p + 1) x_2 = k_1 x_1, \quad x_1 = f_1(t) - x_4, \quad (1.114)$$

$$x_3 = F(x), \quad x = x_2 - x_{o.c}, \quad (1.115)$$

$$(T_2 p + 1) p x_4 = k_2 x_3, \quad x_{o.c} = k_{o.c} x_4. \quad (1.116)$$

Пусть $F(x)$ имеет простейший симметричный вид (рис. 1.2, д), как показано на рис. 1.28.

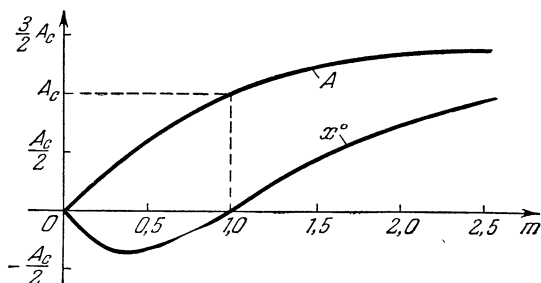


Рис. 1.27.

Рассмотрим сначала случай подачи постоянного по величине внешнего воздействия $f_1(t) = \text{const} = f_1^0$. Это даже при симметричной

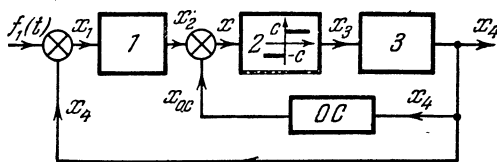


Рис. 1.28.

нелинейности может вызвать появление постоянных составляющих, которые, согласно уравнениям данной системы (1.114) — (1.116), можно определить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_2^0 &= k_1 (f_1^0 - x_4^0), \\ x_3^0 &= F(x^0), \quad x^0 = x_2^0 - x_{o.c}^0, \\ 0 &= k_2 x_3^0, \quad x_{o.c}^0 = k_{o.c} x_4^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_3^0 &= 0, \quad x^0 = 0, \quad x_2^0 = x_{o.c}^0 = k_{o.c} x_4^0, \\ x_4^0 &= \frac{k_1 f_1}{k_1 + k_{o.c}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.118)$$

При отсутствии дополнительной обратной связи или при включении гибкой обратной связи было бы $x_2^0 = 0$, как в астатической системе регулирования или в обычной следящей системе, причем $x_4^0 = f_1^0$, т. е. имело бы место точное воспроизведение входной величины, если не считать наложенных на выходную величину автоколебаний, которые можно сделать достаточно малыми.

Поскольку $x^0 = 0$, то решение для автоколебаний переменной x имеет симметричную форму (1.76), вследствие чего все выкладки §§ 1.3 и 1.4 сохраняют силу и здесь. Следовательно, амплитуда и частота автоколебаний в данной системе (рис. 1.28) не зависят от величины постоянного внешнего воздействия f_1^0 , и лишь для некоторых переменных добавляются при этом постоянные составляющие (1.118). Это явилось результатом наличия в системе интегрирующего звена 3 и приложения внешнего воздействия вне этого звена.

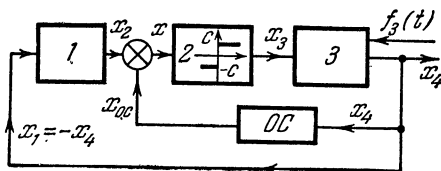


Рис. 1.29.

Рассмотрим также случай приложения *внешнего воздействия* $f_3(t)$, называемого *возмущающим (нагрузкой)*, к интегрирующему звену 3 (рис. 1.29). Уравнения системы (1.1) — (1.7) здесь будут:

$$(T_1 p + 1) x_2 = -k_1 x_4, \quad (1.119)$$

$$x_3 = F(x), \quad x = x_2 - x_{0.c}, \quad (1.120)$$

$$(T_2 p + 1) p x_4 = k_2 x_3 + f_3(t), \quad x_{0.c} = k_{0.c} x_4. \quad (1.121)$$

Пусть в этой системе тоже будет постоянное внешнее воздействие $f_3(t) = \text{const} = f_3^0$ (рис. 1.29).

В этом случае решение для автоколебаний переменной x надо искать в форме (1.103) и пользоваться гармонической линеаризацией в виде (1.104). Поскольку в данном случае нелинейная характеристика симметрична, то надо положить $m = 1$. При этом из формул (1.105) и (1.106) находим:

$$x_3^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \quad (1.122)$$

$$q = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}. \quad (1.123)$$

Согласно (1.119) — (1.121) уравнения системы после гармонической линеаризации (1.104) будут:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_4, & x_3 &= x_3^0 + q x^*, \\ x &= x_2 - k_{o.c} x_4, & (T_2 p + 1) p x_4 &= k_2 x_3 + f_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.124)$$

Отсюда для постоянных составляющих с учетом (1.122) получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_2^0 &= -k_1 x_4^0, & x_3^0 &= \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \\ x^0 &= x_2^0 - k_{o.c} x_4^0, & 0 &= k_2 x_3^0 + f_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.125)$$

Для периодических составляющих из (1.124) получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^* &= -k_1 x_4^*, & x_3^* &= q x^*, \\ x^* &= x_2^* - k_{o.c} x_4^*, & (T_2 p + 1) p x_4^* &= k_2 x_3^*. \end{aligned} \right\} \quad (1.126)$$

Второе и последнее из уравнений (1.125) дают

$$\frac{x^0}{A} = -\sin \frac{\pi f_3^0}{2ck_2}. \quad (1.127)$$

Система уравнений (1.126) совпадает с прежней системой (1.109), но с новым значением q , которое, согласно (1.127) и (1.123), будет иметь выражение

$$q = \frac{4c}{\pi A} \cos \frac{\pi f_3^0}{2ck_2} \quad (1.128)$$

вместо прежнего (1.111). Поэтому решение для амплитуд автоколебаний здесь вместо (1.112) будет

$$A = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}{\pi (T_1 + T_2)} \cos \frac{\pi f_3^0}{2ck_2}. \quad (1.129)$$

Частота автоколебаний остается прежней (1.113), т. е. не зависит от величины внешнего воздействия¹⁾.

Постоянная составляющая x определяется после этого по формуле (1.127), т. е.

$$x^0 = -\frac{2ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}{\pi (T_1 + T_2)} \sin \frac{\pi f_3^0}{ck_2}. \quad (1.130)$$

Как видим, величина амплитуды автоколебаний A (также как и смещение x^0) зависит от величины постоянного внешнего воздей-

¹⁾ Этот вывод справедлив лишь в первом приближении (см. § 8.6).

ствия f_3^0 (рис. 1.30а). Заметим при этом, что проделанные выкладки справедливы при условии

$$-ck_2 \leq f_3^0 \leq +ck_2, \quad (1.131)$$

что вытекает из (1.127) на основании требования $x^0 \leq A$. В противном случае ($x^0 > A$) колебаний в системе вообще не будет, так как величина x будет сохранять неизменный знак, и реле все время будет включено в одну сторону.

Амплитуды и смещения для всех остальных переменных могут быть определены затем по формулам (1.91) и (1.125). Для получения же кривой $x_3(t)$ на выходе релейного звена достаточно, согласно рис. 1.26, б, знать только величины Ω и

$$\gamma = -\arcsin \frac{x^0}{A} = \frac{\pi f_3^0}{2ck_2}. \quad (1.132)$$

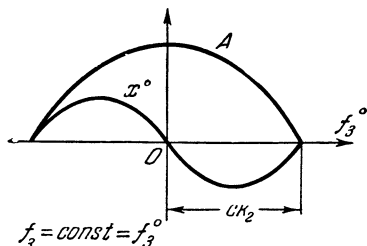


Рис. 1.30а.

Описанный случай, когда $f_3(t) = \text{const} = f_3^0$ приложено к интегрирующему звену 3 (рис. 1.29), соответствует случаю определения статической ошибки x^0 и x_4^0 от постоянной нагрузки f_3^0 на выходе автоколебательной релейной автоматической системы.

Вернемся теперь к системе, изображенной на рис. 1.28, и рассмотрим *изменение задающего (управляющего) внешнего воздействия $f_1(t)$ с постоянной скоростью*:

$$f_1(t) = c_1 t. \quad (1.133)$$

Запишем форму решения для величины x_4 (рис. 1.28), учитывая автоколебания, в виде

$$x_4 = x_4^0 + c_4 t + x_4^*, \quad (1.134)$$

где $x_4^0 = \text{const}$, $c_4 = \text{const}$, x_4^* — периодическая составляющая. Отсюда имеем производную

$$p x_4 = c_4 + p x_4^*.$$

Поэтому, согласно (1.116), для переменной x_3 решение будет иметь вид ¹⁾

$$x_3 = x_3^0 + x_3^*, \quad \text{причем} \quad x_3^0 = \frac{c_4}{k_2}. \quad (1.135)$$

Отсюда следует, согласно (1.115), что и для переменной x будем иметь аналогичную форму решения (без составляющей, пропорциональной времени):

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где} \quad x^* = A \sin \Omega t. \quad (1.136)$$

¹⁾ Отсутствует составляющая, пропорциональная времени.

Далее, согласно (1.115), (1.116) и (1.134):

$$x_2 = x^0 + x^* + k_{o.c}(x_4^0 + c_4 t + x_1^*),$$

т. е. для x_2 нужно предположить форму решения в виде

$$x_2 = x_2^0 + c_2 t + x_2^*, \quad (1.137)$$

причем

$$x_2^0 = x^0 + k_{o.c}x_4^0, \quad c_2 = k_{o.c}c_4, \quad x_2^* = x^* + k_{o.c}x_4^*.$$

При отсутствии же жесткой дополнительной обратной связи ($k_{o.c} = 0$) переменная $x_2 = x = x^0 + x^*$ не будет содержать составляющей $c_2 t$ (астатическая система).

Формулы (1.135) и (1.136) показывают, что картина изменения переменных x и x_3 во времени имеет здесь тот же вид рис. 1.26, б, но уже при симметричной ($m=1$) релейной характеристике $x_3 = F(x)$, показанной на рис. 1.28. Следовательно, здесь сохраняются формулы гармонической линеаризации (1.104) и (1.123).

Учитывая форму изменения переменных (1.133) — (1.137), а также формулу (1.122), из заданных уравнений системы (1.114) — (1.116) получим для постоянных составляющих следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} T_1 c_2 + x_2^0 &= -k_1 x_4^0, & x_3^0 &= \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \\ x^0 &= x_2^0 - k_{o.c} x_4^0, & c_4 &= k_2 x_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.138)$$

Для составляющих, пропорциональных времени, на основании тех же уравнений получаем:

$$c_2 = k_1(c_1 - c_4), \quad 0 = c_2 - k_{o.c}c_4. \quad (1.139)$$

Для периодических составляющих получаем прежнюю систему (1.126). Если при этом учесть, что второе и последнее из уравнений (1.138) дают выражение

$$\frac{x^0}{A} = \sin \frac{\pi c_4}{2ck_2}, \quad (1.140)$$

совпадающее с (1.127) при замене $c_4 = -f_3^0$, то станет ясным, что здесь оказывается справедливым прежнее решение (1.129) и (1.130) с заменой f_3^0 на $-c_4$. Однако величина c_4 не задана. Ее предварительно надо определить из уравнений (1.139), а именно:

$$c_4 = \frac{k_1 c_1}{k_1 + k_{o.c}} \quad (1.141)$$

(при $k_{o.c} = 0$ было бы $c_4 = c_1$, как в обычной астатической системе).

Итак, получаем здесь решение

$$A = \frac{4ck_2T_1(T_2k_1 - T_1k_{0.c})}{\pi(T_1 + T_2)} \cos \frac{\pi k_1 c_1}{2ck_2(k_1 + k_{0.c})},$$

$$\Omega^2 = \frac{k_1 + k_{0.c}}{T_1(T_2k_1 - T_1k_{0.c})},$$

$$x^0 = \frac{2ck_2T_1(T_2k_1 - T_1k_{0.c})}{\pi(T_1 + T_2)} \sin \frac{\pi k_1 c_1}{ck_2(k_1 + k_{0.c})}.$$

Вытекающие отсюда зависимости амплитуды A автоколебаний переменной x и смещения x^0 от величины скорости c_1 изменения внешнего воздействия $f_1(t)$ показаны на рис. 1.30б. После этого постоянные составляющие всех остальных переменных и коэффициент c_2 при составляющей, пропорциональной времени для переменной x_2 , определяются из простых алгебраических соотношений (1.138) и (1.139), а амплитуды автоколебаний переменных x_4 и x_2 — по формулам (1.91).

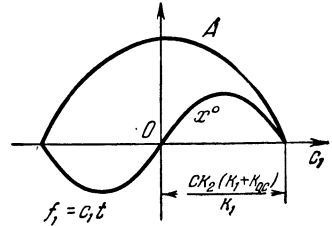


Рис. 1.30б.

Описанный случай $f_1 = c_1 t$ соответствует определению постоянной величины ошибки x^0 (или c_4 для переменной x_4) данной автоматической системы в режиме слежения с постоянной скоростью.

§ 1.7. Пример медленно меняющихся сигналов в автоколебательной системе

Пусть в рассмотренной выше автоматической системе (рис. 1.28) входное внешнее воздействие $f_1(t)$ изменяется по произвольному закону во времени, но сравнительно медленно, чтобы величины x_i^0 для воздействий между звеньями системы при этом можно было бы считать приблизительно постоянными внутри одного периода автоколебаний (рис. 1.31). В этом случае все внутренние переменные в системе будут иметь вид

$$x = x^0 + x^*, \quad x_2 = x_2^0 + x_2^*, \dots, \quad (1.142)$$

где $x^0(t)$ и $x_2^0(t)$ — медленно меняющиеся составляющие; x^* , x_2^* — колебательные составляющие, причем

$$x^* = A \sin \psi, \quad \Omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad (1.143)$$

где A и Ω , вообще говоря, тоже медленно меняются во времени вместе с изменением составляющей x^0 .

Полагая все медленно меняющиеся составляющие постоянными внутри периода автоколебаний, примем прежнюю форму гармонической линейизации (1.104), а именно:

$$[x_3]_{0;1} = [F(x)]_{0;1} = x_3^0 + qx^*, \quad (1.144)$$

где в соответствии с симметрией нелинейной характеристики (рис. 1.28) из (1.105) и (1.106) при $m=1$ имеем:

$$x_3^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \quad (1.145)$$

$$q = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}. \quad (1.146)$$

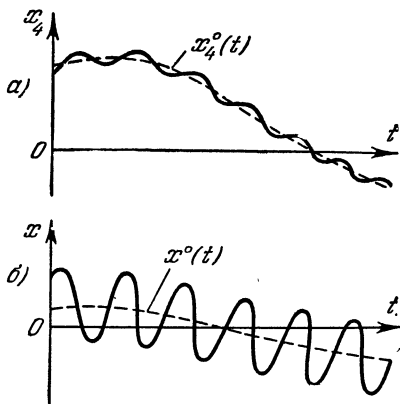


Рис. 1.31.

Подставив (1.142), (1.144) и (1.145) в заданные уравнения системы (1.114) — (1.116), запишем отдельно уравнения медленно меняющихся составляющих:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^0 &= k_1 [f_1(t) - x_4^0], \\ x_3^0 &= \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \quad x^0 = x_2^0 - k_{oc} x_4^0, \\ (T_2 p + 1) p x_4^0 &= k_2 x_3^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.147)$$

и уравнения для колебательных составляющих:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^* &= -k_1 x_4^*, \\ x_3^* &= q x^*, \quad x^* = x_2^* - k_{oc} x_4^*, \\ (T_2 p + 1) p x_4^* &= k_2 x_3^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.148)$$

где q , согласно (1.146), зависит не только от амплитуды A , но также и от величины медленно меняющейся составляющей x^0 . В свою очередь и в уравнениях (1.147) содержится тоже неизвестная A . Поэтому системы уравнений (1.147) и (1.148) не могут быть решены независимо друг от друга. Это является следствием несправедливости принципа суперпозиции для нелинейных систем.

Поступим следующим образом. Из уравнений (1.148) найдем амплитуду A и частоту Ω автоколебаний как функции медленно меняющейся составляющей x^0 (и параметров системы), а затем найденную зависимость $A(x^0)$ подставим в уравнения (1.147), из которых после этого и определяются все медленно меняющиеся составляющие как функции времени при заданной функции $f_1(t)$.

Поскольку уравнения (1.148) совпадают с (1.80), то здесь справедливы будут и уравнения (1.83), из которых находим частоту автоколебаний

$$\Omega^2 = \frac{k_1 + k_{0,c}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{0,c})} \quad (1.149)$$

и выражение для q в виде

$$q = \frac{T_1 + T_2}{T_1 k_2 (T_2 k_1 - T_1 k_{0,c})}. \quad (1.150)$$

Приравняв правые части уравнений (1.146) и (1.150), получим биквадратное уравнение для определения амплитуды A как функции от x^0 :

$$\left(\frac{A}{A_c}\right)^4 - \left(\frac{A}{A_c}\right)^2 + \left(\frac{x^0}{A_c}\right)^2 = 0, \quad (1.151)$$

где обозначено

$$A_c = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{0,c})}{\pi(T_1 + T_2)}. \quad (1.152)$$

Величина A_c представляет собой значение амплитуды A при $x^0 = 0$, как в (1.85).

Из (1.151) находим:

$$\left(\frac{A}{A_c}\right)^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x^0}{A_c}\right)^2} \quad (1.153)$$

(перед корнем пишем только знак плюс, так как именно он удовлетворяет условию $A = A_c$ при $x^0 = 0$).

Полученная зависимость (1.153) амплитуды автоколебаний A от величины медленно меняющейся составляющей x^0 изображена на рис. 1.32, а.

Подставив зависимость $A(x^0)$ из (1.153) в формулу (1.145), найдем¹⁾:

$$x_3^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{\frac{x^0}{A_c}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x^0}{A_c}\right)^2}}} = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A_c} \quad \left(x^0 \leq \frac{A_c}{2}\right), \quad (1.154)$$

¹⁾ Второе выражение в формуле (1.154) получается из первого подстановкой $\frac{2x^0}{A_c} = \sin \zeta$.

что и представлено графически на рис. 1.32, б. При сравнительно узком интервале изменения $|x^0| < \frac{A_c}{3}$ формулу (1.154) можно приближенно записать в линейном виде

$$x_3^0 = k_n x^0, \quad \text{где} \quad k_n = \frac{2c}{\pi A_c}, \quad (1.155)$$

причем величина A_c определяется через параметры системы по формуле (1.152).

Кривая (1.154) согласно рис. 1.32, б помещается между лучами $x_3^0 = \frac{2c}{\pi A_c} x^0$ и $x_3^0 = \frac{c}{A_c} x^0$. Поэтому при изменении x^0 в полном интервале $0 \leq |x^0| \leq \frac{A_c}{2}$ можно в первом приближении всю кривую (1.154) заменить средним лучом

$$x_3^0 = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{A_c} x^0,$$

т. е. можно взять следующее значение k_n :

$$k_n = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{A_c}. \quad (1.156)$$

Итак, получен очень интересный и важный вывод о том, что при наличии автоколебательных вибраций медленно меняющиеся сигналы в автоматической системе проходят так, как будто бы разрывная релейная характеристика (рис. 1.28) заменена на непрерывную характеристику (рис. 1.32, б) в интервале $-\frac{A_c}{2} \leq x^0 \leq \frac{A_c}{2}$. При $|x^0| > \frac{A_c}{2}$ автоколебания отсутствуют, реле включено в одну сторону и $|x_3^0| = c$.

Это явление называется *вибрационным сглаживанием* нелинейных характеристик при помощи автоколебаний. При сравнительно малых величинах медленно меняющейся составляющей x^0 эту характеристику можно считать линейной: (1.155) или (1.156). На достаточную малость величины x^0 в хороших автоматических системах можно вполне рассчитывать, так как x^0 представляет собой некоторое рассогласование (рис. 1.28). В результате вместо (1.147) все медленно протекающие процессы в рассмотренной релейной автоколебательной системе могут рассчитываться по обыкновенным чисто *линейным* уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^0 &= k_1 [f_1(t) - x_4^0], \\ x_3^0 &= k_n x^0, \quad x^0 = x_2^0 - k_{o.c.} x_4^0, \\ (T_2 p + 1) p x_4^0 &= k_2 x_3^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.157)$$

где эквивалентный коэффициент усиления нелинейного звена k_n для медленно меняющейся составляющей определяется формулами (1.155)

и (1.152) через все остальные параметры системы. При изменении x^0 в полном интервале (до $\frac{A_c}{2}$) можно взять значение k_n в виде (1.156). При $|x^0| > \frac{A_0}{2}$ явление вибрационного сглаживания перестает существовать.

Когда из уравнений (1.157) будет найдено решение $x^0(t)$, то, воспользовавшись зависимостью (1.153) (рис. 1.32, а), можно проследить также и изменение амплитуды автоколебаний, наложенных на этот процесс (рис. 1.31), с течением времени. При этом надо помнить, что формула (1.153) и рис. 1.32, а дают амплитуду колебаний A только для переменной x . Амплитуды колебаний остальных переменных определяются через найденную A с помощью соотношений (1.91).

Важно заметить, что автоколебательная составляющая x_4^* , наложенная на медленно меняющуюся составляющую x_4^0 (рис. 1.31, а), представляет собой периодическую ошибку системы. Поэтому параметры системы должны быть подобраны так, чтобы получаемая из (1.91) величина A_4 была как можно меньше (чтобы она практически не ощущалась в выходном сигнале системы x_4). В то же время амплитуда A колебаний величины x на выходе реле (рис. 1.31, б) должна быть достаточно большой, во всяком случае больше величины x^0 , чтобы переключения реле могли все время происходить.

Что же касается частоты автоколебаний Ω , то, согласно (1.149), в данной системе она не зависит от x^0 и будет оставаться все время постоянной.

Очевидно, что к уравнениям (1.157) для определения всех видов динамических ошибок автоматической системы в медленно протекающих процессах можно применять любые методы линейной теории автоматического регулирования как при анализе, так и при синтезе системы. Можно построить обычные линейные частотные характеристики для медленно протекающих процессов, в том числе и логарифмические, справедливые для тем большей области нижних частот, чем выше частота автоколебаний, ограничивающая эту область сверху.

§ 1.8. Пример оценки качества несимметричных колебательных переходных процессов

В предыдущем параграфе была получена возможность исследования медленно протекающих (по сравнению с периодом автоколебаний) динамических процессов, возникающих в нелинейной системе под влиянием внешних медленно меняющихся воздействий (управляющих или возмущающих). Очевидно, что та же самая методика может быть применена и для приближенного исследования переходных процессов в нелинейной автоматической системе при отсутствии внешних воздействий в случае, когда можно переходный процесс считать

состоящим из колебательной x^* и аperiodической x^0 составляющих (рис. 1.33):

$$x = x^0 + x^*, \dots, \quad x_4 = x_4^0 + x_4^*, \quad (1.158)$$

$$x^* = a \sin \psi, \quad \omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad (1.159)$$

причем $x^0(t)$, $a(t)$, $\omega(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, характеризующие переходный процесс в данной нелинейной системе. Ниже отдельно будет рассмотрен случай, когда $q(t)$ меняется быстро.

Форма решения (1.158) и (1.159), принятая здесь, совпадает с (1.142) и (1.143). Поэтому воспользуемся теми же результатами гармонической линеаризации (1.144) — (1.146). Рассматривая случай отсутствия внешних воздействий, подставим (1.158) в соответствующие уравнения динамики системы (1.68) — (1.70). Выделим из них уравнения для аperiodических составляющих:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^0 &= -k_1 x_4^0, \\ x_3^0 &= \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \quad x^0 = x_2^0 - k_{o.c} x_4^0, \\ (T_2 p + 1) p x_4^0 &= k_2 x_3^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.160)$$

и уравнения для колебательных составляющих:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^* &= -k_1 x_4^*, \\ x_3^* &= q x^*, \quad \dot{x}^* = x_2^* - k_{o.c} x_4^*, \\ (T_2 p + 1) p x_4^* &= k_2 x_3^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.161)$$

где

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}. \quad (1.162)$$

Последние полностью совпадают с прежними уравнениями (1.148), в то время как первые (1.160) отличаются от прежних (1.147) отсутствием внешнего воздействия $f_1(t)$. Поэтому здесь полностью сохраняют силу все прежние результаты (1.149) — (1.156) и рис. 1.32, причем аperiodические составляющие переходного процесса могут определяться в первом приближении по линейным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^0 &= -k_1 x_4^0, \\ x_3^0 &= k_n x^0, \quad x^0 = x_2^0 - k_{o.c} x_4^0, \\ (T_2 p + 1) p x_4^0 &= k_2 x_3^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.163)$$

где k_n — эквивалентный коэффициент усиления нелинейного звена для аperiodической составляющей:

$$k_n = \frac{2c}{\pi A_c}, \quad A_c = \frac{4c k_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}{\pi (T_1 + T_2)} \quad (1.164)$$

для интервала изменения $|x^0| \leq \frac{A_c}{3}$ или же

$$k_n = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{A_c} \quad (1.165)$$

для полного интервала изменения $|x^0| \leq \frac{A_c}{2}$. Если же $|x^0| > \frac{A_c}{2}$, то формулы теряют смысл, так как реле будет включено все время в одну сторону.

Итак, решая линейные уравнения (1.163), находим аperiodическую составляющую переходного процесса $x^0(t)$. Определив последнюю, по формуле (1.153) или по графику рис. 1.32, а, находим изменение амплитуды колебательной составляющей переходного процесса $a(t)$:

$$\left(\frac{a}{A_c} \right)^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x^0}{A_c} \right)^2}.$$

Что же касается частоты колебательной составляющей, то, согласно (1.149), она в переходном процессе для данного примера остается постоянной. Она зависит только от параметров системы и имеет то же самое значение, что и для автоколебательного режима.

Отсюда видно, что проделанный расчет переходного процесса имеет смысл только для такой области параметров системы, в которой автоколебательный режим существует. Следовательно, это исследование применимо к переходным процессам, в результате которых устанавливаются автоколебания (процесс установления автоколебаний). При этом для обеспечения переключений реле переменная x должна обязательно менять знак в процессе колебаний (рис. 1.33, а). Другие же переменные в это время могут изменяться в режиме *скользящего* процесса.

Скользящим процессом называется такой переходный процесс, когда основная его составляющая изменяется монотонно, как, например, $x_4^0(t)$ на рис. 1.33, но на нее накладываются вибрации с малой амплитудой, происходящие от работы реле в вибрационном режиме¹⁾.

¹⁾ Обычно при решении задачи о скользящем процессе другими методами, чем развиваемый здесь, частоту вибраций считают бесконечной и сами вибрации не исследуют.

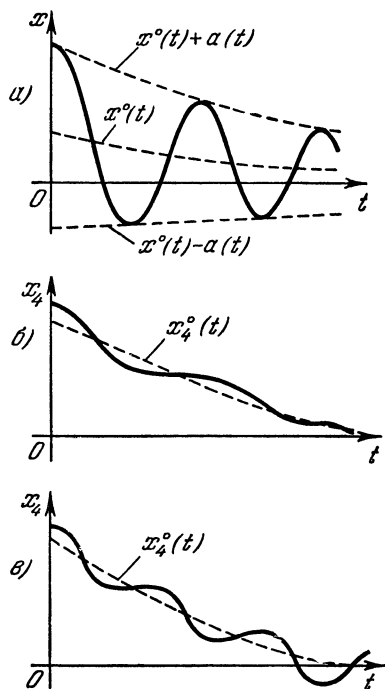


Рис. 1.33.

В данном случае такой скользящий процесс может иметь место для выходной переменной x_k рассматриваемой системы как вне области автоколебаний (рис. 1.33, б), так и в области существования автоколебаний (рис. 1.33, в), когда в результате скользящего процесса для переменной x_k устанавливаются автоколебания с малой амплитудой. Следовательно, проделанное в данном параграфе выше исследование справедливо только для второго из этих случаев.

Впоследствии (глава VII) будет показано, что такую же методику в других системах удастся применить и при отсутствии автоколебаний.

Для исследования несимметричных колебательных переходных процессов при отсутствии автоколебаний в данном примере необходимо использовать методику § 1.5. Она же применяется и для области существования автоколебаний при исследовании переходных процессов с быстро меняющейся амплитудой, когда в формуле (1.159) нельзя считать $a(t)$ медленно меняющейся функцией времени, а надо прибегать к выражению (1.94):

$$\frac{da}{dt} = a\xi(a), \quad (1.166)$$

в котором показатель затухания ξ является медленно меняющейся функцией времени. Величина амплитуды a при больших значениях ξ будет меняться быстро, а при малом ξ — медленно. Рассмотрим оба варианта для случаев наличия и отсутствия автоколебаний.

Вводя медленно меняющуюся аperiodическую составляющую переходного процесса, будем пользоваться выражением (1.166) совместно с (1.158) и (1.159) в отличие от прежнего (1.93). Уравнения для колебательных составляющих (1.161) здесь совпадают с прежними (1.95), которые уже решались выше, но теперь надо ввести новое выражение (1.162) для q . Поэтому, воспользовавшись характеристическим уравнением (1.96) и подставив в него по методике § 1.5 $p = \xi + j\omega$, придем к тем же выражениям (1.98) для X и Y .

Из второго уравнения (1.98) с учетом (1.162) находим:

$$\omega^2 = 3\xi^2 + 2 \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \xi + \frac{1}{T_1 T_2} + \frac{4ck_2 k_{o.c}}{\pi T_2 a} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}, \quad (1.167)$$

а из первого уравнения (1.98)

$$\frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}} = \frac{4ck_2}{\pi f(\xi)} \left[k_1 - T_1 k_{o.c} \left(\frac{1}{T_2} + 2\xi \right) \right], \quad (1.168)$$

где

$$f(\xi) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2 \left[1 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \right] \xi + 8(T_1 + T_2)\xi^2 + 8T_1 T_2 \xi^3. \quad (1.169)$$

Как видно из сравнения этих формул с формулами (1.99) — (1.101), прежние диаграммы затухания переходных процессов (рис. 1.24)

будут справедливы и здесь, если по оси ординат этих диаграмм отложить $\frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}}$ вместо a (рис. 1.34). Отсюда можно за-

ключить, что при наличии аperiodической составляющей в колебательном переходном процессе точка, соответствующая определенной амплитуде колебаний, будет лежать ниже. Согласно рис. 1.34 это

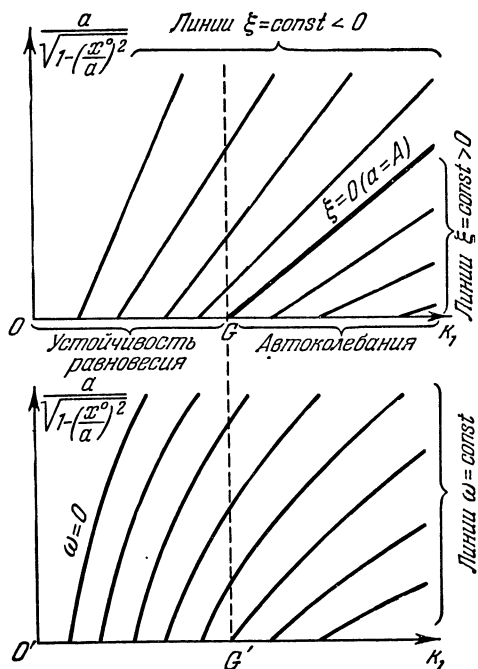


Рис. 1.34.

означает, что в области затухающих процессов ($\xi < 0$) величина ξ будет меньше, т. е. время затухания будет больше (затухание колебаний замедлится). В области же расходящихся процессов ($\xi > 0$) величина ξ будет больше, т. е. увеличение амплитуды будет быстрее (процесс установления автоколебаний ускорится).

Однако с приближением к автоколебательному режиму (т. е. к линии $\xi = 0$) величина отношения $\frac{x^0}{a}$ будет уменьшаться, стремясь к нулю, так как сами автоколебания в данной системе симметричны. Поэтому процесс установления автоколебаний вблизи них останется прежним и будет описываться выражением (1.102).

Для исследования переходных процессов *вне области автоколебаний* при небольших значениях показателя затухания ξ из (1.169) имеем:

$$f(\xi) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2 \left[1 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \right] \xi, \quad (1.170)$$

вследствие чего при наличии аperiodической составляющей x^0 в переходном процессе из (1.168) получаем выражение для показателя затухания ξ в явном виде

$$\xi = - \frac{T_1 + T_2}{2T_1 T_2} \frac{a + E \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}}{Ha + D \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2}}, \quad (1.171)$$

где

$$E = \frac{4ck_2 T_1 (T_1 k_{0.c} - T_2 k_1)}{\pi (T_1 + T_2)},$$

$$H = 1 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2}, \quad D = \frac{4c}{\pi} k_2 k_{0.c} T_1.$$

Таким образом, ориентировочно может быть оценено влияние аperiodической составляющей в переходном процессе на быстроту затухания колебаний как в случае преобладания колебательной составляющей, так и в скользящем режиме, а также и на быстроту установления автоколебаний. Данный расчет не преследует цели построения кривой переходного процесса при данных параметрах системы; для этого существуют другие методы. Цель состоит здесь в исследовании влияния различных параметров системы в широкой области их изменения (рис. 1.34 отражает, в частности, изменение параметра k_1). Это необходимо для предварительного выбора желательных значений параметров, после чего для выбранных числовых значений параметров (или для выбранной узкой области их изменения) могут быть найдены точные кривые протекания процессов во времени численно-графическими или машинными методами.

Широта областей изменения параметров системы при различных ее структурных построениях, которые могут быть обследованы с точки зрения качества переходных процессов, определяется, конечно, выполнением предположений о характере решений, положенных в основу данного метода исследования.

§ 1.9. Пример определения одночастотных вынужденных колебаний

До сих пор все внешние воздействия на автоматическую систему считались медленно меняющимися. Теперь предположим, что частота изменения внешнего воздействия не настолько мала, чтобы его можно было считать медленно меняющимся, т. е. предположим, что частота

внешнего воздействия имеет тот же порядок, что и собственная частота автоколебаний системы, или выше ее.

Пусть внешнее воздействие $f_1(t)$ на автоматическую систему (рис. 1.28) изменяется по синусоидальному закону

$$f_1 = B \sin \Omega_b t. \quad (1.172)$$

Вообще говоря, вынужденные колебания нелинейной системы могут иметь при этом весьма сложную форму. Однако возможны и случаи простых форм вынужденных колебаний.

Будем искать вынужденные колебания для переменной x (рис. 1.28) как первое приближение в синусоидальном виде

$$x = A_b \sin (\Omega_b t + \varphi) \quad (1.173)$$

с заданной частотой внешнего воздействия Ω_b . Неизвестными являются амплитуда A_b и сдвиг фазы φ . Это эквивалентно построению частотных характеристик замкнутой нелинейной системы.

Переменная x_3 будет иметь прямоугольную форму (рис. 1.16), а переменные x_4 , x_2 , x — в первом приближении — синусоидальную форму, если выполняется условие (1.88) непропускания высших гармоник звеном Z (рис. 1.28). При этом здесь остаются справедливыми формулы гармонической линеаризации (1.78) и (1.79), причем, вычисляя q , надо считать согласно (1.173), что $\psi = \Omega_b t + \varphi$.

Предположение (1.173) о колебаниях системы с частотой внешнего воздействия Ω_b для случая автоколебательных систем справедливо не всегда, а только при определенных условиях, когда автоколебания «срываются» и система целиком переходит на колебания с внешней частотой Ω_b (условие захватывания, иначе называемое принудительной синхронизацией). Такие условия тоже подлежат определению.

Чтобы решать задачу тем же приемом, что и при отыскании автоколебаний (§ 1.3), выразим величину $f_1(t)$ через x , пользуясь формулами (1.172) и (1.173). Для этого запишем:

$$\begin{aligned} f_1 &= B \sin \Omega_b t = B \sin [(\Omega_b t + \varphi) - \varphi] = \\ &= B \cos \varphi \sin (\Omega_b t + \varphi) - B \sin \varphi \cos (\Omega_b t + \varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что, согласно (1.173):

$$\sin (\Omega_b t + \varphi) = \frac{x}{A_b}, \quad \cos (\Omega_b t + \varphi) = \frac{px}{A_b \Omega_b},$$

получим окончательно выражение для $f_1(t)$ в виде

$$f_1 = \left(\frac{B \cos \varphi}{A_b} - \frac{B \sin \varphi}{A_b \Omega_b} p \right) x. \quad (1.174)$$

Тогда заданные уравнения нашей системы (1.114) — (1.116) с учетом (1.78) и (1.174) примут вид

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= k_1 x_1, & x_1 &= \left(\frac{B \cos \varphi}{A_B} - \frac{B \sin \varphi}{A_B \Omega_B} p \right) x - x_4, \\ x_3 &= q x, & x &= x_2 - k_{o.c} x_4, \\ (T_2 p + 1) p x_4 &= k_2 x_3, \end{aligned} \right\} \quad (1.175)$$

где

$$q = \frac{4c}{\pi A_B}.$$

Таким образом, задача определения вынужденных колебаний при условии захватывания сводится к решению однородной системы, как и при автоколебаниях, но с внесением в нее искусственной дополнительной связи (x во втором уравнении). Метод решения будет совершенно тем же, что и в § 1.3, но результат из-за указанного дополнения получится, конечно, другим. Кроме того, отличие состоит так же в том, что в § 1.3 неизвестными были A и Ω , в то время как здесь неизвестны A_B и φ (частота Ω_B задана).

Характеристическое уравнение для системы (1.175) имеет вид

$$\begin{aligned} T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q &= \\ = k_1 \left(\frac{B \cos \varphi}{A_B} - \frac{B \sin \varphi}{A_B \Omega_B} p \right) (T_2 p + 1) p \end{aligned} \quad (1.176)$$

(оно отличается от прежнего (1.81) добавочным выражением справа вместо нуля).

Для отыскания синусоидального периодического решения с заданной частотой Ω_B подставляем в характеристическое уравнение (1.176) $p = j\Omega_B$ и выделяем вещественную и мнимую части:

$$X = (k_1 + k_{o.c}) k_2 q - (T_1 + T_2) \Omega_B^2 = - \frac{k_1 B \Omega_B}{A_B} (T_2 \Omega_B \cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$Y = (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) \Omega_B - T_1 T_2 \Omega_B^3 = \frac{k_1 B \Omega_B}{A_B} (T_2 \Omega_B \sin \varphi + \cos \varphi).$$

Разрешив эти два выражения относительно $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, с учетом (1.79) получим два уравнения для определения A_B и φ :

$$- \pi k_1 B \cos \varphi = E - \pi A_B, \quad \pi k_1 B \sin \varphi = H - D \pi A_B, \quad (1.177)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \frac{4ck_2(T_2k_1 + T_2k_{o.c} - T_1k_{o.c})}{T_2^2\Omega_B^2 + 1}, & H &= \frac{4ck_2(k_1 + k_{o.c} + T_1T_2k_{o.c}\Omega_B^2)}{\Omega_B(T_2^2\Omega_B^2 + 1)}, \\ D &= T_1\Omega_B. \end{aligned}$$

Возводя оба уравнения (1.177) в квадрат и складывая их почленно, получим квадратное уравнение

$$(1 + D^2) \pi^2 A_B^2 - 2(E + HD) \pi A_B + E^2 + H^2 - \pi^2 k_1^2 B^2 = 0,$$

откуда находим амплитуду вынужденных колебаний

$$A_B = \frac{E + HD \pm \sqrt{(E + HD)^2 - (1 + D^2)(E^2 + H^2 - \pi^2 k_1^2 B^2)}}{\pi(1 + D^2)}. \quad (1.178)$$

После этого, поделив второе из уравнений (1.177) на первое, найдем сдвиг фазы

$$\varphi = -\arctg \frac{H - D\pi A_B}{E - \pi A_B}. \quad (1.179)$$

Амплитуда A_B по своему смыслу есть вещественная положительная величина. Поэтому будем считать, что искомое решение для вынужденных колебаний в форме (1.173) существует (т. е., другими словами, явление захватывания имеет место) в том случае, если формула (1.178) дает, по крайней мере, один вещественный положительный ответ для A_B . На основании этого, учитывая, что $E + HD > 0$ при положительных параметрах системы, получаем условие захватывания:

$$(E + HD)^2 \geq (1 + D^2)(E^2 + H^2 - \pi^2 k_1^2 B^2). \quad (1.180)$$

На основании формулы (1.178) можно построить графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний A_B от частоты Ω_B при разных амплитудах внешнего воздействия B , а также выяснить влияние различных параметров системы на величину амплитуды вынужденных колебаний при выполнении условия захватывания (1.180). Это условие можно записать в виде

$$\pi^2 k_1^2 B^2 \geq \frac{(H - ED)^2}{1 + D^2}. \quad (1.181)$$

Отсюда видно, что захватывание происходит (т. е. данная нелинейная система переходит на одночастотные вынужденные колебания с заданной извне частотой Ω_B) только в том случае, если амплитуда B внешнего периодического воздействия превосходит некоторое пороговое значение, определяемое формулой (1.181). Этот порог захватывания зависит от соотношения параметров системы и от величины задаваемой извне частоты Ω_B , так как через них вычисляются фигурирующие здесь величины E , H и D .

Аналогично можно рассчитать и вынужденные колебания данной нелинейной системы при синусоидальном изменении нагрузки $f_3(t)$ (рис. 1.29).

Перейдем теперь к другой задаче. В § 1.7 было показано, что при помощи автоколебаний можно произвести *вибрационное сглаживание* разрывных нелинейных характеристик, и в частности релейных. То же самое можно сделать и с помощью вынужденных колебаний, подав на вход реле (рис. 1.35) внешнее воздействие $f_3(t)$ достаточно высокой частоты Ω_B и обеспечив для нее условия захватывания. Теперь будем считать, следовательно, что

$$f_3 = B \sin \Omega_B t. \quad (1.182)$$

Пусть входное управляющее воздействие $f_1(t)$ будет медленно меняющимся, как в § 1.7. При этом возникает медленно меняющаяся составляющая во всех звеньях. Поэтому решение, например, для переменной x будет иметь вид

$$x = x^0 + qx^*, \quad x^* = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi), \quad (1.183)$$

Гармоническая линеаризация нелинейности приводит к прежним формулам (1.144)—(1.146). Поэтому здесь аналогично (1.147) и (1.148)

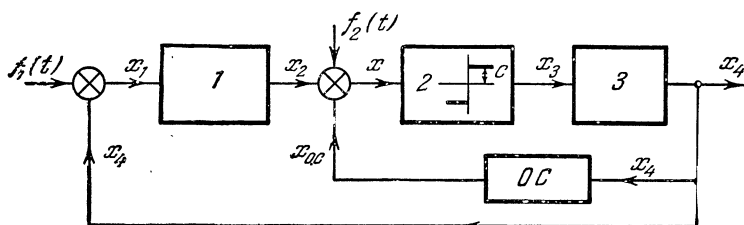


Рис. 1.35.

можно записать уравнения для медленно меняющихся составляющих:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^0 &= k_1 [f_1(t) - x_4^0], \\ x_3^0 &= \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A_B}, \quad x^0 = x_2^0 - k_{o.c} x_4^0, \\ (T_2 p + 1) p x_4^0 &= k_2 x_3^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.184)$$

и для колебательных составляющих (с учетом нового воздействия $f_2(t)$):

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^* &= -k_1 x^*, \\ x_3^* &= q x^*, \quad x^* = x_2^* - k_{o.c} x_4^* + f_2(t), \\ (T_2 p + 1) p x_4^* &= k_2 x_3^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.185)$$

где q определяется формулой (1.146), а именно:

$$q = \frac{4c}{\pi A_B} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A_B}\right)^2}. \quad (1.186)$$

Согласно формуле (1.174) в уравнения (1.185) нужно подставить

$$f_2 = \left(\frac{B \cos \varphi}{A_B} - \frac{B \sin \varphi}{A_B \Omega_B} p \right) x^*. \quad (1.187)$$

Уравнение для колебательных составляющих (1.185) можно было бы решать далее тем же методом, как решались уравнения (1.175). Правда, результат был бы иной, так как здесь иначе входит внешнее периодическое воздействие и имеется другое выражение для q . Однако здесь будет приведено упрощенное решение.

Будем иметь в виду, что воздействие $f_2(t)$ в схеме рис. 1.35 вводится исключительно только для создания вибрационной работы реле (рис. 1.31, б) и что параметры линейного звена 3 (рис. 1.35) таковы, что при заданной частоте Ω_B амплитуда вынужденных колебаний x_4 на выходе системы очень мала (рис. 1.31, а). Если при этом считать и амплитуды периодических составляющих переменных x_2 и $x_{o.c}$ (рис. 1.35) очень малыми, то уравнения (1.185) с учетом (1.182) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^* &= -k_1 x_4^*, \\ x_3^* &= q x^*, \quad x^* = f_2(t) = B \sin \Omega_B t, \\ (T_2 p + 1) p x_4^* &= k_2 x_3^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.188)$$

причем, согласно (1.183), отсюда сразу находим:

$$A_B = B, \quad \varphi = 0 \quad (1.189)$$

и, согласно (1.186):

$$q = \frac{4c}{\pi B} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{B}\right)^2}, \quad (1.190)$$

где величина B задана как амплитуда внешнего периодического воздействия $f_2(t)$. Следовательно, коэффициент q зависит только от x^0 и для каждого конкретного значения x^0 вынужденные колебания любой переменной вычисляются по чисто линейным уравнениям с постоянными коэффициентами (1.188). В частности, амплитуда вынужденных колебаний x_4 на выходе системы будет

$$A_4 = \frac{k_2 q B}{\Omega_B \sqrt{T_2^2 \Omega_B^2 + 1}} = \frac{4c k_2}{\pi \Omega_B} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{x^0}{B}\right)^2}{T_2^2 \Omega_B^2 + 1}}. \quad (1.191)$$

Подбором частоты Ω_B и входящих сюда других параметров надо обеспечить малость A_4 , в то время как B должно быть больше максимально возможной в данной системе величины медленно меняющегося рассогласования x^0 .

Малость амплитуд переменных x_2 и $x_{o.c}$ проверяется по формулам:

$$A_2 = \frac{k_1 A_4}{\sqrt{T_1^2 \Omega_B^2 + 1}}, \quad A_{o.c} = k_{o.c} A_4. \quad (1.192)$$

Выбором достаточно высокой частоты Ω_B всегда можно обеспечить малость A_4 , A_2 и $A_{o.c}$. Если бы они оказались не малыми по сравнению с B , то нужно было бы решать полную систему уравнений (1.184)—(1.187).

Далее, согласно второй из формул (1.184) с учетом (1.189), имеем:

$$x_2^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{B}. \quad (1.193)$$

Это дает сглаженную характеристику реле, показанную на рис. 1.36, а. В определенном интервале изменения рассогласования x^0 (даже в интервале $0 < |x^0| < 0,7B$) зависимость (1.193) можно заменить линейной:

$$x_3^0 = k_n x^0, \text{ где } k_n = \frac{2c}{\pi B}. \quad (1.194)$$

При изменении же x^0 в полном диапазоне до $|x^0| = B$ можно было бы применить значение k_n , аналогичное (1.156).

Ввиду достаточной произвольности задания амплитуды B в данном случае (рис. 1.36, а) зону сглаживания можно сделать шире, чем в случае автоколебаний (рис. 1.32, б), где она целиком определяется только соотношением параметров системы.

Итак, все медленно протекающие процессы в системе, связанные с воспроизведением $f_1(t)$, а также переходные процессы для медленно меняющихся составляющих могут теперь рассчитываться по уравнениям (1.184), которые для определенного интервала x^0 , согласно (1.194), являются линейными.

Для того чтобы вся зона сглаживания была линейной, в качестве воздействия $f_2(t)$ подают

пилообразные колебания (рис. 1.36, б). При наличии смещения x^0 из подобия треугольников (рис. 1.36, б) находим:

$$\gamma = \frac{\pi x^0}{2B}.$$

Поэтому средняя составляющая на выходе реле x_3^0 , согласно рис. 1.36, в, будет

$$x_3^0 = \frac{c(\pi + 2\gamma) - c(\pi - 2\gamma)}{2\pi} = \frac{2\gamma c}{\pi},$$

или

$$x_3^0 = k_n x^0, \text{ где } k_n = \frac{c}{B}. \quad (1.195)$$

Соответствующая сглаженная характеристика показана на рис. 1.36, г. Но не надо забывать, что такая линейная сглаженная характеристика

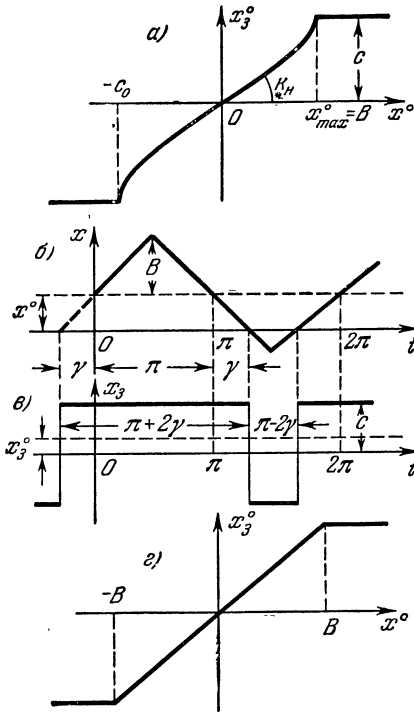


Рис. 1.36.

получится только в том случае, если амплитуды вынужденных вибраций переменных x_2 и $x_{0,c}$ очень малы по сравнению с B , ибо вынужденные вибрации этих переменных, происходящие с частотой пилообразных колебаний, складываясь с ними, согласно рис. 1.35, будут искривлять пилообразную форму колебаний на входе реле и менять их амплитуду, а следовательно, будут искажать линейную зависимость на рис. 1.36, г.

В заключение главы надо сказать, что в ней рассмотрены лишь элементарные примеры и, конечно, далеко не все типы задач, которые будут дальше решаться методом гармонической линеаризации. Но можно надеяться, что читатель получит здесь начальное представление об идеях и возможностях метода, которое позволит сознательно подходить при применении этого метода и к более сложным задачам.

Г Л А В А II

ОСНОВЫ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ И СРАВНЕНИЕ ЕГО С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

§ 2.1. Гармоническая линеаризация нелинейностей при симметричных колебаниях

В главе I на простейших примерах была показана основная идея метода гармонической линеаризации и проиллюстрированы возможности метода при исследовании нелинейных автоматических систем и при выборе основных параметров таких систем. В настоящей главе дается систематическое изложение вопроса в общем виде, а далее будут показаны различные особенности практического применения метода на многочисленных конкретных задачах и примерах.

Все реальные технические устройства, строго говоря, не обладают идеально прямолинейными статическими характеристиками при любых значениях входной величины. Большинство реальных статических характеристик искривляется при достаточно больших значениях входной величины (насыщение, ограничение и пр.). Ряд статических характеристик обладает существенной нелинейностью при малых значениях входной величины (нечувствительность, зазор, гистерезис и т. п.), но может считаться линейным для некоторого среднего диапазона значений входной величины (когда нечувствительность, зазор или гистерезис влияют слабо). О типичных нелинейностях в автоматических системах уже говорилось в начале главы I.

В технических расчетах ввиду невозможности точного учета всех явлений всегда создают некоторое идеализированное математическое описание исследуемой системы с помощью уравнений, чтобы, сохранив ее главные существенные черты, получить наиболее простую расчетную методику. Наиболее просто и наиболее изучены линейные уравнения. Поэтому вполне естественным является стремление тем или иным способом линеаризовать все реальные нелинейные характеристики, т. е. заменить их так или иначе прямой линией, которую проводят обычно по касательной к кривой в средней ее точке (прямая OD на рис. 2.1).

Этот способ линеаризации аналитически соответствует разложению нелинейной функции $y = F(x)$ в ряд Тейлора с отбрасыванием всех высших членов ряда, кроме первого, т. е. здесь производится замена

$$y = kx, \text{ где } k = \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=0}. \quad (2.1)$$

Геометрически k есть крутизна кривой в точке O (тангенс угла наклона). Следовательно, при достаточно малых отклонениях x от

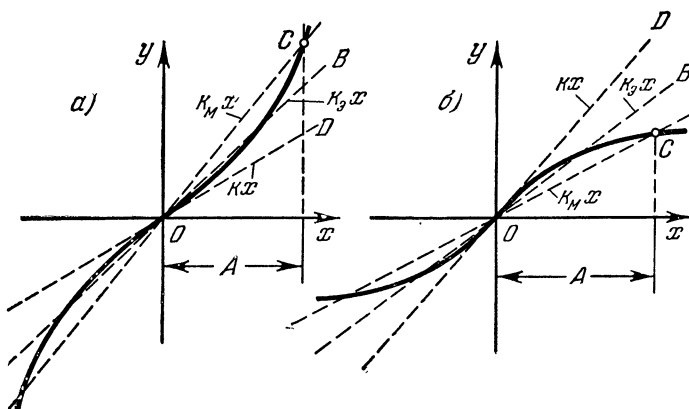


Рис. 2.1.

точки O данное звено системы будет вести себя как линейное с коэффициентом усиления k . Этот способ линеаризации принят во всей линейной теории устойчивости (так называемое исследование устойчивости по первому линейному приближению при малых отклонениях) и в линейной теории автоматического регулирования.

Иногда вместо касательной (2.1) приходится применять для линеаризации секущую, придавая ей определенный постоянный наклон k (рис. 2.2).

Такой общепринятый способ линеаризации (2.1) с помощью ряда Тейлора по касательной kx (рис. 2.1) или секущей kx (рис. 2.2), когда кривая заменяется прямой с постоянным наклоном, не зависящим от формы и размера входной переменной x (на определенном достаточно малом интервале), будем называть *обычной линеаризацией*.

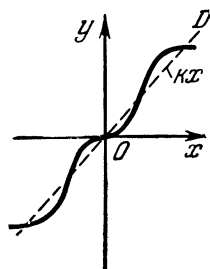


Рис. 2.2.

Пусть теперь переменная x изменилась так, что это соответствует на реальной характеристике $y = F(x)$ некоторой точке C (рис. 2.1), где отклонение от линейной зависимости существенно.

Если при этом переменная x изменилась от 0 до данного значения $x = A$ скачком (рис. 2.3, а), то вид кривой $y = F(x)$ не играет

роли. Эквивалентная линейная зависимость, которая при данном мгновенном скачке $x = A$ дала бы такое же значение $y = F(A)$, будет

$$y = k_m x, \quad \text{где} \quad k_m = \frac{F(A)}{A}, \quad (2.2)$$

т. е. k_m равен тангенсу угла наклона прямой OC (рис. 2.1).

Если же переменная x от 0 до точки C изменяется по какому-нибудь заданному закону во времени $x(t)$, то процесс изменения переменной $y = F(x)$ во времени, очевидно, будет более близок к

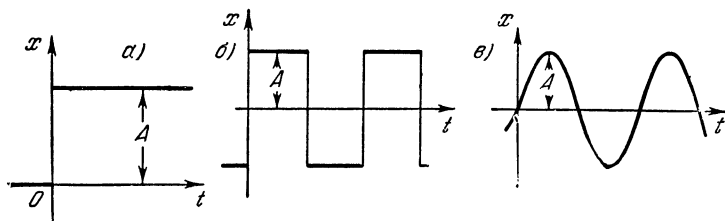


Рис. 2.3.

процессу в таком линейном звене, которое имеет некоторый промежуточный между k и k_m коэффициент усиления:

$$y = k_s x, \quad (2.3)$$

где k_s — тангенс угла наклона некоторой промежуточной секущей OB (рис. 2.1), причем

$$k < k_s < k_m \quad \text{или} \quad k_m < k_s < k \quad (2.4)$$

соответственно для характеристик с возрастающей (рис. 2.1, а) и убывающей (рис. 2.1, б) крутизной.

Численное значение эквивалентного коэффициента усиления k_s для каждого положения точки C при заданном законе $x(t)$ можно определить, если будет задано условие эквивалентности: равенство площадей под кривой $y(t)$ при нелинейной и линейной зависимостях y от x , или равенство энергии, или др.

Приведем два примера эквивалентной линеаризации нелинейности при периодическом изменении переменной x .

При изменении x в виде прямоугольной периодической кривой с амплитудой A (рис. 2.3, б), соответствующей точке C (рис. 2.1), переменная $y = F(x)$ тоже получит форму прямоугольных периодических колебаний с амплитудой $F(A)$. Точно такие же колебания получаются и при линейной зависимости y от x с коэффициентом усиления k_m , определяемым формулой (2.2). Например, если нелинейная характеристика $y = F(x)$ на рис. 2.1 описывается уравнением

$$y = k_1 x + k_2 x^3, \quad (2.5)$$

то эквивалентный коэффициент усиления для прямоугольных колебаний входной переменной x будет

$$k_m = \frac{F(A)}{A} = k_1 + k_2 A^2 \quad (2.6)$$

и эквивалентная линеаризация нелинейности примет вид

$$y = k_m x = (k_1 + k_2 A^2) x.$$

Эквивалентный коэффициент усиления k_m зависит от величины амплитуды входных колебаний, т. е. он принимает различные постоянные значения для прямоугольных периодических воздействий с разными амплитудами.

Такой способ линеаризации (2.2) нелинейных характеристик $F(x)$ будем называть *прямоугольной линеаризацией*.

Пусть теперь переменная x изменяется по закону синусоидальных колебаний (рис. 2.3, в):

$$x = A \sin \Omega t. \quad (2.7)$$

Для переменной $y = F(x)$, согласно рис. 2.1, получаются периодические колебания сложной формы. Если бы рассматривалась линейная зависимость y от x , то получились бы синусоидальные колебания

$$y = A_n \sin \Omega t. \quad (2.8)$$

Примем следующее условие эквивалентной линеаризации. Подберем эквивалентный коэффициент усиления

$$k_0 = \frac{A_n}{A} \quad (2.9)$$

так, чтобы колебания переменной y при линейной зависимости (2.8) точно соответствовали первой гармонике сложных нелинейных колебаний переменной $y = F(x)$ при синусоидальном изменении x (предполагается, что первая гармоника играет основную роль).

Форма периодических нелинейных колебаний $y = F(x)$ при $x = A \sin \Omega t$ определяется выражением $F(A \sin \Omega t)$. Ее первая гармоника определяется разложением этой периодической функции в ряд Фурье. Ввиду нечетности характеристики (рис. 2.1) здесь членов с косинусами не будет, и первая гармоника будет иметь вид

$$y_1 = A_F \sin \Omega, \quad (2.10)$$

где

$$A_F = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (\psi = \Omega t).$$

Принятое условие эквивалентной линеаризации $A_n = A_F$ приводит, согласно (2.9), к следующему эквивалентному коэффициенту усиления:

$$k_0 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.11)$$

Например, если нелинейная характеристика (рис. 2.1, а) имеет вид (2.5), то формула (2.11) дает

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{k_1}{\pi A} \int_0^{2\pi} A \sin^2 \psi d\psi + \frac{k_2}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \psi d\psi = \\ &= k_1 + \frac{3}{4} k_2 A^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Следовательно, результат линеаризации будет

$$y = k_3 x = \left(k_1 + \frac{3}{4} k_2 A^2 \right) x.$$

Это значит, что первая гармоника сложных нелинейных колебаний $y = F(x)$ при $x = A \sin \Omega t$ будет

$$y_1 = \left(k_1 + \frac{3}{4} k_2 A^2 \right) A \sin \Omega t.$$

Такой способ линеаризации (2.11), когда обеспечивается равенство амплитуды колебаний, получающихся для линейной зависимости y от x , и амплитуды первой гармоники нелинейных колебаний $y = F(x)$ при $x = A \sin \Omega t$, будем называть *гармонической линеаризацией*.

Здесь, как и в предыдущем случае (2.6), эквивалентный коэффициент усиления зависит от амплитуды колебаний переменной x , т. е.

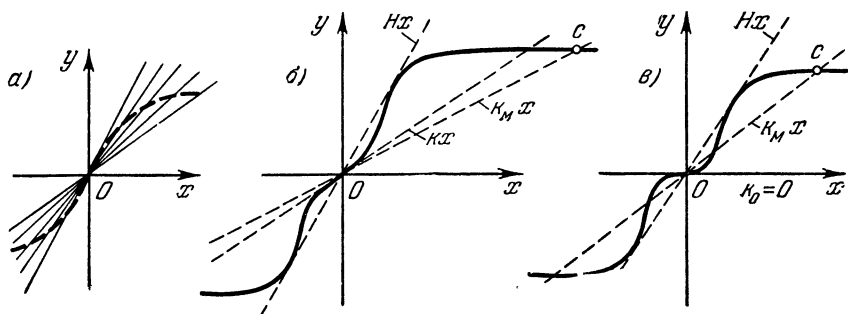


Рис. 2.4.

он принимает различные постоянные значения для синусоидальных колебаний переменной x с различными амплитудами A .

Это принципиальное отличие гармонической линеаризации (как и прямоугольной) от обычного способа линеаризации (2.1) делает ее чрезвычайно ценным средством для исследования динамических процессов в нелинейных автоматических системах, так как она позволяет описывать некоторые специфические нелинейные явления, чего не может дать обычная линеаризация.

По сути дела, здесь нелинейная характеристика заменяется не одной прямой, а пучком прямых (рис. 2.4, а), наклон которых зависит

от амплитуды колебаний переменной x , т. е. от размера «рабочего» участка кривой $F(x)$, охватываемого в процессе колебаний. Для каждого данного периодического процесса (т. е. при данной A) эквивалентная характеристика линейна ($k_s = \text{const}$), но от процесса к процессу (для разных A) наклон прямой меняется, т. е. после гармонической линеаризации (как и прямоугольной) нелинейные свойства все же в известном смысле сохраняются.

Заметим, что для нелинейной характеристики (2.5) обычная линеаризация согласно формуле (2.1) дает

$$k = (k_1 + 3k_2 x^2)_{x=0} = k_1. \quad (2.13)$$

Сравнивая это с (2.6) и (2.12), видим, что найденное при гармонической линеаризации значение k_s (2.12) действительно удовлетворяет неравенству (2.4). Для более сложных очертаний нелинейных характеристик (рис. 2.4, б, в) неравенство (2.4) заменяется следующим:

$$0 < k_s < H, \quad (2.14)$$

причем соотношения между k_s , k_m и k могут быть самыми различными.

В дальнейшем будет широко использоваться именно гармоническая линеаризация с различными добавлениями и усовершенствованиями. Она лучше всего соответствует существу задачи исследования нелинейных автоматических систем, хотя, вообще говоря, в зависимости от принятия того или иного условия эквивалентной линеаризации и от формы изменения x во времени (например, для экспоненты и др.) можно ввести и другие виды линеаризации с иными значениями эквивалентного коэффициента усиления k_s для одной и той же нелинейной характеристики. Условимся для гармонической линеаризации применять специальное обозначение эквивалентного коэффициента усиления $k_s = q$, называя его *гармоническим коэффициентом усиления* для данной нелинейности.

Как уже было показано, для *однозначных нечетных нелинейностей* $F(x)$ (рис. 1.4, а—д, рис. 1.5, а также релейные и другие однозначные характеристики; см. § 1.1) при симметричных колебаниях ($x = A \sin \Omega t$), согласно (2.11), гармонический коэффициент усиления будет

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad (2.15)$$

причем по причине однозначности и симметрии вычисление можно производить по формуле

$$q = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi. \quad (2.16)$$

Результат гармонической линеаризации однозначной нелинейности $y = F(x)$ будет

$$y = qx, \quad q = q(A), \quad (2.17)$$

что соответствует первой гармонике нелинейных колебаний $y_1 = q(A) A \sin \Omega t$.

В случае петлевой нечетно-симметричной нелинейности $y = F(x)$ (рис. 2.5, а также рис. 1.2, а и в и другие петлевые характеристики)

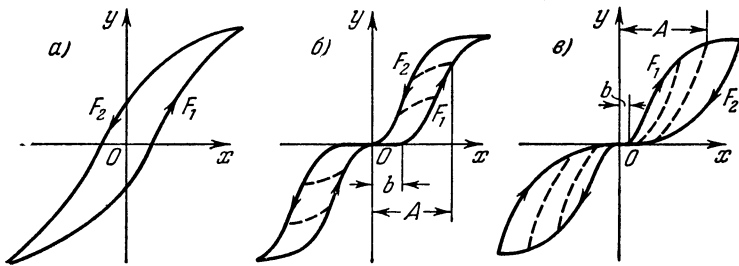


Рис. 2.5.

при симметричных колебаниях $x = A \sin \Omega t$ разложение периодической нелинейной функции в ряд Фурье даст, в отличие от (2.10), первую гармонику с двумя составляющими:

$$y_1 = A_F \sin \Omega t + B_F \cos \Omega t, \quad (2.18)$$

где

$$A_F = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad B_F = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

При $x = A \sin \Omega t$ имеем

$$px = A\Omega \cos \Omega t \quad \left(p = \frac{d}{dt} \right).$$

Поэтому принятое условие гармонической линеаризации, при котором эквивалентная линейная зависимость y от x должна давать синусоиду, равную первой гармонике нелинейных колебаний $y = F(x)$ при $x = A \sin \Omega t$, приводит, согласно (2.18), к следующему результату:

$$y = qx + \frac{q'}{\Omega} px, \quad q = q(A), \quad q' = q'(A), \quad (2.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

причем ввиду определенного характера симметрии вычисления здесь могут производиться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

а формулой (2.16) уже пользоваться нельзя.

Линеаризованная зависимость (2.19) теперь не сводится, как раньше, к одному гармоническому коэффициенту усиления $q(A)$, а включает в себя дополнительное слагаемое, зависящее от скорости изменения переменной x . Это явилось следствием того, что петлевая нелинейность $F(x)$ (рис. 2.5), строго говоря, содержит в себе зависимость от скорости px , точнее, от знака скорости, ибо при скорости $px > 0$ процесс идет по кривой F_1 , а при $px < 0$ — по кривой F_2 (рис. 2.5).

Заметим, что на рис. 2.5, *а* и *б* (как и на рис. 1.2, *а*) изображены *петли гистерезисного типа* (нелинейное запаздывание), а на рис. 2.5, *в* — *петля форсирующего типа* (нелинейное опережение). Соответственно при гармонической линеаризации в первом случае получается $q' < 0$, а во втором случае $q' > 0$, т. е. нелинейное запаздывание или опережение переводится в линейное, заключающееся во введении отрицательной или положительной производной (см. (2.19)).

Линеаризованное выражение (2.19) означает, что первая гармоника сложных нелинейных колебаний $y = F(x)$ при $x = A \sin \Omega t$ в данном случае будет

$$y_1 = C_1 A \sin(\Omega t + D_1), \quad (2.22)$$

где усиление амплитуды C_1 и сдвиг фазы D_1 будут:

$$C_1 = \sqrt{q^2 + (q')^2}, \quad D_1 = \arctg \frac{q'}{q}, \quad (2.23)$$

причем сдвиг фазы D_1 имеет тот же знак, что и q' (запаздывание или опережение первой гармоники колебаний по фазе при наличии соответственно гистерезисной или форсирующей петли).

В комплексной форме записи, когда гармонические колебания изображаются равномерно вращающимися векторами (рис. 2.6, *а*)

$$x = Ae^{j\Omega t}, \quad y_1 = C_1 Ae^{j(\Omega t + D_1)},$$

имеем:

$$y_1 = W_n x, \quad \text{где} \quad W_n = q(A) + jq'(A). \quad (2.24)$$

Здесь W_n — амплитудно-фазовая характеристика данной нелинейности для первой гармоники колебаний (см. рис. 2.6, *б*, где показаны

две кривые: одна для форсирующей петли типа рис. 2.5, в, другая для гистерезисной петли типа рис. 2.5, б).

Для общего случая произвольной нелинейной зависимости

$$y = F(x, px), \quad (2.25)$$

могушей разлагаться в ряд Фурье при $x = A \sin \Omega t$, первая гармоника

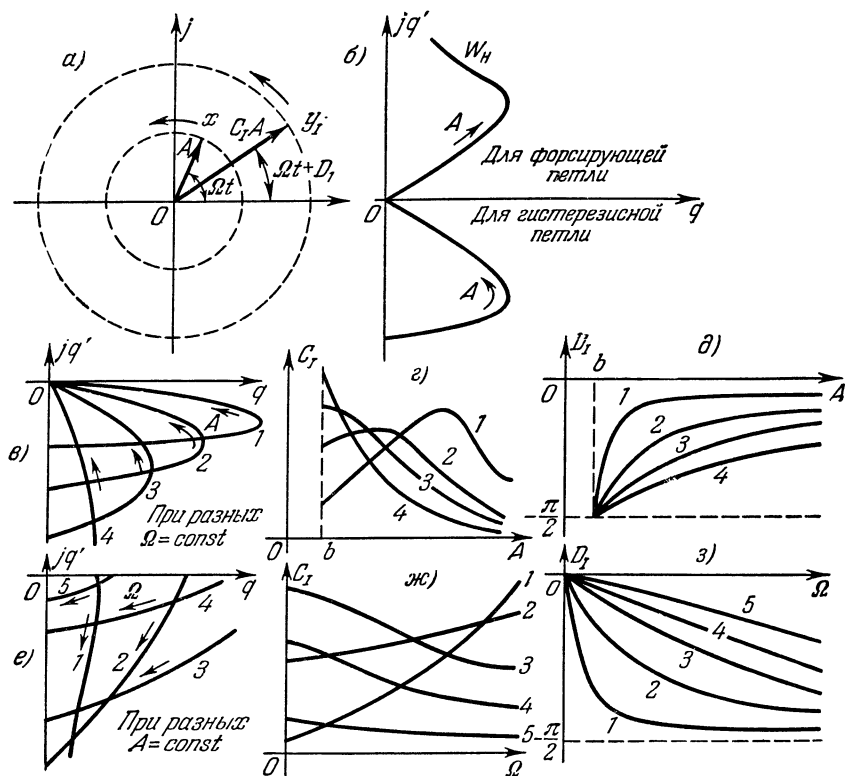


Рис. 2.6.

будет иметь тоже вид (2.18). В результате гармонической линеаризации получим (при отсутствии постоянной составляющей):

$$y = qx + \frac{q'}{\Omega} px. \quad (2.26)$$

В этом общем случае коэффициенты q и q' будут зависеть не только от амплитуды, как раньше, но и от частоты Ω :

$$q = q(A, \Omega), \quad q' = q'(A, \Omega),$$

ибо формулы для их вычисления (соответствующие коэффициентам ряда Фурье) примут вид

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Амплитудно-фазовая характеристика данной нелинейности для первой гармоники колебаний будет

$$W_n = q(A, \Omega) + j q'(A, \Omega) \quad (2.28)$$

при прежних выражениях (2.23) для усиления амплитуды и сдвига фазы.

Очевидно, что формулы (2.25)–(2.28) являются общими, из которых предыдущие (2.16)–(2.19), (2.21), (2.24) вытекают как частные случаи. Поэтому дальше будут использоваться эти общие формулы, так как полученные результаты всегда можно будет применить к более простым предыдущим случаям.

Заметим, что обычная линеаризация типа (2.1) для нелинейности вида (2.25) дает линейное выражение

$$y = k_1 x + k_2 p x$$

с постоянными коэффициентами (коэффициентами ряда Тейлора), не зависящими от формы изменения x во времени:

$$k_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^0, \quad k_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial p x} \right)^0,$$

где верхний индекс «нуль» означает подстановку $x=0$, $p x=0$.

Амплитудно-фазовая характеристика для такого линейного звена имеет, в отличие от (2.28), более простой вид:

$$W = k_1 + j k_2 \Omega,$$

не зависящий от амплитуды колебаний входной переменной x . Для нелинейностей типа рис. 2.5 при гармонической линеаризации амплитудно-фазовая характеристика для первой гармоники, как было показано в уравнениях (2.24) и на рис. 2.6, б, наоборот, зависит от амплитуды A колебаний входной величины x и не зависит от частоты Ω .

В общем случае при гармонической линеаризации нелинейностей амплитудно-фазовая характеристика (2.28) для первой гармоники *зависит от обеих величин A и Ω* . Ее можно изобразить на комплексной плоскости (q , $j q'$) в виде семейства кривых с переменным параметром A при разных постоянных значениях Ω (рис. 2.6, в) или

же в виде семейства кривых с переменным параметром Ω при разных постоянных значениях A (рис. 2.6, *е*). По амплитудно-фазовой характеристике нелинейности можно построить графики амплитудной C_1 и фазовой D_1 характеристик по отдельности, как показано на рис. 2.6, *з*, *д* (первый способ) и на рис. 2.6, *ж*, *з* (второй способ). Данные характеристики соответствуют эффекту нелинейного запаздывания (отрицательная фаза D_1 первой гармоники). Аналогично изображаются и характеристики с нелинейным опережением.

Полезно иметь в виду следующее. Если в нелинейной системе первого класса (см. § 1.2) нелинейность имеет вид суммы (или разности), например:

$$y = F_1(x) + F_2(x) + F_3(px) + F_4(x, px), \quad (2.29)$$

то каждое слагаемое можно гармонически линеаризовать по отдельности и результаты сложить, ибо интеграл (2.27) от суммы функций равен сумме интегралов от каждой слагаемой функции, что уже использовалось в (2.12). По отношению же к произведениям и другим операциям, например:

$$y = F_1(x) F_2(x) \quad \text{или} \quad y = [F(x)]^2,$$

раздельной гармонической линеаризации, разумеется, делать нельзя и нужно применять формулы (2.27) к нелинейной функции в целом, используя любые общие правила интегрирования.

При наличии нелинейностей не только от самой переменной x и ее скорости px , но еще и от ускорения p^2x , например

$$y = F_1(p^2x) + F(x, px),$$

при $x = A \sin \Omega t$ нужно подставлять

$$p^2x = -A\Omega^2 \sin \Omega t.$$

Тогда в результате гармонической линеаризации получится

$$y = \frac{q''}{\Omega^2} p^2x + \frac{q'}{\Omega} px + qx,$$

где q и q' — прежние (2.27) и

$$q'' = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(-A\Omega^2 \sin \psi) \sin \psi \, d\psi$$

при однозначной нечетно-симметричной зависимости $F_1(p^2x)$.

Обратимся теперь к гармонической линеаризации нелинейности, выражающейся в виде изменения структуры дифференциальных уравнений или передаточных функций (см., например, уравнения (1.25) и рис. 1.7).

Будем считать периодическое решение для переменной x (рис. 1.7) близким к синусоидальному $x = A \sin \Omega t$. Построим решение для

переменной x_1 , причем все участки 1 (рис. 2.7) будем находить из первого уравнения (1.25), а все участки 2 — из второго. Тогда кривая x_1 будет иметь точную форму выходной величины данного нелинейного звена (рис. 1.7) при $x = A \sin \Omega t$. Коэффициенты гармонической линеаризации q и q' определяются, следовательно, разложением этой кривой в ряд Фурье, а именно:

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} x_1(\psi) \sin \psi d\psi, \quad q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} x_1(\psi) \cos \psi d\psi. \quad (2.30)$$

В частности, для уравнений (1.25) ввиду симметрии полупериодов получим:

$$q = \frac{2}{\pi A} \int_{-\psi_1}^{+\psi_1} x_1^{(1)}(\psi) \sin \psi d\psi + \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_1} x_1^{(2)}(\psi) \sin \psi d\psi, \quad (2.31)$$

где, согласно рис. 2.7:

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}.$$

Аналогичная формула может быть записана и для q' .

Для всех участков 1 (рис. 2.7) имеем:

$$x_1^{(1)}(\psi) = U_1(\Omega) A \sin \psi + V_1(\Omega) A \cos \psi + x_n^{(1)}(\psi), \quad \psi = \Omega t, \quad (2.32)$$

а для всех участков 2

$$x_1^{(2)}(\psi) = U_2(\Omega) A \sin \psi + V_2(\Omega) A \cos \psi + x_n^{(2)}(\psi), \quad (2.33)$$

где $U_1(\Omega)$ и $V_1(\Omega)$ — вещественная и мнимая части амплитудно-фазовой характеристики первой обратной связи с передаточной функцией $W_1(j\Omega)$, а $U_2(\Omega)$ и $V_2(\Omega)$ — второй обратной связи с передаточной функцией $W_2(j\Omega)$. Кроме того, добавляются переходные составляющие $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$, если в знаменателях передаточных функций $W_1(p)$ и $W_2(p)$ имеются постоянные времени, которые сглаживают скачкообразный переход от одного участка к другому. В противном случае переходные составляющие $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ отсутствуют.

Если трудно взять интегралы (2.30), то следует обращаться к графическому способу, изложенному в главе III.

Он применяется также и при графическом задании нелинейностей.

Необходимо иметь в виду следующую практическую рекомендацию. Прежде чем приступить к гармонической линеаризации нелинейности типа рис. 1.7 по формулам (2.30), всегда надо просмотреть возмож-

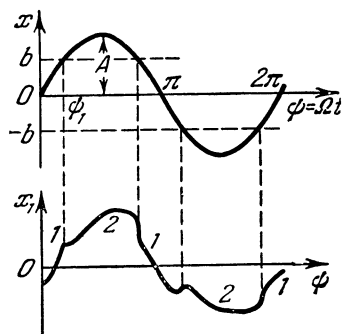


Рис. 2.7.

ность сведения ее к более простой форме и выбрать наилучший по простоте вариант расчета.

В самом деле, во многих частных случаях выражений $W_1(p)$ и $W_2(p)$ гармоническая линеаризация такого типа нелинейности значительно упрощается. Например, если речь идет о жесткой обратной связи с различными коэффициентами, то $W_1(p) = k_1$, $W_2(p) = k_2$ и данная нелинейность сводится к простой нелинейной характеристике вида рис. 1.10, *а* или *б*. При непрерывном изменении $k_{0.c}$ получается нелинейная характеристика вида рис. 1.8, *б*. То же самое относится и к простой гибкой обратной связи, когда $W_1(p) = k_1 p$, $W_2(p) = k_2 p$. При непрерывном изменении $k_{0.c}$ в этом случае будет $x_1 = k_{0.c}(x) p x$, где $k_{0.c}(x)$ будет четной функцией¹⁾, например вида рис. 1.8, *в* или *г*. Во всех этих случаях гармоническая линеаризация нелинейности производится проще и может быть использована формула (2.15).

Точно так же гармоническая линеаризация становится простой, если меняется какой-либо один член в передаточной функции, имеющей более сложный вид. Например, если

$$W_1(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{k}{T_2 p + 1},$$

то это равносильно нелинейности типа (1.14) или (1.15). Если же меняется и величина k , то уравнение обратной связи для схемы рис. 1.7 примет вид

$$T(x) p x_1 + x_1 = k(x) x.$$

Здесь придется иметь дело с нелинейной системой второго класса, для которой способ гармонической линеаризации дается ниже [47].

В нелинейных системах *второго и третьего* классов (см. § 1.2) встречаются либо отдельные нелинейности от разных переменных (см., например, рис. 1.13):

$$y = F(x, p x), \quad y_2 = F_2(x_2, p x_2), \quad (2.34)$$

либо смешанная нелинейность, включающая в себя обе переменные, как, например, (1.32) или в более общем виде

$$y = F_1(x, p x; x_2), \quad (2.35)$$

если она не распадается на сумму нелинейностей типа (2.34).

В случае отдельных нелинейностей (2.34), произведя гармоническую линеаризацию каждой нелинейности при $x = A \sin \Omega t$ и $x_2 = A_2 \sin(\Omega t + \varphi)$ по отдельности, получим:

$$y = q x + \frac{q'}{\Omega} p x, \quad y_2 = q_2 x_2 + \frac{q'_2}{\Omega} p x_2, \quad (2.36)$$

¹⁾ Отступление от четной функции приведет к несимметричным колебаниям, которые не рассматриваются в данной главе.

где q и q' и q_2 , q'_2 вычисляются по формулам (2.27), причем в первом случае $\psi = \Omega t$, а во втором $\psi = \Omega t + \varphi$, что не отражается на результатах. Очевидно, что в общем случае

$$q = q(A, \Omega), \quad q' = q'(A, \Omega), \quad q_2 = q_2(A_2, \Omega), \quad q'_2 = q'_2(A_2, \Omega), \quad (2.37)$$

а в частных случаях, наиболее часто встречающихся:

$$q = q(A), \quad q_2 = q_2(A_2). \quad (2.38)$$

Зависимость между амплитудами A и A_2 определяется при этом в системах второго класса через линейные дифференциальные уравнения или через передаточную функцию, которая связывает между собой переменные x и x_2 в исследуемой автоматической системе, а именно: если

$$x_2 = W_2(p) x, \quad (2.39)$$

то при $x = A \sin \Omega t$ и $x_2 = A_2 \sin(\Omega t + \varphi)$ имеем:

$$A_2 = |W_2(j\Omega)| A, \quad \varphi = \arg W_2(j\Omega). \quad (2.40)$$

Системы третьего класса отличаются от второго тем, что переменные x и x_2 связаны там нелинейными дифференциальными уравнениями. Поэтому для них соотношение типа (2.40) можно получить только в том случае, если есть возможность гармонически линеаризовать связывающую x_1 и x_2 нелинейность и включить в $W_2(j\Omega)$ амплитудно-фазовую характеристику этой нелинейности для первой гармоники. Условия существования такой возможности будут выяснены ниже в § 2.2.

В случае же смешанной нелинейности (2.35), не распадающейся на сумму нелинейностей (2.34), прежде чем производить гармоническую линеаризацию, нужно, полагая $x = A \sin \Omega t$ и $x_2 = A_2 \sin(\Omega t + \varphi)$, сначала с помощью формул (2.40) свести все выражение (2.35) к виду (2.25). Для этого переменная x_2 выражается через x :

$$x_2 = A_2 \cos \varphi \sin \Omega t + A_2 \sin \varphi \cos \Omega t = \frac{A_2 \cos \varphi}{A} x + \frac{A_2 \sin \varphi}{A\Omega} p x,$$

или с учетом выражения (2.40):

$$x_2 = U_2(\Omega) x + \frac{V_2(\Omega)}{\Omega} p x, \quad (2.41)$$

где $U_2(\Omega)$ и $V_2(\Omega)$ — вещественная и мнимая части амплитудно-фазовой характеристики $W_2(j\Omega)$, связывающей переменные x_2 и x в данной автоматической системе. В формуле (2.41) величины $U_2(\Omega)$ и $\frac{V_2(\Omega)}{\Omega}$ играют роль постоянных коэффициентов, значения которых зависят от частоты исследуемых колебаний. Замена (2.41) позволяет свести смешанную нелинейность (2.35) к виду $y = F(x, px)$ и произвести ее гармоническую линеаризацию по общим формулам (2.26) и (2.27), как в системе первого класса.

Полученные в этом параграфе формулы гармонической линеаризации нелинейностей будут дальше использоваться непосредственно, а также и видоизменяться в последующих главах для несимметричных колебаний, для затухающих колебаний, для учета высших гармоник, а также для случайных процессов.

§ 2.2. Обоснование метода гармонической линеаризации

Методы решения нелинейных задач при расчете различных автоматических систем, основанные на гармонической линеаризации, в данной главе будут базироваться, как видно из § 2.1, на том, что переменная x , стоящая под знаком нелинейных функций, изменяется синусоидально: $x = A \sin \Omega t$. Если это выполнено, то форма изменения остальных переменных не будет играть роли. Последнее замечание имеет очень важное практическое значение по следующей причине.

Автоматические системы являются, как правило, системами со многими степенями свободы, состоящими из нескольких звеньев, различным образом соединенных между собой. Поэтому приходится иметь дело всегда с несколькими физическими переменными величинами, характеризующими воздействие звеньев друг на друга (см. главу I).

В динамическом процессе регулирования, слежения и т. п. изменения разных переменных в одной и той же системе будут, вообще говоря, изображаться несколько отличающимися друг от друга кривыми во времени. Это хорошо известно из линейной теории. Еще в большей степени это имеет место в нелинейных системах (см., например, рис. 1.16).

Поэтому с самого начала надо обратить внимание на то, что при применении приближенных методов исследования, базирующихся на определенных предположениях о форме решения (к такому классу методов относится и метод гармонической линеаризации), необходимо, во-первых, иметь уверенность в том, что поведение соответствующей переменной в системе будет близко к принятой в данном методе форме решения, и, во-вторых, необходимо применять полученное решение к анализу поведения именно этой переменной, не распространяя его (без дополнительных действий) на другие переменные, что в дальнейшем и будет соблюдаться.

Итак, в методе гармонической линеаризации, развиваемом в данной главе, как уже сказано, полагается, что для *переменных, стоящих под знаком нелинейной функции*, периодическое решение достаточно близко к синусоидальному ($x = A \sin \Omega t$). Для других же переменных в той же системе никаких ограничений на форму решения не накладывается. Она может сколь угодно сильно отличаться от синусоиды (как, например, на рис. 1.16). При этом считается только, что основная частота колебаний сохраняется для всех переменных.

Покажем в общем виде, какими свойствами нелинейной системы можно оправдать применение метода гармонической линеаризации для отыскания периодического решения (автоколебаний) при наличии сильно выраженной нелинейности и как следствие из этого при возможности сильного отличия формы решения от синусоидального для ряда переменных в системе кроме одной, стоящей под знаком нелинейности.

Для весьма широкого круга нелинейных автоматических систем первого класса (см. § 1.2) свободное движение (переходные процессы и автоколебания) можно описать однородным дифференциальным уравнением вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0 \quad \left(p \equiv \frac{d}{dt}\right), \quad (2.42)$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены любой степени с вещественными постоянными коэффициентами, причем степень $R(p)$ ниже степени $Q(p)$. Через $F(x, px)$ обозначена заданная нелинейная функция, существенно отличающаяся от линейной. Как правило, именно в этом случае и имеет практический смысл учитывать какую-либо нелинейность в приближенном расчете системы. Само возникновение автоколебаний в реальных автоматических системах связано тоже, как правило, с наличием какой-либо существенной нелинейности в системе.

Однако цель метода гармонической линеаризации состоит в том, чтобы исследовать такую систему с существенной нелинейностью в значительной мере линейными методами.

Так, при определении автоколебаний (конкретные способы решения задач см. ниже в § 2.3) предполагается, что решение $x(t)$ нелинейного дифференциального уравнения (2.42) достаточно близко к решению $x = A \sin \Omega t$ некоторого линейного дифференциального уравнения, получаемого, согласно (2.26), путем замены заданной нелинейной функции $F(x, px)$ выражением

$$F(x, px) = qx + \frac{q'}{\Omega} px, \quad (2.43)$$

где q и q' определяются формулами (2.27). С этой заменой дифференциальное уравнение системы (2.42) принимает вид

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p\right)\right] x = 0. \quad (2.44)$$

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, так как, хотя, согласно (2.27), коэффициенты q и q' и зависят от неизвестных амплитуды A и частоты Ω искомого решения, но эти величины A и Ω являются постоянными, поскольку ищется периодическое решение.

Итак, требуется чтобы периодическое решение $x = A \sin \Omega t$ искусственно введенного линейного уравнения (2.44) было доста-

точно близко к решению заданного нелинейного уравнения (2.42). Это имеет место тогда, когда само линейное дифференциальное уравнение (2.44) достаточно мало отличается от заданного дифференциального уравнения (2.42). Очевидно, что ожидать этого можно далеко не всегда. Должны существовать некоторые условия, ограничивающие класс уравнений типа (2.42), удовлетворяющий этому требованию.

Поставим себе целью *отыскать условия, которым должны удовлетворять выражения $Q(p)$, $R(p)$ и $F(x, px)$, входящие в заданное нелинейное уравнение (2.42), чтобы оно достаточно мало отличалось от линейного уравнения (2.44), несмотря на наличие сильной нелинейности $F(x, px)$, когда ищется периодическое решение $x(t)$, близкое к синусоидальному [77].*

В качестве исходного положения для анализа этого вопроса запишем решение заданного нелинейного дифференциального уравнения (2.42) в виде

$$x = x_1 + \varepsilon x_b(t), \quad (2.45)$$

где

$$x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t, \quad (2.46)$$

$x_b(t)$ — произвольная ограниченная функция времени, а ε — малый параметр.

Заметим, что пока решение (2.45) не сравнивается с решением $x = A \sin \Omega t$ линейного уравнения (2.44). Это будет сделано ниже. Поэтому, в отличие от последнего, здесь истинная первая гармоника периодического решения нелинейного уравнения (2.42) обозначена иначе, а именно через $x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t$.

В случае наличия периодического решения (2.45) уравнения (2.42) в предположении, что x_1 является точным выражением его первой гармоники, можем записать:

$$\varepsilon x_b(t) = \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k). \quad (2.47)$$

Представим заданную нелинейную функцию $F(x, px)$ в виде

$$F(x, px) = F(x_1, px_1) + [F(x_1 + \varepsilon x_b, px_1 + \varepsilon px_b) - F(x_1, px_1)], \quad (2.48)$$

причем выражение, стоящее в квадратных скобках, используя ряд Тейлора, можно представить в виде

$$\begin{aligned} [F(x_1 + \varepsilon x_b, px_1 + \varepsilon px_b) - F(x_1, px_1)] = & \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_b + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_b \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \varepsilon^3 [\dots] + \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

Следовательно, второе слагаемое в формуле (2.48), взятое там в квадратные скобки, будет мало, если частные производные от F

по x и по px конечны. На малость его можно рассчитывать и при встречающихся на практике разрывных нелинейных функциях, например релейных, когда указанные производные будут дельта-функциями.

Разложив в ряд Фурье каждое из двух слагаемых в формуле (2.48) по отдельности, получим для первого из них (с учетом соотношения $p \sin \Omega_1 t = \Omega_1 \cos \Omega_1 t$)

$$F(x_1, px_1) = F_0 + \left(C + \frac{B}{\Omega_1} p\right) \sin \Omega_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} F_k, \quad (2.50)$$

где, согласно формулам для коэффициентов ряда Фурье, имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_1 \cos \psi) d\psi, \\ C &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_1 \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ B &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_1 \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

F_k — высшие гармоники, которые запишем в виде

$$F_k = N_k \sin(k\Omega_1 t + \eta_k) \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (2.52)$$

Их амплитуды N_k нельзя считать малыми по сравнению с амплитудой первой гармоники $\sqrt{C^2 + B^2}$, поскольку заданная нелинейная функция $F(x, px)$ сильно отличается от линейной. Эти амплитуды не будут малы, по крайней мере, для одного или нескольких низших значений k (в частности, может быть, только нечетных), но при $k \rightarrow \infty$ должно быть $N_k \rightarrow 0$.

Для второго слагаемого (2.48), которое является малым, разложение в ряд Фурье запишем в виде

$$[F(x_1 + \varepsilon x_b, px_1 + \varepsilon px_b) - F(x_1, px_1)] = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k, \quad (2.53)$$

причем

$$\varepsilon \Phi_k = \varepsilon G_k \sin(k\Omega_1 t + \vartheta_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.54)$$

Подставив выражения (2.45), (2.50) и (2.53) в заданное нелинейное уравнение (2.42), получим:

$$\begin{aligned} Q(p)x_1 + Q(p)\varepsilon x_b + R(p)\left(C + \frac{B}{\Omega_1} p\right) \sin \Omega_1 t + \\ + R(p) \sum_{k=2}^{\infty} F_k + R(p)\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k + R(p)F_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Чтобы получить тождественное равенство нулю данного выражения, надо приравнять нулю по отдельности все гармоники. Для нулевых гармоник получаем:

$$F_0 = \varepsilon \Phi_0,$$

или, учитывая (2.51), с точностью до ε :

$$\int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_1 \cos \psi) d\psi = 0. \quad (2.56)$$

Это есть первое требование к заданной нелинейной функции $F(x, px)$ — отсутствие постоянной составляющей¹⁾.

Для первых гармоник из уравнения (2.55) получаем выражение

$$Q(p) x_1 + R(p) \left(C + \frac{B}{\Omega_1} p \right) \sin \Omega_1 t + R(p) \varepsilon \Phi_1 = 0. \quad (2.57)$$

Учитывая (2.46) и (2.54) и применяя комплексный метод определения амплитуд и фаз синусоидальных колебаний, получим:

$$A_1 \sin \Omega_1 t = - \left| \frac{R(j\Omega_1)}{Q(j\Omega_1)} \right| \sqrt{C^2 + B^2} \sin(\Omega_1 t + \gamma + \beta) - \\ - \left| \frac{R(j\Omega_1)}{Q(j\Omega_1)} \right| \varepsilon G_1 \sin(\Omega_1 t + \vartheta_1 + \beta),$$

если $Q(p)$ не имеет чисто мнимых корней, причем

$$\gamma = \arctg \frac{B}{C}, \quad \beta = \arg \frac{R(j\Omega_1)}{Q(j\Omega_1)}. \quad (2.58)$$

На основании этого с точностью до ε можем написать:

$$A = \left| \frac{R(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right| \sqrt{C^2 + B^2}, \quad \gamma + \beta(\Omega) = \pi. \quad (2.59)$$

Этими соотношениями определяется первое приближение A и Ω для амплитуды A_1 и частоты Ω_1 первой гармоники периодического решения. Легко проверить, что первое приближение (2.59) является решением приближенного линейного уравнения (2.44) при чисто мнимых корнях, если учесть, что, согласно (2.27) и (2.51), при подстановке $A = A_1$ и $\Omega = \Omega_1$ имеем $C = Aq$, $B = Aq'$.

Отсюда видно, что при указанном выше условии малости квадратной скобки в выражении (2.48) (по крайней мере, малости первой гармоники разложения этой скобки в ряд Фурье) линейное уравнение (2.44) действительно с точностью до ε определяет *первую гар-*

¹⁾ Это и соответствует содержанию данной главы, где ищутся симметричные автоколебания; задачи, в которых требование (2.56) не выполняется, будут рассмотрены в главе V.

монику периодического решения нелинейного уравнения (2.42), близкого к синусоидальному (если это периодическое решение существует).

Обратимся теперь к членам уравнения (2.55), содержащим высшие гармоники. Для каждой из них с учетом (2.47) имеем уравнение

$$Q(p) \varepsilon A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k) + R(p) F_k + R(p) \varepsilon \Phi_k = 0 \quad (k=2, 3, \dots), \quad (2.60)$$

откуда, согласно (2.52) и (2.54), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k) = & - \left| \frac{R(jk\Omega_1)}{Q(jk\Omega_1)} \right| N_k \sin(k\Omega_1 t + \eta_k + \beta_k) - \\ & - \left| \frac{R(jk\Omega_1)}{Q(jk\Omega_1)} \right| \varepsilon G_k \sin(k\Omega_1 t + \vartheta_k + \beta_k) \quad (k=2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (2.61)$$

где обозначено

$$\beta_k = \arg \frac{R(jk\Omega_1)}{Q(jk\Omega_1)}.$$

Чтобы соблюдалось равенство (2.61), т. е., другими словами, чтобы все левые части $[\varepsilon A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k)]$ или, что то же самое, величина $\varepsilon x_b(t)$ в искомом решении (2.45) были действительно малыми, нужно потребовать малости всех величин

$$\left| \frac{R(jk\Omega_1)}{Q(jk\Omega_1)} \right| N_k \quad (k=2, 3, \dots). \quad (2.62)$$

Каждая из них должна быть малой величиной, по крайней мере, порядка ε , т. е. величины (2.62) по сравнению с A_1 должны иметь, по крайней мере, такой же порядок малости, что и величина $\varepsilon x_b(t)$ по сравнению с x_1 .

Отсюда с учетом (2.59) вытекает важное требование к выражениям $Q(p)$ и $R(p)$ и $F(x, px)$, фигурирующим в заданном дифференциальном уравнении (2.42), а именно:

$$\left| \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| N_k \ll \left| \frac{R(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right| \sqrt{C^2 + B^2}. \quad (2.63)$$

Поскольку рассматривается существенная нелинейность $F(x, px)$, то, как уже отмечалось при написании формулы (2.52), величины N_k нельзя считать малыми по сравнению с $\sqrt{C^2 + B^2}$ (по крайней мере, для низших значений k). Поэтому нужно потребовать, чтобы

$$\left| \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| \ll \left| \frac{R(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right| \quad (k=2, 3, \dots). \quad (2.64)$$

Кроме того, требуя, чтобы степень многочлена $R(p)$ была ниже степени многочлена $Q(p)$, получаем:

$$\left| \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.65)$$

Заметим, что условия (2.63) и (2.64) записаны здесь для каждой высшей гармоники в отдельности, в то время как $\varepsilon x_b(t)$ является суммой всех высших гармоник. Однако выполнение условий (2.64) по отдельности (без суммирования) в реальных задачах будет достаточным для получения малости $\varepsilon x_b(t)$, так как для величин

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| N_k, \text{ входящей, согласно (2.61), в выражение (2.47) для } \varepsilon x_b,$$

существенное значение могут иметь только несколько (малое число) величин N_k . При этом малость всей суммы высших гармоник $\varepsilon x_b(t)$ обеспечивается имеющим место на практике быстрым стремлением к нулю величин N_k и выражения (2.65) при $k \rightarrow \infty$.

Как видно из § 1.2, выражение

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

является передаточной функцией приведенной линейной части системы (рис. 1.12, б). Построим амплитудную частотную характеристику приведенной линейной части

$$|W_{\text{л}}(j\omega)| = \left| \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|, \quad (2.66)$$

как показано, например, на рис. 2.8. Тогда условия (2.64) и (2.65) получают свою графическую интерпретацию. В простейших системах,

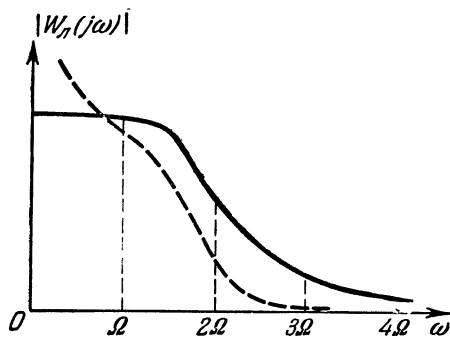


Рис. 2.8.

когда приведенная линейная часть соответствует реальной линейной части системы (как было в примере релейной системы в § 1.3), эта графическая интерпретация условий (2.64) и (2.65) приобретает физический смысл — непропускание высших гармоник реальной линейной частью системы. Последнее именуется свойством фильтра.

Следовательно, выведенные здесь математические условия (2.64) и (2.65), выполнение которых необходимо для при-

менения метода гармонической линеаризации к системам с сильно выраженными нелинейностями, являются обобщением реального свойства фильтра на любые системы, уравнения которых могут быть приведены к виду (2.42).

Поэтому назовем условия (2.64) и (2.65) обобщенным свойством фильтра. Обобщение состоит в том, что в общем случае это свойство требуется не от реальной, а от приведенной линейной части

системы (см. § 1.2). Это обобщение чрезвычайно важно для любых нелинейных автоматических систем, не имеющих ярко выраженной структурной разбивки вида рис. 1.12, б, когда нелинейность произвольным образом входит в уравнение какого-либо звена системы, причем переменная x , стоящая под знаком нелинейной функции, может быть не входной, а выходной или даже некоторой промежуточной, искусственно введенной величиной при написании уравнения сложного нелинейного звена.

Чтобы усилить требование обобщенного свойства фильтра, добавим к оговоренному выше правилу отсутствия чисто мнимых корней многочлена $Q(p)$ еще дополнительное условие отсутствия в нем корней с положительной вещественной частью. Это обеспечивает устойчивое прохождение колебаний через приведенную линейную часть. Наличие же нулевых корней в многочлене $Q(p)$ допускается; они только улучшают непропускание высших гармоник приведенной линейной частью, ибо изменяют график $|W_d(j\omega)|$, как указано на рис. 2.8 пунктиром. Следовательно, обобщенное свойство фильтра усиливается *требованием, чтобы приведенная линейная часть системы была устойчива или нейтральна.*

Таким образом обосновывается применение метода гармонической линеаризации к нелинейным автоматическим системам первого класса, динамика которых описывается дифференциальным уравнением типа (2.42), и выводятся условия, которым при этом должны удовлетворять выражения $Q(p)$, $R(p)$ и $F(x, px)$, чтобы данную автоматическую систему можно было исследовать указанным методом, т. е. иметь решение для переменной x , близкое к синусоидальному. Рассмотрение самых разнообразных конкретных видов автоматических систем покажет впоследствии, что эти условия обычно хорошо выполняются на практике. Так, в примере релейной системы в § 1.3 свойство фильтра (2.64) свелось к выражению (1.88), которое выполняется при любом соотношении положительных параметров системы, когда в ней возможно периодическое решение (автоколебания).

Положенное в основу вывода условие малости выражения (2.49) при сколь угодно сильной нелинейности $F(x, px)$ практически тоже выполняется. С теоретической же точки зрения важно то, что математическое обоснование требования обобщенного свойства фильтра (2.64) для получения решения (2.45), близкого к синусоидальному при сколь угодно сильной нелинейности $F(x, px)$, должно базироваться также на определенном требовании к самой нелинейности в виде обеспечения малости выражения (2.49). Это последнее требование в свою очередь можно преобразовать в требование конечности производных $\frac{dq}{dA}$ и $\frac{dq'}{dA}$, т. е. в требование достаточной плавности изменения коэффициентов гармонической линеаризации q и q' (2.27) при изменении амплитуды колебаний вблизи значения A для искомого периодического решения.

Для систем первого класса другого типа, согласно (1.57) и (1.56), уравнение свободных колебаний будет

$$Q(p)x + R_1(p)F_1(x, px) + R_2(p)F_2(x, px) = 0, \quad (2.67)$$

где степени многочленов $R_1(p)$ и $R_2(p)$ ниже степени многочлена $Q(p)$.

По аналогии с предыдущими выкладками приходим к выводу, что для получения решения $x(t)$, близкого к синусоидальному, нужно потребовать выполнения двух условий обобщенного свойства фильтра:

$$\left| \frac{R_1(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| \ll \left| \frac{R_1(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right|, \quad \left| \frac{R_2(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| \ll \left| \frac{R_2(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right| \quad (2.68)$$

$$(k = 2, 3, \dots),$$

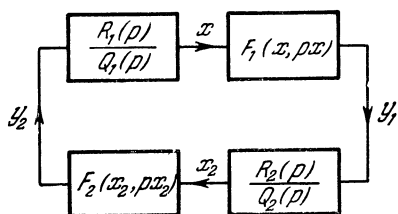
причем

$$\left| \frac{R_1(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{R_2(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad (2.69)$$

последнее обеспечивается тем, что степени $R_1(p)$ и $R_2(p)$ ниже степени $Q(p)$. Нелинейности $F_1(x, px)$ и $F_2(x, px)$ при этом могут быть сколь угодно сильными, но для них постулируется малость выражения типа (2.49). Это соблюдается для встречающихся на практике нелинейностей. Условие (2.68), как и прежде, дополняется требованием отсутствия в многочлене $Q(p)$ чисто мнимых корней и корней с положительной вещественной частью.

Аналогичные положения легко распространяются и на системы второго и третьего классов. В них должно удовлетворяться обобщенное свойство фильтра (2.64) для приведенных линейных частей, связывающих каждую из переменных, стоящих под знаком нелинейной функции, например x и x_2 в выражениях (2.34) и (2.35), с переменной y (или переменными y_1 и y_2), вводящей нелинейность в заданную систему. Например, если для нелинейной системы, включающей в себя две нелинейности (2.34) от разных переменных, заданы уравнения

$$\left. \begin{aligned} Q_1(p)x &= -R_1(p)y_2, \\ Q_2(p)x_2 &= R_2(p)y_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$



. Рис. 2.9.

что соответствует схеме рис. 2.9, то требуется соблюдение условий

такого же вида, как (2.68) и (2.69), с заменой соответственно $Q(p)$ на $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$. Аналогично обстоит дело и с другими типами схем (рис. 1.13 и др.)

Заметим, что выполнение всех этих условий фильтра для приведенных линейных частей необходимо лишь в случае, когда все нелинейности сколь угодно сильные. Если же одна из нелинейностей

не вызывает появления сильных высших гармоник, то к соответствующей части системы надо применить условие (2.63), которое предъявляет значительно меньшие требования к линейной части (за счет малости самих амплитуд высших гармоник N_k , вызываемых нелинейностью, по сравнению с амплитудой первой гармоники $\sqrt{C^2 + B^2}$).

Если же на каком-либо участке системы (например, на участке $y_1 x_2 y_2$ рис. 2.9) указанные условия не удовлетворяются, то следует весь этот участок считать за одно нелинейное звено и пользоваться формулой (2.30), заменив в ней $x_1(\psi)$ на $y_2(\psi)$ и считая синусоидальной только переменную x . При этом функция $y_2(\psi)$ определяется следующим образом. Задавшись формой решения $x = A \sin \psi$, находим (аналитически или графически) в соответствии со схемой рис. 2.9 точное выражение функции

$$y_1(\psi) = F_1(\sin \psi, A\Omega \cos \psi).$$

Затем точным решением уравнения $Q_2(p)x_2 = R_2(p)y_1$ определяем $x_2(\psi)$, где $\psi = \Omega t$. Это уравнение обычно легко решается, так как невыполнение условия фильтра для передаточной функции R_2/Q_2 чаще всего бывает, когда $Q_2(p)$ имеет первую или вторую степень. Наконец, находим точное выражение

$$y_2(\psi) = F_2[x_2(\psi), px_2(\psi)].$$

Тогда схема рис. 2.9 сводится к схеме с одной нелинейностью, объединяющей три звена, для которой

$$q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y_2(\psi) \sin \psi d\psi, \quad q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y_2(\psi) \cos \psi d\psi,$$

и с одной линейной частью $W_n(p) = R_1(p)/Q_1(p)$.

§ 2.3. Способы определения симметричных автоколебаний

Сначала обратимся к нелинейным системам первого класса, уравнения которых сводятся к виду

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0, \quad (2.71)$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены с постоянными коэффициентами, причем степень $R(p)$ ниже степени $Q(p)$ и многочлен $Q(p)$ не имеет чисто мнимых корней и корней с положительной вещественной частью (наличие нулевых корней допускается). Для таких систем с существенной нелинейностью $F(x, px)$ при применении метода гармонической линеаризации требуется выполнение обобщенного свойства фильтра

$$\left| \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| \ll \left| \frac{R(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right| \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.72)$$

(рис. 2.8), что обеспечивает близость периодического решения для переменной x к синусоидальному виду (2.45) при сколь угодно сильной нелинейности. Напомним только, что вывод этого свойства основывается на малости выражения (2.49), что требует достаточной плавности изменения коэффициентов гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$ вблизи искомого периодического решения. На это вполне можно рассчитывать при всевозможных реально встречающихся в автоматических системах нелинейностях.

При этом периодическое решение ищется приближенно в виде

$$x = A \sin \Omega t \quad (2.73)$$

в предположении, что заданная нелинейность $F(x, px)$ не дает постоянной составляющей, т. е.

$$\int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) d\psi = 0, \quad \psi = \Omega t. \quad (2.74)$$

Для отыскания амплитуды A и частоты Ω периодического решения (2.73) производится сначала, согласно (2.26) и (2.27), гармоническая линеаризация нелинейности, т. е. замена

$$F(x, px) = qx + \frac{q'}{\Omega} px, \quad (2.75)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Вычисление по этим формулам дает выражение гармонических коэффициентов усиления как функций амплитуды и частоты искомого периодического решения, т. е.

$$q(A, \Omega) \text{ и } q'(A, \Omega). \quad (2.77)$$

Во многих частных случаях, как было и в примерах главы I, q и q' могут зависеть только от амплитуды A и не зависеть от частоты Ω .

Сделав в уравнении (2.71) замену (2.75), получаем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) \right] x = 0, \quad (2.78)$$

причем коэффициенты q и q' зависят, согласно (2.77), от искомых величин A и Ω (или только от A), а решение уравнения ищется

в виде (2.73). Последнее возможно только в том случае, когда характеристическое уравнение замкнутой системы

$$Q(p) + R(p)\left(q + \frac{q'}{\Omega} p\right) = 0 \quad (2.79)$$

имеет пару чисто мнимых корней $p = \pm j\Omega$. Это и является исходным положением для отыскания амплитуды A и частоты Ω периодического решения¹⁾. В то же время, как уже упоминалось, характеристическое уравнение разомкнутой линейной части (приведенной)

$$Q(p) = 0 \quad (2.80)$$

не должно иметь чисто мнимых корней и корней с положительной вещественной частью. Нулевые корни могут иметься в уравнении (2.80), но в уравнении замкнутой системы (2.79) их быть не должно (равно как и корней с положительной вещественной частью).

Надо помнить, что замена (2.75) приближенно отражает только первую гармонику функции $F(x, px)$, ибо в правой части (2.75) полагается $x = A \sin \Omega t$, $px = A\Omega \cos \Omega t$. Это и есть принятое в § 2.1 условие гармонической линеаризации. Высшие гармоники в выражении (2.75) отброшены, хотя они и не малы (сильная нелинейность), только потому, что законность их неучета в решении, как было показано в § 2.2, гарантируется выполнением свойства (2.72).

Таким образом, отдельно взятое равенство (2.75) само по себе для сильных нелинейностей неверно даже приближенно, поскольку правая часть есть приближенное выражение только первой гармоники левой части. Но, несмотря на это, полученное с его использованием уравнение (2.78) мало отличается от исходного нелинейного уравнения (2.71) и оба эти уравнения обладают близкими друг к другу периодическими решениями.

Кратко можно выразиться так: несмотря на отсутствие малого параметра в замене (2.75), малый параметр имеется в различии как самих уравнений (2.71) и (2.78), так и их решений, что вытекает из § 2.2. Таким образом, следует помнить об условности знака равенства в выражении (2.75), не придавая ему другого смысла, кроме вышеуказанного.

Возможны шесть способов определения амплитуды A и частоты Ω периодического решения (в деталях же вычислительных приемов может быть еще большее разнообразие применительно к различным конкретным задачам). При этом в задачах синтеза нелинейных автоматических систем главное внимание обращается на определение A и Ω в зависимости от параметров системы с целью выбора последних.

Первый способ [47]. Этот способ наиболее удобен для общих исследований в большинстве задач. В характеристическое уравне-

¹⁾ Предполагается также, что все остальные корни уравнения (2.79), кроме указанной одной пары чисто мнимых корней, имеют отрицательные вещественные части (чтобы исключить возможность внутренних резонансов и т. п.).

ние (2.79) подставляем чисто мнимое значение $p = j\Omega$ и в полученном комплексном выражении

$$Q(j\Omega) + R(j\Omega)(q + jq') = 0 \quad (2.81)$$

выделяем вещественную и мнимую части в виде

$$X(\Omega) + jY(\Omega) = 0, \quad (2.82)$$

где X и Y будут многочленами по степеням Ω , причем в коэффициенты их, согласно (2.77), кроме других величин будет входить искомая амплитуда A . Таким образом, из (2.82) получаем два алгебраических (возможно трансцендентных) уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(A, \Omega) &= 0, \\ Y(A, \Omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

с двумя неизвестными A и Ω . Поскольку амплитуда A входит в выражение (2.82) не непосредственно, а только в виде коэффициентов q и q' , зависящих от A , то более подробная запись уравнений (2.83) будет

$$\left. \begin{aligned} X(q, q', \Omega) &= 0, \\ Y(q, q', \Omega) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

где в общем случае

$$q = q(A, \Omega), \quad q' = q'(A, \Omega), \quad (2.85)$$

а во многих частных задачах

$$q = q(A), \quad q' = q'(A). \quad (2.86)$$

При простых выражениях q и q' (как, скажем, в примере § 1.3) можно непосредственно перейти к уравнениям (2.83) и найти формулы для A и Ω в явном виде. В более сложных случаях при решении уравнений (2.84) целесообразно использовать графики функций (2.85) или (2.86), построенных заранее для разных типов нелинейностей (см. главу IV).

По своему физическому смыслу амплитуда A и частота Ω периодического решения являются вещественными положительными числами. Поэтому, если в результате решения пары уравнений (2.83) или (2.84) хотя бы одна из двух неизвестных A и Ω окажется отрицательной (вещественной) или же мнимой, или комплексной, то будем считать, что периодическое решение (2.73) отсутствует и, следовательно, автоколебаний, близких к виду (2.73), в данной системе не существует.

Если же решение пары уравнений (2.83) или (2.84) дает для неизвестных A и Ω вещественные положительные значения, то будем считать, что периодическое решение, близкое к (2.73), существует¹⁾,

¹⁾ Если, конечно, при этом выполнены все указанные в начале данного параграфа условия — проверка их обязательна.

хотя и это положение, по-видимому, тоже требует еще дополнительного строгого математического доказательства¹⁾). Однако существование периодического решения еще не означает наличия автоколебаний в данной системе, так как только *устойчивое* периодическое решение уравнения (2.71) соответствует автоколебаниям. Неустойчивое же периодическое решение, как будет видно из дальнейшего, имеет другой физический смысл. Поэтому, чтобы определить автоколебания, нужно исследовать еще устойчивость найденного периодического решения, о чем речь будет ниже в § 2.4.

Второй способ определения A и Ω базируется на том, что условием наличия пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении (2.79) является равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица

$$H_{n-1} = 0. \quad (2.87)$$

Все остальные определители Гурвица, согласно подстрочному примечанию к формуле (2.79), положительны. Далее, в качестве второго уравнения, которое необходимо добавить, чтобы найти две неизвестные (A и Ω), надо взять одно из уравнений (2.83).

Например, если записать характеристическое уравнение (2.79) в виде

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n = 0,$$

где коэффициенты b_0, \dots, b_n могут зависеть от искомым A и Ω (или только от A), то для системы четвертого порядка ($n=4$) уравнение (2.87) имеет вид

$$b_3(b_1 b_2 - b_0 b_3) - b_4 b_1^2 = 0, \quad (2.88)$$

а второе из уравнений (2.83) дает

$$b_1 \Omega^2 = b_3.$$

Для систем третьего порядка аналогичные два уравнения имеют вид

$$b_1 b_2 - b_0 b_3 = 0, \quad b_0 \Omega^2 = b_2. \quad (2.89)$$

Тут имеют силу также все общие замечания, которые были указаны в первом способе.

Заметим, что в первом способе, рассмотренном выше, вместо (2.87) применялось первое из уравнений (2.83). В частности, вместо (2.88) применялось

$$b_0 \Omega^4 - b_2 \Omega^2 + b_4 = 0, \quad (2.90)$$

а вместо первого из уравнений (2.89) было

$$b_3 - b_1 \Omega^2 = 0.$$

¹⁾ Это относится в одинаковой степени ко всем способам решения задач.

Очевидно, что рассматриваемый здесь второй способ может иметь практический смысл только тогда, когда коэффициенты b_0, \dots, b_n не зависят от Ω , т. е. только для случая однозначной нелинейности $F(x)$. Тогда уравнение (2.87) содержит одну неизвестную A , которая и определяется из одного этого уравнения независимо от частоты Ω . Последняя определяется затем отдельно из второго уравнения (2.83). Вообще же говоря, в большинстве случаев первый способ решения задачи удобнее. Важное развитие метода использования предпоследнего определителя Гурвица (2.87) в рассматриваемой задаче дано К. Магнусом [148], [153].

Третий способ. Этот способ определения A и Ω , как и первый, вначале тоже содержит подстановку чисто мнимого значения $p = j\Omega$ в характеристическое уравнение (2.79). Но затем получающееся комплексное выражение (2.81) записывается с учетом (2.66) и (2.28) в виде [19]

$$\frac{R(j\Omega)}{Q(j\Omega)} = -\frac{1}{q + jq'} \quad \text{или} \quad W_n(j\Omega) = -\frac{1}{W_n}. \quad (2.91)$$

Левая часть этого равенства содержит только одну из неизвестных — частоту Ω . Правая часть в общем случае содержит обе неизвестные A и Ω , но во многих простейших задачах только A .

В последнем случае решение уравнения (2.91) может быть найдено графически, как пересечение двух кривых на комплексной плоскости, одна из которых $W_n(j\Omega)$ соответствует изменению $0 < \Omega < \infty$, а вто-

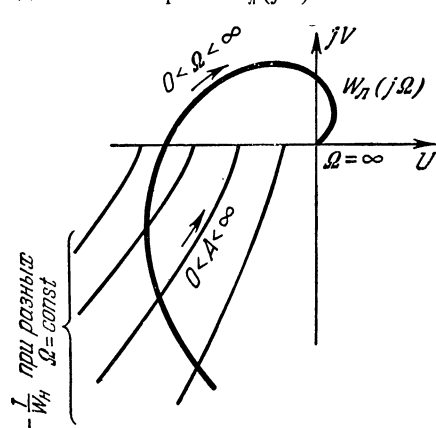


Рис. 2.10.

рая — $\frac{1}{W_n}$ изменению $0 < A < \infty$.

Если кривые пересекаются, то будем считать, что периодическое решение, близкое к (2.73), существует (причем необходимо проверить выполнение всех указанных в начале данного параграфа условий). Для определения автоколебаний надо исследовать еще устойчивость периодического решения (см. § 2.4). Если же указанные кривые не пересекаются, то периодическое решение (2.73) отсутствует и автоколебаний, близких к синусоиде, в данной системе нет.

В общем же случае, когда q и q' являются функциями от A и Ω , требуется построение серии кривых $-\frac{1}{W_n}$, соответствующих правой части равенства (2.91) для разных значений Ω при $0 < A < \infty$ (рис. 2.10). При этом нужно найти из этой серии такую кривую,

значение Ω для которой совпадало бы со значением Ω на кривой $W_{\text{л}}(j\Omega)$ в точке пересечения с ней¹⁾.

Четвертый способ определения A и Ω , который можно применить в особенно сложных случаях, когда другие приемы оказываются слишком громоздкими, заключается в следующем [43]. Рассматривая величины X и Y в равенствах (2.83) как прямоугольные координаты, надо строить кривые для серии конкретных значений A при $0 < \Omega < \infty$ (рис. 2.11). Равенствам (2.83) удовлетворяет та кривая, которая пройдет через начало координат, чем и определятся искомые значения A и Ω . Поэтому практически надо строить не все кривые, а только их участки вблизи начала координат. После этого надо исследовать устойчивость найденного периодического решения (см. § 2.4).

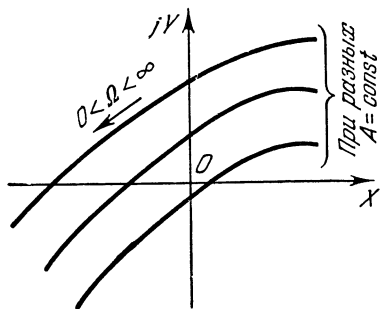


Рис. 2.11.

Если ни при каком значении A кривая не проходит через начало координат, периодического решения (а значит, и автоколебаний), близкого к виду (2.73), нет.

Пятый способ. Для общего случая задач, в которых каждый из коэффициентов гармонической линеаризации q и q' зависит сложным образом от обеих неизвестных A и Ω , т. е.

$$q = q(A, \Omega), \quad q' = q'(A, \Omega), \quad (2.92)$$

можно применить еще следующий прием решения.

Задаваясь различными значениями A и Ω , построим по формулам (2.92) две серии кривых: $q(\Omega)$ и $q'(\Omega)$ при разных $A = \text{const}$ (рис. 2.12, а, б). Затем из уравнений (2.84) выразим

$$q = Z_1(\Omega), \quad q' = Z_2(\Omega), \quad (2.93)$$

и эти две кривые нанесем на тех же графиках. Теперь остается на этих двух кривых найти такие точки C и B , в которых кривые $Z_1(\Omega)$ и $Z_2(\Omega)$ пересекают линии с одинаковыми значениями A при одном и том же значении Ω . Полученные величины A и Ω будут решением задачи, т. е. амплитудой и частотой искомого периодического решения.

Во многих встречающихся на практике задачах вместо (2.92) будет

$$q = q(A) \quad \text{и} \quad q' = q'(A). \quad (2.94)$$

¹⁾ Вместо амплитудно-фазовых частотных характеристик $W_{\text{л}}$ могут использоваться логарифмические характеристики, что в данной книге не рассматривается, хотя это и полезно было бы в ряде случаев.

Тогда кривые q и q' на рис. 2.12 для разных амплитуд будут иметь вид горизонтальных прямых линий.

В простейшем случае, когда в системе имеется однозначная нечетно-симметричная нелинейность $F(x)$, для которой $q = q(A)$ и $q' = 0$, из уравнений (2.84) или же из (2.87) можно выразить

$$q(A) = Z(\Omega). \quad (2.95)$$

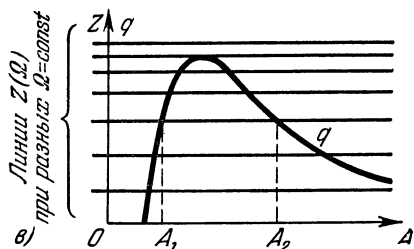
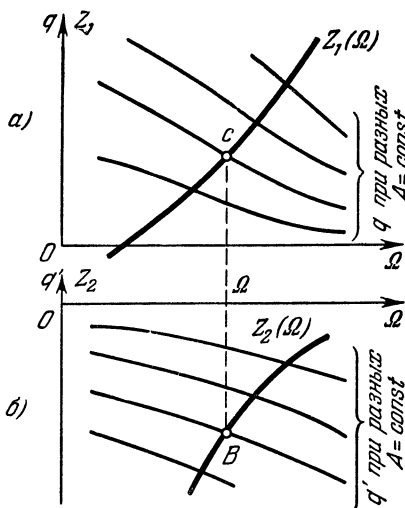


Рис. 2.12.

Тогда, исключив $q(A)$ из уравнений (2.84), найдем частоту Ω как функцию параметров системы. Затем, изобразив график зависимости $q(A)$ (рис. 2.12, в), проведем на нем, согласно (2.95), горизонтальные линии $q = Z(\Omega)$ для разных постоянных значений Ω , т. е. для разных соотношений параметров системы. Точки пересечения этих прямых с кривой $q(A)$ (например, на рис. 2.12, в точки A_1 и A_2) определяют в каждом случае амплитуды периодических решений. Если пересечений нет, то и периодических решений в системе не будет. В простейших случаях уравнение (2.95) решается аналитически.

Шестой способ. Главной задачей практических расчетов конкретных автоматических систем обычно является выбор параметров системы, исходя из желательных значений амплитуды A и частоты Ω автоколебаний либо исходя из требования устойчивости системы без

автоколебаний. Поэтому для конкретных систем важно получить зависимости величин A и Ω от одного или нескольких параметров системы (например, от коэффициента усиления линейной части k , от коэффициента обратной связи $k_{0.c}$, от какой-либо постоянной времени T и т. п.). Это было проиллюстрировано на простейшем примере в § 1.4 (рис. 1.20).

Разумеется, что для решения и этой задачи может быть применен любой из указанных выше пяти способов, если при этом определять величины A и Ω , меняя какие-либо параметры системы. Однако для решения данной задачи могут быть применены и другие приемы, которые в ряде случаев будут проще [47]. В самом деле, если надо найти зависимости $A(k)$ и $\Omega(k)$, то можно в уравнениях (2.83) счи-

тать неизвестными переменными не две величины A и Ω , а три: A , Ω , k , т. е. записать их в виде

$$\left. \begin{aligned} X(A, \Omega, k) &= 0, \\ Y(A, \Omega, k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

или же в форме (2.84):

$$\left. \begin{aligned} X(q, q', \Omega, k) &= 0, \\ Y(q, q', \Omega, k) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

где q и q' — заданные функции A и Ω или только A .

Обычно величина A входит в уравнения (2.96) или (2.97) сложным образом через q и q' . Поэтому часто значительно проще будет определять из этих уравнений не величину A , а величину k (или другого параметра), задаваясь значениями A . В этом и состоит сущность шестого способа. Этот способ может иметь много вариантов в зависимости от сложности уравнений (2.96) или (2.97). Довольно универсальными могут быть следующие варианты.

1. Из уравнений (2.96) или (2.97) исключаем параметр k , в результате чего получаем уравнение

$$\Omega = \Omega(A), \quad (2.98)$$

к которому добавляем одно из уравнений (2.96) или (2.97), разрешенное в виде

$$k = f(A, \Omega). \quad (2.99)$$

Дальше на основании (2.98) и (2.99) легко строятся искомые зависимости $A(k)$ и $\Omega(k)$.

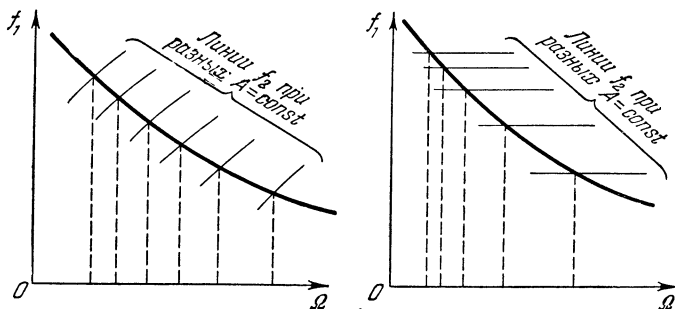


Рис. 2.13.

Решение (2.98) во многих практических задачах получается сразу в явном виде. В более сложных случаях после исключения k из уравнений (2.97) получаем уравнение вида

$$f_1(\Omega) = f_2(q, q') \quad \text{или} \quad f_1(\Omega) = f_2(q, q', \Omega). \quad (2.100)$$

В этом случае задача решается графически путем нанесения кривой $f_1(\Omega)$ и серии кривых $f_2(\Omega)$ при разных значениях $A = \text{const}$, что представлено на рис. 2.13, где показаны два варианта: 1) f_2 зависит

от A и Ω и 2) f_2 зависит только от A . Координаты всех точек пересечения и дают искомую зависимость (2.98), затем и значения k по формуле (2.99).

2. Если необходимо выбрать два параметра системы, то можно пользоваться вышеуказанным способом по отдельности для каждого параметра. Но можно поступить и иначе. Обозначим эти два параметра через k и T и запишем (2.96) в виде

$$X(A, \Omega, k, T) = 0, \quad Y(A, \Omega, k, T) = 0. \quad (2.101)$$

Выразим отсюда

$$k = f_1(A, \Omega), \quad T = f_2(A, \Omega). \quad (2.102)$$

По этим формулам, задаваясь разными значениями $A = \text{const}$, можно на плоскости параметров (рис. 2.14) построить линии $T(k)$ по параметрическим уравнениям $k = k(\Omega)$ и $T = T(\Omega)$, меняя Ω .

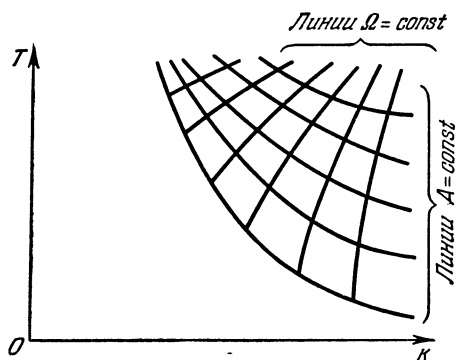


Рис. 2.14.

Таким образом получатся линии $A = \text{const}$. Затем, соединив между собой точки на этих линиях с одинаковыми значениями Ω , получим линии $\Omega = \text{const}$ (рис. 2.14). Полученная диаграмма позволит выбрать сразу два параметра системы T и k , исходя из желательных значений амплитуды A и частоты Ω автоколебаний или же исходя из требования отсутствия автоколебаний (об-

ласть на рис. 2.14, которая не заполнена кривыми). Пример такой диаграммы был дан на рис. 1.21 и 1.22.

Отметим, что все способы, кроме второго (стр. 109), могут применяться и к системам, содержащим элемент чистого запаздывания. Тогда в характеристическое уравнение добавляется в соответствующем месте множитель $e^{-\tau p}$, например:

$$Q(p) + R(p) e^{-\tau p} \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) = 0, \quad (2.103)$$

причем после подстановки $p = j\Omega$ в третьем способе формула (2.91) будет непосредственно в левой части содержать множитель $e^{-\tau j\Omega}$, а в первом, четвертом, пятом и шестом способах нужно разложить его на вещественную и мнимую части в виде

$$e^{-j\tau\Omega} = \cos \tau\Omega - j \sin \tau\Omega. \quad (2.104)$$

Все описанные выше способы относились к нелинейным системам первого класса, подчиняющимся уравнениям типа (2.71). Все они

в принципе эквивалентны друг другу. Выбор одного из этих шести способов для решения конкретной задачи диктуется удобствами расчета в каждом случае.

Для нелинейных систем первого класса другого типа, которые описываются уравнением вида (2.67):

$$Q(p)x + R_1(p)F_1(x, px) + R_2(p)F_2(x, px) = 0, \quad (2.105)$$

гармоническая линеаризация приводит к характеристическому уравнению

$$Q(p) + R_1(p)\left(q_1 + \frac{q'_1}{\Omega} p\right) + R_2(p)\left(q_2 + \frac{q'_2}{\Omega} p\right) = 0 \quad (2.106)$$

с двумя неизвестными A и Ω , входящими в коэффициенты q_1 , q'_1 , q_2 и q'_2 , которые вычисляются по формулам (2.76). Из сравнения (2.106) с (2.79) видно, что здесь будут справедливы первый, второй, четвертый и шестой из описанных выше способов решения задачи, если учесть только наличие не двух, а четырех коэффициентов, зависящих от неизвестной амплитуды A (в общем случае и от Ω). Третий же и пятый способы непосредственно применять не удастся, так как для характеристического уравнения (2.106) в общем случае нельзя написать выражений типа (2.91) и (2.93). Однако можно применить видоизменения этих способов. Так, для третьего способа из (2.106) при $p = j\Omega$ получаем уравнение

$$\frac{R_1(j\Omega)}{Q(j\Omega)} = -\frac{1}{q_1 + jq'_1} - \frac{R_2(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \frac{q_2 + jq'_2}{q_1 + jq'_1}. \quad (2.107)$$

При его графическом решении на рис. 2.10 вместо кривых $-\frac{1}{W_H}$ надо строить кривые, соответствующие всей правой части уравнения (2.107). Точно так же и при пятом способе в уравнениях (2.93) вместо величин q и q' будут стоять их комбинации, включающие в себя также функции от Ω .

В случае, если в уравнении системы (2.105) каждая из нелинейностей $F_1(x)$ и $F_2(x)$ будет однозначной нечетно-симметричной, из уравнения (2.106) при $p = j\Omega$ будем иметь

$$Q(j\Omega) + R_1(j\Omega)q_1(A) + R_2(j\Omega)q_2(A) = 0.$$

Выделив здесь вещественную и мнимую части, получим уравнения

$$X(q_1, q_2, \Omega) = 0, \quad Y(q_1, q_2, \Omega) = 0,$$

из которых можем выразить

$$q_1(A) = Z_1(\Omega), \quad q_2(A) = Z_2(\Omega),$$

и решение сведется к построению простых графиков типа рис. 2.12 с горизонтальными линиями q_1 и q_2 (вместо q') для разных значений A .

Остальные четыре способа, как уже говорилось, для системы, описываемой уравнением (2.105), остаются в прежнем виде.

В нелинейных системах второго класса со смешанной нелинейностью вида (2.35), пользуясь заменой (2.41), приходим к уравнению типа (2.71). Поэтому для таких систем все описанные выше шесть способов решения задачи остаются без изменения.

В нелинейных системах второго и третьего классов с двумя раздельными нелинейностями типа (2.34) получаются более сложные уравнения. Характеристическое уравнение может быть приведено к виду (2.106), но только с тем существенным отличием, что там будут коэффициенты q , q' , q_2 , q_2' , которые содержат, согласно (2.37), не две, а три неизвестные: A , A_2 , Ω . Поэтому к ним добавляется еще соотношение типа первого из (2.40). Так исследуются системы второго

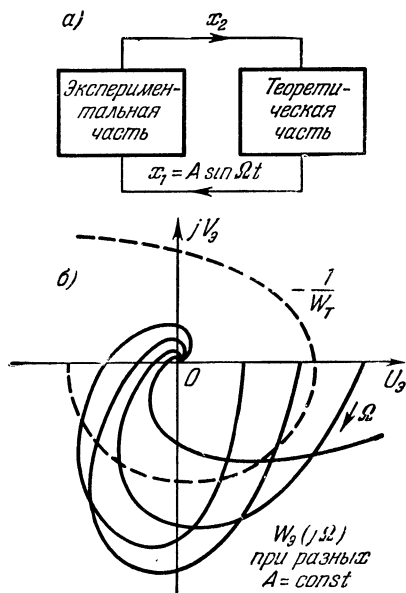


Рис. 2.15.

класса. Для систем же третьего класса в соотношение (2.40) будут введены члены типа (2.28). После подстановки величины A_2 из соотношения (2.40) в выражения для q_2 и q_2' , дальнейшее решение задачи будет аналогично решению задачи для систем первого класса с уравнением типа (2.106). О системах со многими однозначными нелинейностями см. [103].

Использование экспериментальных характеристик. При определении автоколебаний могут использоваться не только уравнения или передаточные функции, но также и экспериментально снятые частотные характеристики отдельных звеньев или крупных блоков системы. Пусть, например, исследуемая автоматическая система разбивается на две части (рис. 2.15, а), первая из которых выполнена в натуральном виде

или в виде действующего макета (экспериментальная часть), а вторая — только проектируется, и для нее составлены дифференциальные уравнения или передаточные функции (теоретическая часть).

Если экспериментальная часть линейна (что обнаруживается по независимости ее экспериментально снятых частотных характеристик от амплитуды колебаний входной величины), то расчет автоколебаний ведется по третьему способу, причем из теоретической части выделяется нелинейность, а экспериментальная часть присоединяется к линейным звеньям теоретической части, т. е. экспериментально снятая амплитудно-фазовая характеристика $W_3(j\Omega)$ войдет в состав $W_a(j\Omega)$ на рис. 2.10.

Если же экспериментальная часть содержит нелинейности (произвольного вида), то снятая с нее амплитудно-фазовая частотная характеристика для первой гармоники $W_3(j\Omega)$ будет иметь различное очертание при разных амплитудах колебаний A входной величины (рис. 2.15, б). Условием возникновения синусоидального периодического решения в такой системе (рис. 2.15, а), согласно частотному критерию, будет прохождение общей амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой цепи $W_3 W_T$ через точку -1 или

$$W_3 = -\frac{1}{W_T}. \quad (2.108)$$

В случае, если теоретическая часть системы линейна, W_T зависит только от частоты Ω . Нанеся в этом случае кривую

$$-\frac{1}{W_T(j\Omega)}$$

(пунктир на рис. 2.15, б), получим графическое решение уравнения (2.108), причем амплитуда и частота периодического решения определяются в точке пересечения кривой $-\frac{1}{W_T}$ с такой из кривых W_3 , которая имеет в этой точке точно такое же значение Ω , что и на кривой $-\frac{1}{W_T}$.

В случае же, если теоретическая часть системы тоже содержит нелинейность, то выражение ее амплитудно-фазовой характеристики W_T надо расчленить на два множителя, выделив часть, не зависящую от амплитуды:

$$W_T = W_{T.н}(A, \Omega) W_{T.л}(j\Omega).$$

Тогда уравнение (2.108) можно записать в виде

$$W_3 W_{T.н} = -\frac{1}{W_{T.л}}.$$

Для графического его решения нужно на рис. 2.15, б вместо семейства W_3 изобразить семейство суммарных кривых $W_3 W_{T.н}$ с текущим параметром Ω при разных $A = \text{const}$, а вместо $-\frac{1}{W_T}$ нанести кривую $-\frac{1}{W_{T.л}}$.

Близость искомого периодического решения к синусоидальному обеспечивается по-прежнему непропусканием высших гармоник в соответствующей части системы, причем наличие или отсутствие такого свойства внутри экспериментальной части системы видно непосредственно при снятии с нее частотных характеристик.

§ 2.4. Устойчивость периодического решения

Пусть одним из способов § 2.3 найдено приближенное периодическое решение в виде $x = A \sin \Omega t$ для заданного дифференциального уравнения, например (2.71) или (2.105). Чтобы определить, соответствует оно автоколебаниям или нет, нужно исследовать его

устойчивость, особенно при наличии одновременно двух или более периодических решений.

Строгий классический путь исследования устойчивости заключается в составлении линеаризованного дифференциального уравнения в малых отклонениях от исследуемого решения. Введем переменную $x = x^* + \Delta x$, где $x^* = A \sin \Omega t$. Тогда, согласно (2.71), указанное уравнение в малых отклонениях от периодического режима (уравнение в вариациях) будет

$$Q(p) \Delta x + R(p) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial p x} \right)^* p \Delta x \right] = 0, \quad (2.109)$$

где звездочкой обозначена подстановка $x = x^* = A \sin \Omega t$. Следовательно, частные производные, отмеченные звездочками, представляют собой периодические коэффициенты. Таким образом, исследование устойчивости (при малых отклонениях) найденного в § 2.3 периодического решения нелинейного уравнения (2.71) сводится к определению того, затухает или расходится решение линейного уравнения (2.109), т. е. вопрос сводится к исследованию устойчивости равновесия ($\Delta x = 0$) по линейному дифференциальному уравнению с периодическими коэффициентами. Аналогично обстоит дело и с системой, описываемой уравнением (2.105), а также с нелинейными системами второго и третьего классов.

Некоторый общий подход к исследованию устойчивости систем с периодическими коэффициентами имеется в известном труде А. М. Ляпунова (см. также [34], стр. 146 и [71], глава III). Имеется также ряд конкретных исследований разных авторов. Однако в подавляющем большинстве случаев исследование уравнений с периодическими коэффициентами весьма трудная, а часто невыполнимая задача. Поэтому обратимся к приближенным способам.

Один из *приближенных способов* состоит в замене периодических коэффициентов постоянными, равными их среднему значению за период. При этом уравнение (2.109) заменяется уравнением с постоянными коэффициентами:

$$[Q(p) + R(p)(\kappa + \kappa' p)] \Delta x = 0, \quad (2.110)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* d\psi, \quad \kappa' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial p x} \right)^* d\psi, \quad \psi = \Omega t. \quad (2.111)$$

Далее к уравнению (2.110) применяется любой из известных критериев устойчивости линейных систем (Гурвица, Михайлова, Найквиста).

Поскольку здесь одно уравнение (2.109) заменено другим (2.110), то далеко не всегда результат исследования будет правильным для уравнения (2.109). Можно лишь утверждать, что для некоторого класса задач такой способ пригоден [51] и что в тех конкретных задачах, к которым он применялся, результат оказывался правильным.

Так, для примера, рассмотренного в § 1.3, имеем, согласно (1.68) — (1.70), следующие уравнения системы в малых отклонениях от периодического режима:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) \Delta x_2 &= -k_1 \Delta x_4, \\ \Delta x_3 &= \left(\frac{dF}{dx} \right)^* \Delta x, \quad \Delta x = \Delta x_2 - k_{o.c} \Delta x_4, \\ (T_2 p + 1) p \Delta x_4 &= k_2 \Delta x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

Периодический коэффициент $\left(\frac{dF}{dx} \right)^*$ заменим средним его значением за период (2.111). Поскольку $x = A \sin \psi$, то

$$\frac{dx}{d\psi} = A \cos \psi = \sqrt{A^2 - x^2}.$$

С учетом этого, сдвинув пределы интегрирования на $-\frac{\pi}{2}$, из (2.111) получаем осредненный за период коэффициент

$$\kappa = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{dF}{dx} \right)^* d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{+A} \frac{dF}{dx} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Производная $\frac{dF}{dx}$, согласно рис. 2.16, есть мгновенный импульс площадью $2c$ при $x=0$. Следовательно, подынтегральная функция везде равна нулю кроме точки $x=0$, где $\sqrt{A^2 - x^2} = A$, и как постоянная величина выносится за знак интеграла. Интеграл от оставшегося выражения $\frac{dF}{dx} dx$ даст площадь под кривой $\frac{dF}{dx}$ (рис. 2.16), равную $2c$. Следовательно, осредненное за период значение периодического коэффициента будет

$$\kappa = \frac{2c}{\pi A}. \quad (2.113)$$

Подставив его в уравнения системы (2.112) вместо $\left(\frac{dF}{dx} \right)^*$, напишем характеристическое уравнение:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} \kappa) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 \kappa = 0. \quad (2.114)$$

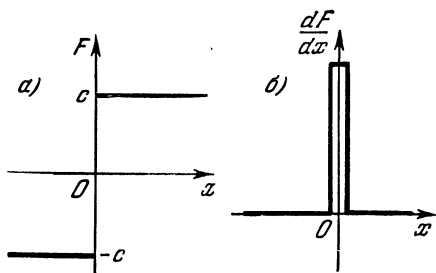


Рис. 2.16.

По критерию Гурвица условие устойчивости будет

$$(T_1 + T_2)(1 + T_1 k_{0.c} x) - T_1 T_2 (k_1 + k_{0.c}) k_2 x > 0,$$

или с учетом (2.113)

$$\pi A (T_1 + T_2) + 2c T_1 k_2 (T_1 k_{0.c} - T_2 k_1) > 0.$$

Подставив сюда найденное в § 1.3 значение амплитуды периодического решения A (1.85), получаем условие устойчивости периодического решения в виде

$$T_2 k_1 - T_1 k_{0.c} > 0,$$

которое совпадает с условием существования периодического решения (1.87). Следовательно, найденное в примере § 1.3 периодическое решение устойчиво (т. е. оно представляет собой автоколебания) во всей области своего существования.

Другая категория приближенных способов исследования устойчивости периодического решения [43] и [47], которые и будут дальше главным образом рассматриваться, базируется на следующих соображениях.

Классический прием исследования устойчивости периодического решения состоит в исследовании переходного процесса для малых отклонений от этого решения по линейному уравнению с периодически меняющимися коэффициентами. Каков бы ни был характер такого переходного процесса, для определения изменения полной координаты x в процессе установления периодического решения нужно полученные из (2.109) малые значения функции $\Delta x(t)$ прибавить к значениям $x = A \sin \Omega t$ периодического решения¹).

Не отделяя малых отклонений переходного процесса, будем рассматривать весь этот нестационарный колебательный процесс в целом, полагая, что вблизи исследуемого периодического решения для переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции, он имеет вид затухающих или расходящихся колебаний, как показано на рис. 2.17, *a* (для устойчивого периодического решения) и на рис. 2.17, *б* (для неустойчивого). При этом, поскольку рассматриваемые нестационарные колебания $x(t)$ близки к синусоидальным, они достаточно хорошо описываются прежним гармонически линеаризованным характеристическим уравнением (2.79):

$$Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) = 0, \quad (2.115)$$

или же (2.106):

$$Q(p) + R_1(p) \left(q_1 + \frac{q'_1}{\Omega} p \right) + R_2(p) \left(q_2 + \frac{q'_2}{\Omega} p \right) = 0. \quad (2.116)$$

¹) В дальнейшем будут рассматриваться только такие случаи, когда в результате получится кривая некоторого колебательного процесса, близкого к синусоидальному, но с изменяющейся амплитудой (нестационарные колебания).

Обозначив всю левую часть для краткости через $L(p)$, приведем характеристическое уравнение к виду

$$L(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n = 0, \quad (2.117)$$

где часть коэффициентов содержит величины q и q' , в формулах для которых (2.76) амплитуда будет теперь не постоянной A , как прежде, а переменной $a(t)$, мало отклоняющейся от A , т. е. медленно меняющейся с течением времени вблизи значения A ; таким образом, $q = q(a, \Omega)$, $q' = q'(a, \Omega)$ или же $q = q(a)$, $q' = q'(a)$.

Такой подход является обоснованным для рассматривавшихся выше систем, у которых приведенная линейная часть устойчива или нейтральна и не пропускает высших гармоник, если учесть введенное в § 2.2 условие, что с изменением амплитуды вблизи ее значения для

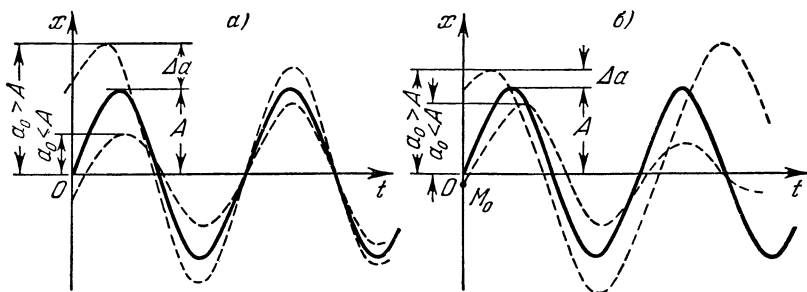


Рис. 2.17.

данного периодического решения коэффициенты гармонической линеаризации q и q' и их производные по a меняются достаточно плавно. В соответствии с § 2.3 добавляется еще требование, чтобы для характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы (2.115) или (2.116) все определители Гурвица, кроме предпоследнего H_{n-1} , были положительны (величина же H_{n-1} меняется около нуля). Это обеспечивает близость рассматриваемой нелинейной системы к линейной, находящейся на колебательной границе устойчивости. Следовательно, это обеспечивает и колебательный характер процессов в данной нелинейной системе (рис. 2.17), близких для переменной x к синусоидальным, вблизи данного периодического режима при любом малом изменении параметров системы и величины a (возможно, с некоторым малым изменением частоты Ω). Эти исходные положения хорошо оправдываются на практике для большинства нелинейных автоматических систем.

С точки зрения простоты решения необходимо иметь в виду, что указанное здесь требование положительности всех определителей Гурвица, кроме предпоследнего H_{n-1} , для систем третьего и четвертого порядков означает просто положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (2.117) гармонически линеаризованной

замкнутой системы, а для систем второго порядка — положительность двух крайних коэффициентов. Для систем выше четвертого порядка вместо проверки положительности указанных определителей Гурвица для уравнения (2.117) можно потребовать выполнения любого из критериев устойчивости (Гурвица, Михайлова, Найквиста) для многочлена, имеющего степень на две единицы ниже степени уравнения (2.117), а именно:

$$L_1(p) = \frac{L(p)}{p^2 + \Omega^2}. \quad (2.118)$$

Все это обеспечивает наличие в характеристическом уравнении (2.117) гармонически линеаризованной системы отрицательных вещественных частей у всех корней кроме одной пары чисто мнимых корней (чем и определяется близость поведения данной нелинейной системы к линейной системе, находящейся на колебательной границе устойчивости).

Итак, для исследования устойчивости периодического решения дадим отклонение величине амплитуды на малое значение Δa , т. е. вместо A в характеристическое уравнение (2.117) подставим $a = A + \Delta a$

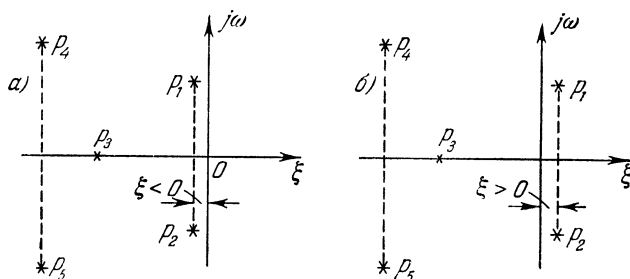


Рис. 2.18.

Это вызовет некоторое изменение коэффициентов уравнения (2.117), вследствие чего указанная выше пара чисто мнимых корней $p_{1,2}$, определявшая значение $a = A$, немного сместится влево или вправо с мнимой оси (рис. 2.18), приобретя малую вещественную часть ξ ($\xi < 0$ или $\xi > 0$). Она будет соответствовать медленно затухающим или медленно расходящимся колебаниям, которые показаны пунктирными линиями на рис. 2.17. Все остальные корни характеристического уравнения (2.117), если они находятся слева от мнимой оси, не могут существенно влиять на эти процессы, по крайней мере спустя некоторый конечный промежуток времени после начала процесса. Это аналогично картине изменения процессов в линейной системе, находящейся на колебательной границе устойчивости, при малом изменении некоторых ее параметров, входящих в коэффициенты характеристического уравнения (2.117) так же, как входят в них q и

q' , причем изменению параметров линейной системы соответствует здесь изменение коэффициентов q и q' за счет изменения амплитуды a колебаний при неизменных параметрах данной системы.

Первый критерий. Теперь очевидно, что в этих условиях для устойчивости периодического решения, т. е. для получения картины процессов установления автоколебаний типа рис. 2.17, а, надо потребовать, чтобы при $\Delta a > 0$ уравнение (2.117) удовлетворяло критерию Гурвица, а при $\Delta a < 0$ удовлетворялись бы все условия критерия Гурвица кроме одного: $H_{n-1} < 0$ (рис. 2.19). Тогда при $\Delta a > 0$ процесс будет затухать, а при $\Delta a < 0$ — расходиться, как и показано на рис. 2.17, а. Напомним, что при $\Delta a = 0$, т. е. для самого периодического решения, согласно (2.87), $H_{n-1} = 0$.

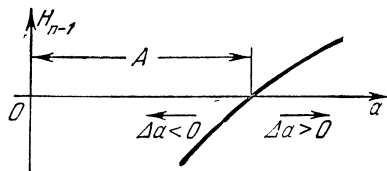


Рис. 2.19.

Заметим, что здесь говорилось лишь об отклонении амплитуды $a = A + \Delta a$. Между тем в коэффициенты характеристического уравнения может в общем случае входить и частота Ω , которая тоже может получать малые изменения в процессе установления автоколебаний. Поэтому надо потребовать, чтобы указанный приближенный критерий устойчивости периодического решения выполнялся не только при данном значении Ω (исследуемого периодического решения), но и при малых отклонениях $\Delta\omega$, если величина Ω входит в выражения для коэффициентов характеристического уравнения (2.117).

Выразим описанный критерий в компактной аналитической форме. Требуется определенное изменение знака предпоследнего определителя Гурвица H_{n-1} при малом отклонении Δa . Следовательно (рис. 2.19), для устойчивости периодического решения требуется, во-первых, чтобы

$$\left(\frac{\partial H_{n-1}}{\partial a}\right)^* > 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial H_{n-1}}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial a}\right)^* > 0, \quad (2.119)$$

где звездочка означает подстановку величины $a = A$, соответствующей периодическому решению, устойчивость которого исследуется¹⁾. При этом знак выражения (2.119) не должен меняться при малом отклонении ω в обе стороны от значения Ω , соответствующего исследуемому периодическому решению, если величина Ω входит в коэффициенты q и $\frac{q'}{\Omega}$.

Во-вторых, при значениях A и Ω , отвечающих исследуемому периодическому решению, должны быть положительными все остальные определители Гурвица, за исключением уже рассмотренного

¹⁾ Второе из выражений (2.119) может оказаться удобным потому, что a входит в H_{n-1} не непосредственно, а в виде коэффициентов q и q' , зависящих от a (иногда и от Ω).

определителя H_{n-1} . Для систем третьего и четвертого порядков это эквивалентно просто положительности всех коэффициентов характеристического уравнения. Поэтому проверку указанного второго условия, которое эквивалентно выполнению критерия устойчивости для многочлена (2.118), приходится производить только при исследовании систем пятого и более высоких порядков.

Этим критерием особенно удобно пользоваться при определении периодического решения вторым способом (§ 2.3), хотя это, конечно, не исключает его использования и в других случаях. Так, в примере § 1.3, согласно (1.81) и (1.89), имеем:

$$\begin{aligned} H_{n-1} &= (T_1 + T_2)(1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) - T_1 T_2 (k_1 + k_{o.c}) k_2 q = \\ &= T_1 + T_2 + \frac{4c}{\pi a} T_1 k_2 (T_1 k_{o.c} - T_2 k_1) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial a} = \frac{4c}{\pi a^2} T_1 k_2 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c}).$$

Критерий (2.119) выполняется при $T_2 k_1 - T_1 k_{o.c} > 0$, что соответствует устойчивости найденного в § 1.3 периодического решения (автоколебаний) во всей области его существования (1.87).

Второй критерий. Рассмотрим далее следующий вариант приближенного критерия устойчивости такого же типа, в котором вместо критерия Гурвица используется критерий Михайлова.

Напишем выражение кривой Михайлова для характеристического уравнения (2.115) или (2.116) путем подстановки в него $p = j\omega$:

$$L(j\omega) = Q(j\omega) + R(j\omega) \left(q + \frac{q'}{\Omega} j\omega \right) \quad (2.120)$$

или же

$$L(j\omega) = Q(j\omega) + R_1(j\omega) \left(q_1 + \frac{q'_1}{\Omega} j\omega \right) + R_2(j\omega) \left(q_2 + \frac{q'_2}{\Omega} j\omega \right),$$

где через ω обозначен текущий параметр кривой Михайлова, в отличие от частоты Ω периодического решения, которая входит в коэффициенты этих выражений. Выделим в этих выражениях вещественную и мнимую части:

$$L(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (2.121)$$

в коэффициенты которых входят амплитуда A и, в общем случае, также частота Ω исследуемого периодического решения.

Как известно, для случая периодического решения, т. е. при наличии пары чисто мнимых корней $p = \pm j\Omega$ в характеристическом уравнении, кривая Михайлова проходит через начало координат (рис. 2.20), причем в точке кривой, совпадающей с началом коорди-

нат, параметр ω равняется абсолютной величине мнимого корня Ω (частоте периодического решения). Поэтому рассмотренные выше выражения (2.83), (2.84) и др. являются частным случаем (2.121) для точки, находящейся в начале координат (рис. 2.20).

Дадим малое отклонение амплитуде: $a = A + \Delta a$, вследствие чего коэффициенты выражения (2.121) изменятся и кривая Михайлова отклонится от начала координат в ту или другую сторону (на рис. 2.20 показаны лишь небольшие участки отклоненных кривых 1 и 2). В том случае, когда критерий Михайлова, известный из линейной теории автоматического регулирования, удовлетворяется (кривая 1 рис. 2.20), то в системе будут затухающие колебания, а когда он не удовлетворяется (кривая 2), — расходящиеся колебания.

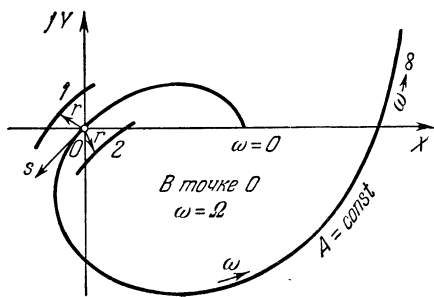


Рис. 2.20.

Следовательно, для устойчивости периодического решения, т. е. для получения картины процессов, изображенной на рис. 2.17, а, требуется, чтобы при $\Delta a > 0$ критерий Михайлова удовлетворялся, а при $\Delta a < 0$ — не удовлетворялся.

Этим критерием удобно пользоваться, когда частота и амплитуда периодического решения определяются графически по четвертому способу (§ 2.3). При этом надо иметь в виду, что кривые, изображенные на рис. 2.11, будут точно совпадать с кривыми Михайлова (рис. 2.20) только тогда, когда частота Ω не входит в коэффициенты характеристического уравнения. В противном случае кривые рис. 2.11 несколько отличаются от употребляемых на рис. 2.20 кривых Михайлова. Это очевидно из сравнения равенств (2.81) и (2.120).

Третий критерий. Аналитически тот же критерий устойчивости периодического решения можно выразить следующим образом. Перемещение точки O кривой Михайлова (рис. 2.20) при малом изменении a можно характеризовать вектором r с проекциями

$$X_r = \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* \Delta a, \quad Y_r = \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* \Delta a; \quad (2.122)$$

перемещение же координат кривой Михайлова при малом изменении ω определяется вектором s (рис. 2.20) с проекциями

$$X_s = \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* \Delta \omega, \quad Y_s = \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* \Delta \omega. \quad (2.123)$$

В обоих случаях звездочка соответствует подстановке значений $a = A$ и $\omega = \Omega$ исследуемого периодического решения в частные производные от выражений X и Y , входящих в (2.121). Эта

подстановка соответствует начальному положению точки O . Найдем угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{s} . По правилам векторной алгебры (из формул векторного произведения) имеем:

$$\sin(\widehat{rs}) = \frac{X_r Y_s - Y_r X_s}{rs}, \quad (2.124)$$

где r и s — модули соответствующих векторов. Из рис. 2.20 видно, что если взять $\Delta\omega > 0$, то для выполнения высказанного выше (второго) критерия устойчивости периодического решения требуется, чтобы вектор \mathbf{s} был отклонен от вектора \mathbf{r} против часовой стрелки при $\Delta a > 0$ и по часовой стрелке при $\Delta a < 0$. Отсюда, согласно (2.124), следует:

$$\frac{X_r Y_s - Y_r X_s}{rs} \begin{cases} > 0 & \text{при } \Delta a > 0 \text{ и } \Delta\omega > 0, \\ < 0 & \text{при } \Delta a < 0 \text{ и } \Delta\omega > 0. \end{cases}$$

Поскольку величины r и s положительны как модули векторов, то после подстановки сюда значений (2.122) и (2.123) получаем, что для устойчивости периодического решения требуется, *во-первых*, чтобы выполнялось условие [49]

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0, \quad (2.125)$$

где звездочка означает, что в частные производные, взятые в общем виде из выражения (2.121), надо подставить значения $a = A$ и $\omega = \Omega$ для периодического решения, устойчивость которого исследуется. При этом надо проверить еще, чтобы знак неравенства (2.115) сохранялся при малом отклонении Ω , если последняя входит в коэффициенты выражения (2.121). Производные от X и Y по a , входящие в (2.125), удобно вычислять в виде

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial a} + \dots$$

Во-вторых, кроме выполнения условия (2.125) требуется, чтобы весь ход остальной части кривой Михайлова (за исключением одной точки O в начале координат), как показано на рис. 2.20, удовлетворял критерию Михайлова. Последнее условие надо специально проверять только для систем пятого порядка и выше. Что же касается систем третьего и четвертого порядков, то это сводится к простому требованию положительности всех коэффициентов характеристического уравнения (2.117).

Заметим, что условие (2.125) эквивалентно прежнему условию (2.119), а указанное здесь дополнительное второе условие эквивалентно прежнему условию положительности всех остальных определителей Гурвица (кроме H_n) или выполнению критерия устойчивости для многочлена (2.118).

Критерием (2.125) особенно удобно пользоваться, когда амплитуда и частота периодического решения определяются первым, пятым или шестым способом (§ 2.3), хотя не исключается возможность его применения и во всех других случаях.

Так, для примера § 1.3, согласно (1.81) и (1.79), имеем:

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{o.c}) k_2 q - (T_1 + T_2) \omega^2, \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) \omega - T_1 T_2 \omega^3, \end{aligned} \right\} \quad q = \frac{4c}{\pi a}, \quad \frac{dq}{da} < 0$$

и, следовательно, при положительных значениях параметров системы

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* &= (k_1 + k_{o.c}) k_2 \frac{dq}{da} < 0, & \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* &= -2(T_1 + T_2) \Omega < 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* &= T_1 k_2 k_{o.c} \Omega \frac{dq}{da} < 0, & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* &= 1 + T_1 k_2 k_{o.c} q - \\ & & - 3T_1 T_2 \Omega^2 &= -2T_1 T_2 \Omega^2 < 0; \end{aligned}$$

последнее вытекает из второго равенства (1.83).

Критерий (2.125) поэтому принимает вид

$$-T_2 (k_1 + k_{o.c}) \frac{dq}{da} + (T_1 + T_2) k_{o.c} \frac{dq}{da} > 0.$$

Но так как $\frac{dq}{da} < 0$, то это неравенство сводится к следующему:

$$T_2 k_1 - T_1 k_{o.c} > 0.$$

Таким образом, периодическое решение, найденное в § 1.3, будет устойчивым во всей области его существования (1.87).

Приведем еще другой, аналитический, вывод третьего критерия устойчивости (2.125) для периодического решения [47].

Периодическое решение $x = A \sin \Omega t$ можно, как известно, записать в комплексной форме (рис. 2.6, а):

$$x = A \operatorname{Im} e^{j\Omega t}. \quad (2.126)$$

Переходный процесс в системе, который получается после возникновения малых отклонений амплитуды Δa и частоты $\Delta \omega$, запишем приближенно в виде

$$x = (A + \Delta a) e^{-\xi t} \sin (\Omega + \Delta \omega) t \quad (2.127)$$

или по аналогии с (2.126) в комплексной форме

$$x = (A + \Delta a) \operatorname{Im} e^{j(\Omega + \Delta \omega + j\xi)t}. \quad (2.128)$$

Поскольку решение (2.126) определяется, согласно (2.82), условием

$$X(A, \Omega) + jY(A, \Omega) = 0, \quad (2.129)$$

то решение (2.128) формально соответствует условию

$$x(A + \Delta a, \Omega + \Delta\omega + j\xi) + jY(A + \Delta a, \Omega + \Delta\omega + j\xi) = 0.$$

Разложим это выражение в ряд Тейлора, обозначив $\Omega + \Delta\omega + j\xi = \omega$. Используя затем (2.129), получим:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \Delta a + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* (\Delta\omega + j\xi) + j \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \Delta a + j \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* (\Delta\omega + j\xi) = 0,$$

где звездочка сверху означает подстановку в частные производные значений $a = A$ и $\omega = \Omega$, соответствующих исследуемому периодическому решению.

Выделив здесь вещественную и мнимую части, будем иметь два равенства, исключив из которых $\Delta\omega$, найдем:

$$\xi = - \frac{\left(\frac{\partial X \partial Y}{\partial a \partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y \partial X}{\partial a \partial \omega}\right)^*}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} \Delta a.$$

Но, как видно из (2.127), переходный процесс только тогда будет с обеих сторон сходиться к автоколебаниям с амплитудой A , когда Δa и ξ имеют одинаковый знак. Следовательно, условие устойчивости периодического решения будет

$$\left(\frac{\partial X \partial Y}{\partial a \partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y \partial X}{\partial a \partial \omega}\right)^* > 0,$$

что и требовалось доказать.

Четвертый критерий. При применении третьего способа определения периодического решения (§ 2.3) удобно пользоваться приближенным частотным критерием устойчивости [19].

Если разбивать систему условно на линейную часть и на нелинейную (рис. 1.12, б), то в соответствии с формулой (2.66) можно написать выражение амплитудно-фазовой характеристики приведенной линейной части ¹⁾

$$W_n = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

и, согласно (2.28), выражение для амплитудно-фазовой характеристики для нелинейности (по первой гармонике)

$$W_n = q + jq'.$$

Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи всей системы (по первой гармонике) при этом будет

$$W = W_n W_n = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} (q + jq'). \quad (2.130)$$

¹⁾ Это справедливо только для систем первого класса с уравнением типа (2.115).

Поэтому уравнение (2.91), использованное в третьем способе (§ 2.3), можно трактовать как приравнивание амплитудно-фазовой характеристики W отрицательной единице при $\omega = \Omega$, что соответствует прохождению графика амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой цепи всей системы через точку C (рис. 2.21, а). Это и является, как известно, в частотном критерии Найквиста условием появления синусоидальных колебаний с частотой Ω в замкнутой системе.

Дадим теперь в коэффициентах выражения W (2.130) отклонение величине амплитуды: $a = A + \Delta a$. Тогда амплитудно-фазовая характеристика сместится (кривая 1 или 2 на рис. 2.21, а). Если при этом

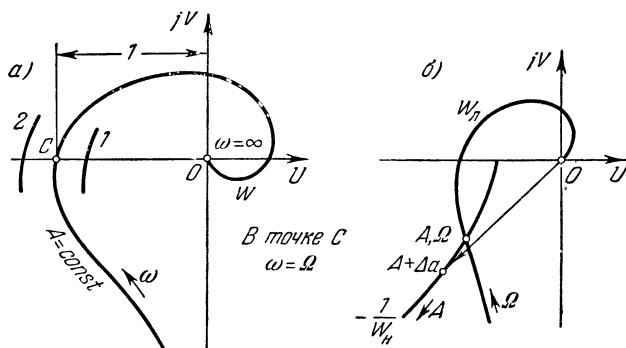


Рис. 2.21.

частотный критерий устойчивости Найквиста будет удовлетворяться (например, кривая 1), то колебания будут затухать, в противном случае (кривая 2) они будут расходиться. Напомним, что рассматриваются только системы, в которых разомкнутая цепь устойчива или нейтральна, так как $Q(p)$ не имеет чисто мнимых корней и корней с положительной вещественной частью.

Поэтому, чтобы имела место картина процессов, показанная на рис. 2.17, а, т. е. для устойчивости периодического решения, требуется, чтобы при $\Delta a > 0$ частотный критерий удовлетворялся (кривая 1 рис. 2.21, а), а при $\Delta a < 0$ — не удовлетворялся (кривая 2). Это должно соблюдаться также и при малых изменениях Ω в том случае, если Ω входит в выражения коэффициентов q и q' .

Поскольку в третьем способе (§ 2.3) строится не вся характеристика W в целом, а по отдельности в виде кривых W_d и $-\frac{1}{W_n}$ (рис. 2.10), то желательно переформулировать и данный приближенный критерий устойчивости периодического решения. Устойчивость периодического решения определяется охватом (при $\Delta a < 0$) и не охватом (при $\Delta a > 0$) характеристикой W точки C (рис. 2.21, а). Это соответствует не охвату характеристикой W_d конца вектора $-\frac{1}{W_n}$

при увеличенном значении амплитуды $a = A + \Delta a$ (рис. 2.21, б) и охвату — при уменьшенном.

Поэтому для устойчивости периодического решения требуется, чтобы характеристика W_d не охватывала точку характеристики $-\frac{1}{W_H}$ с увеличенной амплитудой $A + \Delta a$; иначе говоря, требуется, чтобы *направление отсчета значений A вдоль характеристики нелинейности $-\frac{1}{W_H}$ в точке пересечения выходило изнутри амплитудно-фазовой характеристики приведенной линейной части W_d наружу* (рис. 2.21, б).

В тех случаях, когда коэффициенты q и q' зависят от Ω , надо проследить выполнение этого критерия при малых отклонениях величины Ω в обе стороны от значения частоты исследуемого периодического решения. Это можно проверить по соседним кривым $-\frac{1}{W_H}$ из семейства их, показанного на рис. 2.10.

Этот критерий выведен только для систем первого класса с уравнениями типа (2.115), в то время как все предыдущие критерии остаются без изменения и для систем типа (2.116) и др.

В заключение заметим, что приближенные критерии устойчивости периодического решения, связанные с критериями Михайлова и Найквиста, а именно аналитический (2.125) и графические (рис. 2.20 и 2.21), могут применяться и к нелинейным системам, содержащим элемент чистого запаздывания, как, например, в уравнении (2.103). При этом на рис. 2.21, б множитель $e^{-j\tau\omega}$ должен быть включен в состав характеристики приведенной линейной части.

Показатель затухания. По аналогии с линейными системами показателем затухания можно назвать величину ξ вещественной части, которая появляется у пары мнимых корней при отклонении системы от периодического решения (рис. 2.18). Поскольку здесь рассматриваются малые отклонения от периодического решения, то и показатель затухания ξ в данном параграфе считается величиной малой. Величину ξ можно определить путем подстановки $p = \xi + j\omega$ в характеристическое уравнение (2.117), причем из-за малости ξ результат этой подстановки, используя разложение в ряд, можно записать в виде

$$L(\xi + j\omega) = L(j\omega) + \xi L'(j\omega) = 0. \quad (2.131)$$

Здесь штрихом обозначена первая производная от левой части характеристического уравнения L по p с последующей подстановкой $p = j\omega$, где ω есть значение частоты колебаний, которая может претерпевать малые отклонения от значения Ω в исследуемом периодическом решении. Амплитуда a , входящая в коэффициенты уравнения (2.117), считается здесь независимой переменной, тоже мало отклоняющейся от ее значения A в исследуемом периодическом решении.

Выделив в уравнении (2.131) вещественную и мнимую части, получим:

$$X(a, \omega) + \xi X_1(a, \omega) = 0, \quad Y(a, \omega) + \xi Y_1(a, \omega) = 0, \quad (2.132)$$

где фигурируют вещественные и мнимые части следующих выражений:

$$L(j\omega) = X(a, \omega) + jY(a, \omega), \quad L'(j\omega) = X_1(a, \omega) + jY_1(a, \omega).$$

Из двух уравнений (2.132) определяются две неизвестные ω и ξ как функции амплитуды a для переходных процессов вблизи периодического решения. Основным интерес представляет при этом величина показателя затухания

$$\xi = f(q, q') = \varphi(a). \quad (2.133)$$

Функции f и φ символизируют то, что амплитуда a входит в выражения L и L' не непосредственно, а через коэффициенты q и q' , зависящие от a . Как видим, величина показателя затухания ξ

в нелинейной системе, в отличие от линейной, зависит не только от параметров системы, но также и от величины амплитуды колебаний a .

Для устойчивости периодического решения требуется, во-первых, чтобы согласно рис. 2.22 выполнялось неравенство

$$\left(\frac{d\xi}{da}\right)^* = \frac{\partial f}{\partial q} \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^* + \frac{\partial f}{\partial q'} \left(\frac{\partial q'}{\partial a}\right)^* < 0, \quad (2.134)$$

причем это неравенство должно удовлетворяться также при малых изменениях ω около значения Ω , если последняя входит в выражения q и q' . Неравенство (2.134) эквивалентно неравенствам (2.119) и (2.125). Во-вторых, нужно выполнить еще второе условие в том виде, как оно сформулировано после формулы (2.119) или (2.125).

Так, для примера § 1.3, согласно (1.81), имеем:

$$L(p) = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q, \\ L'(p) = 3 T_1 T_2 p^2 + 2(T_1 + T_2) p + 1 + T_1 k_2 k_{o.c} q.$$

Поэтому уравнения (2.132) принимают вид

$$(k_1 + k_{o.c}) k_2 q - (T_1 + T_2) \omega^2 + \xi (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q - 3 T_1 T_2 \omega^2) = 0, \\ (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) \omega - T_1 T_2 \omega^3 + 2\xi (T_1 + T_2) \omega = 0.$$

Из второго уравнения получаем:

$$\omega^2 = \frac{1 + T_1 k_2 k_{o.c} q}{T_1 T_2} + \frac{2(T_1 + T_2)}{T_1 T_2} \xi. \quad (2.135)$$

Подставляя ω^2 в первое уравнение и используя (1.89), находим $\xi(a)$ в виде (1.102):

$$\xi = -\frac{T_1 + T_2}{2T_1 T_2} \frac{\Delta a}{Ha + D}, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{d\xi}{da} \right)_{a=A} < 0, \quad (2.136)$$

что и требовалось показать (см. (2.134)). Как видим, здесь показатель затухания в первом приближении пропорционален величине отклонения Δa амплитуды колебаний от ее значения в периодическом процессе, так как стоящая в знаменателе (2.136) величина a мало изменяется. По формуле (2.135) определяется закон изменения частоты $\omega(a)$.

§ 2.5. Сравнение с другими приближенными методами для систем второго порядка

Развиваемый в настоящей книге метод гармонической линеаризации служит для исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений, близких к синусоидальным. Для этой же цели применяются также различные варианты метода малого параметра, асимптотических методов и др. Поэтому представляет интерес сравнение получаемых результатов.

Идея метода малого параметра заключается в следующем. Произвольно заданную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.137)$$

решение которой ищется, представляют в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = & F_{i0}(t, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon F_{i1}(t, x_1, \dots, x_n) + \\ & + \varepsilon^2 F_{i2}(t, x_1, \dots, x_n) + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.138)$$

где ε — малый параметр, причем решение $x_i^*(t)$ «порождающей» системы

$$\frac{dx_i^*}{dt} = F_{i0}(t, x_i^*, \dots, x_n^*) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.139)$$

известно.

При достаточно малом значении ε заданная система (2.137) будет близка к порождающей системе (2.139). Предполагается, что при этом и неизвестное нам решение $x_i(t)$ заданной системы (2.137) будет близко к известному решению $x_i^*(t)$ порождающей системы (2.139). Однако, чтобы это последнее предположение оправдывалось, нужно выполнение некоторых ограничивающих задачу условий, так как, несмотря на малое отличие системы (2.137) от (2.139), различие между решениями $x_i(t)$ и $x_i^*(t)$ в общем случае может оказаться большим не только количественно, но даже и качественно.

Поэтому всегда, когда одна система уравнений (2.137) заменяется другой (2.139), даже мало отличающейся, необходимо выявлять усло-

вия, при которых известному решению $x_i^*(t)$ системы (2.139) отвечает единственное решение $x_i(t)$ системы (2.137), близкое к $x_i^*(t)$. При этом решение $x_i(t)$ при $\varepsilon = 0$ должно обращаться в $x_i^*(t)$, так же как система (2.137), согласно (2.138), при $\varepsilon = 0$ обращается в порождающую (2.139). Решению такого рода вопроса для рассматриваемого метода гармонической линеаризации и был посвящен § 2.2.

Для сравнения различных методов рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad (2.140)$$

полагая, что его можно привести к виду ¹⁾

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (2.141)$$

где ε — малый параметр, причем

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \omega_0^2 x - F\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (2.142)$$

Другими словами, при отыскании периодического решения полагаем, что нелинейное уравнение (2.140) близко к линейному

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.143)$$

которое будет в данном случае играть роль порождающего уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнения релейной системы автоматического регулирования в виде (см. [49], стр. 95)

$$T_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + k_1 F_1(x) = 0, \quad (2.144)$$

причем $F_1(x)$ задана как петлевая релейная функция, изображенная на рис. 2.23, а. Это уравнение имеет вид (2.140), где

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{T_1} \frac{dx}{dt} + \frac{k_1}{T_1} F_1(x). \quad (2.145)$$

Приведя уравнение данной системы (2.144) к виду (2.141), получим:

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \left[\omega_0^2 x - \frac{1}{T_1} \frac{dx}{dt}\right] - \left[\frac{k_1}{T_1} F_1(x)\right], \quad (2.146)$$

где ω_0^2 пока неизвестно. Смысл последнего выражения состоит в том, что петлевая нелинейная функция $F_1(x)$ (рис. 2.23, а) содержит в себе как усиление, эквивалентное члену $\omega_0^2 x$, так и запаздывание в срабатывании реле гистерезисного типа, вызывающее отставание колебаний по фазе, эквивалентное тому, которое создается членом $-\frac{1}{T_1} \frac{dx}{dt}$.

¹⁾ О другом случае см. главу VII.

В самом деле, если бы петли не было (рис. 2.23, б), то колебания переменной x (рис. 2.23, в) передавались бы без смещения по фазе (рис. 2.23, г). Наличие петли (рис. 2.23, а) приводит к отставанию фазы колебаний (рис. 2.23, д). Аналогичный качественный результат дает и линейное выражение

$$\left[\omega_0^2 x - \frac{1}{T_1} \frac{dx}{dt} \right],$$

как показано на рис. 2.23, ж и з, хотя формы кривых и различны. Из сравнения рис. 2.23, д и з видно, что написанное линейное выражение при синусоидальных колебаниях x может служить первой

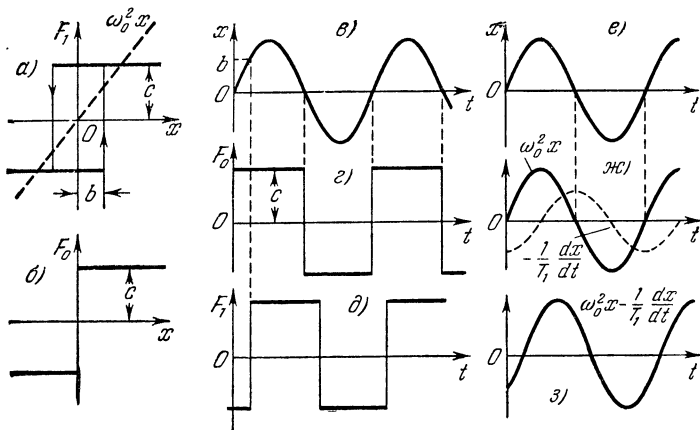


Рис. 2.23.

(основной) гармоникой колебаний переменной F_1 при соответствующем подборе частоты и амплитуды колебаний переменной x . Тогда линейный и нелинейный члены в правой части выражения (2.146) будут различаться только на величину высших гармоник, т. е. *остаточная нелинейность* $\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ соответствует высшим гармоникам колебаний.

Чрезвычайно важно при этом отметить, что для приведения нелинейного уравнения второго порядка (2.140) к виду (2.141) присутствие линейного члена с первой производной (см. выражение (2.146)) при наличии петлевой нелинейности (рис. 2.23, а) совершенно обязательно, так как один линейный член $\omega_0^2 x$ не будет соответствовать изучаемой картине колебаний даже качественно, ибо он не отражает смещение фазы колебаний. Наоборот, при отсутствии петли (рис. 2.23, б) линейный член с первой производной должен отсутствовать, чтобы можно было считать, что данное нелинейное уравнение приводимо к виду (2.141). Заметим также, что если бы петля была не гистересе-

зисной, а форсирующей (опережающей), т. е. с обратным направлением стрелок на рис. 2.23, а, то первая производная в заданном уравнении (2.144) должна была бы иметь отрицательный знак. Одним словом, для приведения нелинейного уравнения к виду (2.141) существенный сдвиг фазы колебаний, вызываемый нелинейностью, должен компенсироваться наличием соответствующих линейных членов. Это является физическим объяснением появления периодического решения, так как обеспечиваются демпфирование колебаний $\left(+\frac{dx}{dt}\right)$ при наличии раскачивающего нелинейного эффекта (гистерезисная петля) и раскачивание колебаний $\left(-\frac{dx}{dt}\right)$ при наличии демпфирующего нелинейного эффекта (опережающая петля). Энергетически это соответствует взаимной компенсации притока и расхода энергии.

В методе малого параметра периодическое решение уравнения (2.141) ищется в виде ряда

$$x = x^*(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots,$$

причем нулевое приближение как решение порождающего уравнения (2.143) будет

$$x^* = A \sin \omega_0 t.$$

Не излагая самого метода малого параметра, укажем только, что первое приближение в нем применительно к уравнению (2.141) получается в виде

$$x = A \sin \Omega t, \quad (2.147)$$

где амплитуда A определяется из условия

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi = 0, \quad \psi = \omega_0 t, \quad (2.148)$$

а частота Ω будет равна

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \nu, \quad (2.149)$$

причем поправка на частоту $\varepsilon \nu$ определяется формулой

$$\varepsilon \nu = -\frac{1}{2\pi \omega_0 A} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.150)$$

Для рассмотренного выше примера, согласно (2.146), уравнения (2.148) и (2.150) дают

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi A \omega_0}{T_1} + \frac{4cbk_1}{T_1 A} &= 0, \\ \varepsilon \nu &= -\frac{\omega_0}{2} + \frac{2cbk_1}{\pi T_1 \omega_0 A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.151)$$

Из этих двух уравнений определяются две неизвестные A и $\varepsilon\nu$, если задана ω_0 , т. е. если задан наклон осредняющей прямой на рис. 2.23, а. Однако никакими исходными данными задачи в этом примере величина ω_0 не обусловлена и в выражении (2.146) она осталась неопределенной. Поэтому выберем ее так, чтобы она равнялась искомой частоте периодического решения, т. е.

$$\omega_0 = \Omega. \quad (2.152)$$

Тогда, согласно (2.149), имеем $\varepsilon\nu = 0$. Подставив это в (2.151), получаем уравнения для амплитуды и для частоты периодического решения (2.147) в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{A}{b}\right)^3 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} &= \frac{4ck_1 T_1}{\pi b}, \\ \Omega &= \frac{4ck_1}{\pi b} \left(\frac{b}{A}\right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.153)$$

первое из которых решается графически (рис. 2.24).

Заметим, что метод малого параметра позволяет построить также высшие приближения для искомого периодического решения.

Однако это связано с большими трудностями.

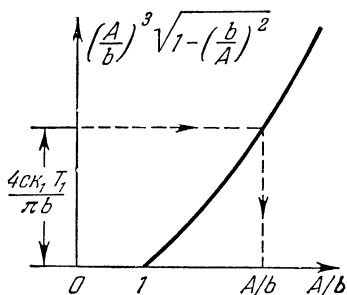


Рис. 2.24.

Метод малого параметра, разработанный А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым [71], был использован Л. И. Мандельштамом и детально развит А. А. Андроновым применительно к ламповым генераторам [8]. Одновременно для решения тех же задач в первом приближении Б. Ван-дер-Подем [5] был предложен приближенный метод медленно меняющихся коэффициентов, основанный на простых интуитивных соображениях.

Метод медленно меняющихся коэффициентов, в отличие от метода малого параметра, не дает возможности построения высших приближений, а ограничивается только одним приближенным решением, что не умаляет, однако, его практического значения. Этот метод позволяет определить не только само периодическое решение, но и процесс его установления во времени вблизи этого периодического решения. Решение нелинейного уравнения (2.141) приближенно ищется в виде

$$x = u(t) \cos \omega_0 t + v(t) \sin \omega_0 t$$

либо в виде

$$x = a(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (2.154)$$

где в первом случае $u(t)$ и $v(t)$ определяются из уравнений:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(u \cos \psi + v \sin \psi, -u\omega_0 \sin \psi + v\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(u \cos \psi + v \sin \psi, -u\omega_0 \sin \psi + v\omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi,$$

а во втором случае

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad (2.155)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.156)$$

Эти выражения получаются путем усреднения нелинейных функций за период (так называемые «укороченные уравнения»).

Для периодического решения будет $a = \text{const} = A$. Поэтому условие для определения его амплитуды здесь, согласно (2.155), совпадает с условием (2.148) для первого приближения метода малого параметра.

Частота колебаний, согласно (2.154), здесь будет

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Следовательно, получаемая здесь поправка на частоту $\frac{d\varphi}{dt}$, согласно (2.156), для периодического решения ($a = A$, $\omega = \Omega$) совпадает с поправкой на частоту (2.150) для первого приближения метода малого параметра.

Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [3], [7], [102] предложили и разработали асимптотический метод, позволяющий строить высшие приближения не только для периодического решения, но также и для процесса его установления во времени вблизи этого периодического решения.

В асимптотическом методе Крылова и Боголюбова решение нелинейного уравнения (2.141) ищется в виде¹⁾

$$x = a \sin \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \quad (2.157)$$

¹⁾ У Крылова и Боголюбова вместо $\sin \psi$ пишется $\cos \psi$, что несущественно.

причем величины $a(t)$ и $\psi(t)$ определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

фигурирующие здесь функции $u_1, u_2, \dots, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ для любого m -го приближения определяются так, чтобы выражение (2.157) удовлетворяло заданному нелинейному уравнению (2.141) с точностью до величины порядка малости ε^{m+1} . В частности, первое приближение имеет вид

$$x = a \sin \psi, \quad \frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a), \quad (2.159)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1(a) &= \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi, \\ \varepsilon B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.160)$$

Как видим, рассмотренный выше метод медленно меняющихся коэффициентов сводится к первому приближению более общего асимптотического метода Крылова и Боголюбова. Видно также, что первое приближение последнего метода для случая периодического решения совпадает с первым приближением метода малого параметра.

Для рассмотренного выше примера, согласно (2.146) и (2.152), запишем уравнения (2.159) с учетом (2.160) в виде

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{2T_1} + \frac{2cbk_1}{\pi T_1 \Omega a}, \quad (2.161)$$

$$\omega = \frac{\Omega}{2} + \frac{2ck_1}{\pi T_1 \Omega a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2.162)$$

Из (2.161), используя выражение (2.153) для Ω , получаем:

$$\frac{da}{dt} = \frac{A^2 - a^2}{2T_1 a},$$

где A — амплитуда периодического решения (автоколебаний), определяемая из рис. 2.24.

В результате интегрирования этого уравнения находим закон изменения амплитуды во времени в процессе установления автоколебаний:

$$a^2 = A^2 + (a_0^2 - A^2) e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad (2.163)$$

где a_0 — начальное значение a при $t=0$ (рис. 2.25, а). Отсюда видно, что в данной системе имеет место картина колебательных процессов, изображенная на рис. 2.17, а, которая соответствует устойчивым автоколебаниям.

Уравнение же (2.162) можно представить в виде

$$(2\omega - \Omega) \Omega = \frac{4ck_1}{\pi T_1 a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Но из (2.159) и (2.152) следует, что $\Omega = \omega - \varepsilon B_1$. Поэтому левая часть данного уравнения будет равна $\omega^2 - \varepsilon^2 B_1^2$ и само уравнение можно записать, пренебрегая ε^2 , в виде

$$\omega^2 = \frac{4ck_1}{\pi T_1 a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (2.164)$$

чем и определяется зависимость частоты колебаний от амплитуды (рис. 2.25, б) в процессе установления автоколебаний.

Кроме разработки асимптотического метода Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [7], [102] показали, что к тем же результатам первого приближения приводит *энергетический баланс* (позднее развитый К. Ф. Теодорчиком [36]), т. е. сведение нелинейной задачи к линейной с эквивалентными энергетическими соотношениями за период, а также *гармонический баланс* (использованный Л. С. Гольдфарбом [19]) и *эквивалентная линеаризация* (последняя положена в основу развиваемого здесь метода гармонической линеаризации).

Н. Н. Боголюбов [32] получил аналогичные результаты из теории возмущений, восходящей к Лагранжу, усилив их вычислением не только первого приближения, но и высших гармоник. Разработаны также высшие приближения *метода усреднения* [102]. Необходимо отметить также весьма важные работы К. Магнуса [148] в этой области.

Интересно, что для уравнения типа (2.141) весьма различные подходы приводят в первом приближении к одинаковым результатам. Можно было бы указать еще большое число различных оттенков в вычислительных приемах (но в принципе относящихся к одному из указанных выше методов), имеющих у разных авторов и приводящих к тем же результатам. Существуют также и некоторые специальные приемы, приводящие в определенных частных задачах к результатам, более близким к точному решению (см., например, [44], [123]). Нужно особо еще отметить работы Ю. А. Митрополь-

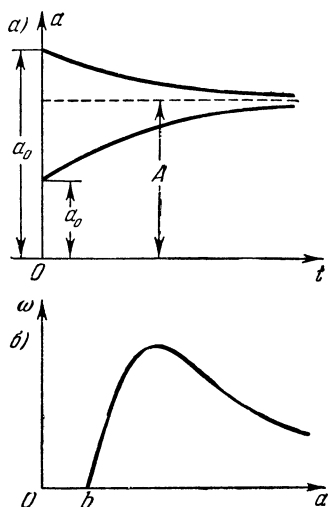


Рис. 2.25.

ского [102] и В. О. Кононенко [93] по нелинейным системам с переменными коэффициентами.

Остановимся на связи рассмотренных выше методов с развиваемым здесь методом гармонической линеаризации. Заметим предварительно, что Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов предложили еще следующее преобразование, позволяющее использовать первое приближение их асимптотического метода непосредственно для уравнения (2.140).

Найдем [102] квадрат частоты ω в первом приближении асимптотического метода. Согласно (2.159)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0 \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_1^2(a).$$

Ограничиваясь первым приближением, отбросим член с ε^2 и подставим выражение $\varepsilon B_1(a)$ из (2.160). Тогда

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.165)$$

Но из (2.142) следует:

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \omega_0^2 x - \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (2.166)$$

Используя эту формулу, легко проверить, что при $x = a \sin \psi$ будет

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi &= \\ &= \omega_0^2 \pi a - \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

Поэтому формулу (2.165) для квадрата частоты можно переписать в виде

$$\omega^2 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.167)$$

Замечая далее, что при $x = a \sin \psi$ из (2.166) получается

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi &= \\ &= - \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned}$$

согласно (2.159) и (2.160) можем записать:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (2.168)$$

Отсюда для периодического решения ($a = \text{const} = A$, $\dot{\omega} = \text{const} = \Omega$) имеем:

$$\int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi = 0, \quad (2.169)$$

а из (2.167)

$$\Omega^2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.170)$$

С другой стороны, если бы нелинейное уравнение (2.140) решалось непосредственно методом гармонической линеаризации, то, согласно (2.75) и (2.76), при отыскании периодического решения уравнение (2.140) необходимо было бы представить в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega} \frac{dx}{dt} + q(A, \Omega) x = 0 \quad (2.171)$$

и написать характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega} p + q(A, \Omega) = 0. \quad (2.172)$$

Требование наличия пары чисто мнимых корней $p = \pm j\Omega$ в этом квадратном уравнении сводится к следующему:

$$q'(A, \Omega) = 0, \quad \Omega^2 = q(A, \Omega). \quad (2.173)$$

В частности, в примере (2.144) получилось бы

$$q' = \frac{\Omega}{T_1} - \frac{4cbk_1}{\pi T_1 A^2}, \quad q = \frac{4ck_1}{\pi T_1 A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}.$$

Как видим, здесь в выражениях q и q' отражена не только сама нелинейность F_1 непосредственно, но и линейный член, имеющийся в исходном уравнении, как, например, в (2.144), ибо он, согласно (2.145), включается в состав функции $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ уравнения (2.140).

Легко видеть, что эти уравнения метода гармонической линеаризации (2.173) с учетом обозначений (2.76) точно совпадают с уравнениями первого приближения асимптотического метода (2.169) и (2.170), если в них Ω заменить на ω_0 , а также и с уравнениями

первого приближения метода малого параметра в частном примере (2.151) и в общем виде (2.148) и (2.150), если в них подставить (2.142), положив $\omega_0 = \Omega$ и, следовательно, $\varepsilon \nu = 0$.

Вообще в задачах теории автоматического регулирования, где в заданных уравнениях нет явно заранее выделенной величины ω_0 , при использовании асимптотического метода и метода малого параметра наиболее целесообразно выбирать величину ω_0 так, чтобы она равнялась искомой частоте периодического решения ($\omega_0 = \Omega$, $\varepsilon \nu = 0$), что и было проиллюстрировано выше на примере. Короче говоря, приводя уравнение (2.140) к виду (2.141), следует записать последнее для задач теории автоматического регулирования в форме

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

причем величина Ω , как и амплитуда A , определяется в процессе решения этого уравнения по формулам первого приближения.

Метод гармонической линеаризации в задачах теории автоматического регулирования наиболее простым прямым путем приводит к тем же самым результатам, что и метод малого параметра, равно как и асимптотический метод, при целесообразном выборе в них порождающей частоты $\omega_0 = \Omega$. Практически это очень важно для многих технических задач, где заданное нелинейное уравнение не содержит явно выделенной порождающей частоты ω_0 .

В связи с этим интересно отметить, что Б. В. Булгаков, излагая метод малого параметра (метод Пуанкаре), тоже говорит о том, что если в заданном нелинейном уравнении явно не выделена порождающая (линеаризующая) частота, т. е. уравнение имеет вид (2.140), то она может быть определена из уравнений типа (2.169) и (2.170) совместно с амплитудой (см. [45], стр. 321), чем фактически подтверждается полное совпадение результатов метода малого параметра в форме Булгакова и метода гармонической линеаризации.

Гармонически линеаризованное уравнение (2.171), согласно § 2.4, можно применять и к исследованию нестационарных процессов установления автоколебаний при малых отклонениях от периодического решения. Тогда оно принимает вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} \frac{dx}{dt} + q(a, \omega) x = 0 \quad (2.174)$$

или во многих задачах

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{q'(a)}{\omega} \frac{dx}{dt} + q(a) x = 0, \quad (2.175)$$

что согласуется также с уравнением Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (см. [102], стр. 95). Здесь получаются уравнения, похожие на линейные. Но если обыкновенная линейная система имеет посто-

янные показатель затухания ξ и частоту ω , то здесь они будут переменными:

$$\xi(a) = -\frac{q'(a)}{2\omega}, \quad \omega^2(a) = q(a), \quad (2.176)$$

где ξ и $q'(a)$ — малые величины (для самого же периодического решения $\xi = 0$ и $q' = 0$). В частности, в примере (2.144) имеем:

$$q' = \frac{\omega}{T_1} - \frac{4cbk_1}{\pi T_1 a^2}, \quad q = \frac{4ck_1}{\pi T_1 a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Как видим, малость $q'(a)$ здесь получается, вообще говоря, не за счет самой нелинейности $F_1(x)$. Она сама по себе существенна, и коэффициент q' для нее имеет конечную величину. Но за счет присутствия линейного члена, дающего слагаемое $\frac{\omega}{T_1}$, общий коэффициент q' для всей функции $F(x, px)$, определяемой формулой (2.145), в целом может быть малым при соответствующих значениях ω и a .

Заметим, что если в линейной системе решение для колебательного переходного процесса записывают в виде $x = a_0 e^{\xi t} \sin \omega t$, то здесь вследствие переменности ξ и ω его так записать нельзя. Справедливой для процесса установления периодического решения будет в первом приближении одинаковая с указанной линейной лишь дифференциальная форма записи

$$\frac{da}{dt} = a\xi(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(a), \quad x = a \sin \psi, \quad (2.177)$$

что согласуется также с (2.159). Здесь ξ и ω определяются формулами (2.176) как функции амплитуды a , меняющейся во времени.

Устойчивость периодического решения определяется при этом знаком величины $\xi(a)$ (у Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова $\frac{\Phi(a)}{a}$; см. [102], стр. 79). Если $\xi(a)$ с увеличением a меняет знак с плюса на минус, то периодическое решение устойчиво. Это согласуется с подходом, примененным в § 2.4.

Здесь речь шла о малых отклонениях колебаний от периодического процесса. Ниже (глава VII) будет сделано распространение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, а также и метода гармонической линеаризации на быстро затухающие колебательные процессы (для большого, но медленно меняющегося значения ξ).

Легко проверить, что для рассмотренного выше примера нелинейной системы регулирования применение уравнений метода гармонической линеаризации (2.173) и (2.176) дает те же самые результаты, что и первое приближение метода малого параметра (2.153) и асимптотического метода (2.161) и (2.164).

§ 2.6. Сравнение с другими приближенными методами для систем высокого порядка

Обратимся теперь к нелинейным системам, динамика которых описывается уравнениями высокого порядка. В работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [7], [28], [102] имеется распространение асимптотических методов на уравнения высокого порядка с малым параметром. Описание метода малого параметра для систем высокого порядка имеется в книге И. Г. Малкина [71]. Однако существуют также и прямые применения метода малого параметра к нелинейным задачам теории автоматического регулирования в работах Б. В. Булгакова [45], А. И. Лурье [34], А. М. Летова [18] и др. Поэтому остановимся здесь на сравнении развиваемого в данной книге метода гармонической линеаризации именно с этими приложениями метода малого параметра. Постановка задачи в общем виде была указана в начале § 2.5.

Б. В. Булгаков (см. [45], глава 12) рассматривает сначала систему уравнений, как обычно, с малым параметром, но в форме, удобной для анализа автоматических систем:

$$D_{i1}(p)x_1 + D_{i2}(p)x_2 + \dots + D_{im}(p)x_m = \varepsilon f_i(x_1, \dots, x_m, \varepsilon) \\ (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.178)$$

где D_{ir} — операторные многочлены. Такая запись лучше, чем (2.137), соответствует записи уравнений автоматической системы по звеньям (m — число звеньев, на которые разбита система); в практических задачах многие из $D_{ir}(p)$ будут нулями, так как далеко не все переменные x_1, \dots, x_m входят в каждое уравнение звена. Здесь ε обозначает малый параметр, так что правые части в уравнениях (2.178) представляют собой малые нелинейные члены.

При отыскании периодических решений к характеристическому уравнению линейной системы (которую Булгаков называет упрощенной), получаемой из (2.178) при $\varepsilon = 0$, т. е. к уравнению

$$L(p) = \begin{vmatrix} D_{11}(p) & D_{12}(p) & \dots & D_{1m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1}(p) & D_{m2}(p) & \dots & D_{mm}(p) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.179)$$

Предъявляется требование, чтобы оно имело бы одну пару чисто мнимых корней $p = \pm j\omega_0$. Другими словами, линейная система, получаемая из (2.178) при $\varepsilon = 0$, является порождающей системой, обладающей периодическим решением (в данном случае синусоидальным). Последнее служит «нулевым» приближением решения нелинейной системы.

Для первого приближения периодического решения нелинейной системы (2.178) через малые нелинейные члены, стоящие в правых

где не фигурирует явно малый параметр. Чтобы привести систему (2.181) к виду (2.178), записывают ее следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} D_{11}(p)x_1 + \dots + D_{1l}(p)x_l + \dots + D_{1m}(p)x_m &= 0, \\ \ddot{D}_{k1}(p)x_1 + \dots + \ddot{D}_{kl}(p)x_l + h\dot{x}_l + \dots + \\ &+ D_{km}(p)x_m = \varepsilon f(x_l), \\ \ddot{D}_{m1}(p)x_1 + \dots + \ddot{D}_{ml}(p)x_l + \dots + \ddot{D}_{mm}(p)x_m &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.182)$$

где

$$\varepsilon f(x_l) = hx_l - F(x_l).$$

Величина h определяется Булгаковым из условия, чтобы характеристическое уравнение линейной порождающей системы, т. е. системы (2.182) при $\varepsilon = 0$, имело одну пару чисто мнимых корней $p = \pm j\omega_0$, чем определяется одновременно и сама порождающая частота ω_0 (Булгаков применяет при этом критерий Гурвица $H_{n-1} = 0$, что эквивалентно нашему второму способу, § 2.3). После этого применяется уравнение (2.180), из которого определяются амплитуда A и поправка на частоту $\varepsilon\nu$, причем искомая частота периодического решения будет $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\nu$.

Не излагая хода решения [45], приведем лишь окончательные результаты его. Для определения амплитуды получается уравнение

$$hA = J(A), \quad (2.183)$$

где, если искать решение в виде $x_l = A \sin \psi$:

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (2.184)$$

(у Булгакова $x_l = A \cos \psi$, что не существенно), а поправка на частоту

$$\varepsilon\nu = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Omega = \omega_0, \quad (2.185)$$

что связано с равенством нулю для однозначной нелинейности интеграла

$$\int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = 0. \quad (2.186)$$

Из написанных формул теперь можно сделать вполне определенный вывод. Сравнение (2.183) и (2.184) с первой из формул (2.20) говорит о точном равенстве

$$h = \frac{J(A)}{A} = q, \quad (2.187)$$

а сравнение (2.186) со второй формулой (2.20) точно соответствует уже известному факту, что для однозначных нелинейностей коэффициент $q' = 0$. Различие состоит в том, что в методе гармонической линеаризации непосредственно производится в заданном уравнении нелинейной системы замена $F(x)$ на $q(A)x$. Несмотря на более простой подход к решению задачи в методе гармонической линеаризации, имеется точное совпадение его результатов с первым приближением метода малого параметра для однозначных нечетных нелинейностей. Ниже будет это показано и для более общего случая.

Практический прием отыскания периодического решения у Булгакова сводится к следующему. Вычерчивается кривая $J(A)$ (рис. 2.26) и, согласно равенству (2.183), на том же графике наносятся лучи hA . Точки пересечения каждого из этих лучей с кривой $J(A)$ дают значения искомой амплитуды периодического решения A для определенного сочетания параметров системы (а значит, и определенной частоты $\omega_0 = \Omega$), ибо, как указывалось, величина h определяется из характеристического уравнения линейной порождающей системы (2.182) при $\varepsilon = 0$ совместно с частотой $\omega_0 = \Omega$.

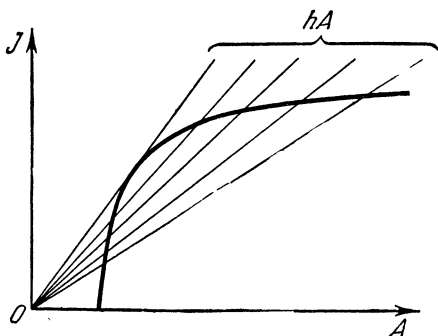


Рис. 2.26.

Этот практический прием Булгакова (рис. 2.26) по суще-

ству аналогичен одному из наших частных приемов (рис. 2.12, в), описанному выше в § 2.3 для соответствующего простейшего случая нелинейной системы первого класса. Совпадение обоих результатов очевидно из того, что на рис. 2.12, в, согласно (2.187), $q = \frac{J(A)}{A}$ и величина $z(\Omega) = h$, хотя приемы их отыскания различны.

Итак, можно сказать, что гармонически линеаризованное уравнение (2.78) для случая однозначной нелинейности, когда $q' = 0$, и является по существу тем самым линейным уравнением, которое при отыскании периодического решения по методу малого параметра следует брать за уравнение порождающей системы. Важно при этом, что найденные из него амплитуда и частота периодического решения сразу точно соответствуют первому приближению метода малого параметра, ибо поправка на частоту в данном случае (т. е. при $q' = 0$), как уже отмечалось, равна нулю. Поэтому-то в методе гармонической линеаризации и не требуется производить никаких дополнительных операций, фигурирующих при отыскании первого приближения в методе малого параметра.

так, чтобы поправка на частоту $\varepsilon\nu$ равнялась нулю. Для выполнения указанного требования ($\varepsilon\nu=0$), согласно (2.180), должно соблюдаться условие

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon f_k(x_l^*, p x_l^*) e^{-j\psi} d\psi = 0.$$

Подставив сюда (2.193) при $x_l^* = A \sin \psi$ ($\psi = \omega_0 t$) и используя известную формулу

$$e^{-j\psi} = \cos \psi - j \sin \psi,$$

получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (h_1 A \sin \psi + h_2 A \omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi - j \int_0^{2\pi} (h_1 A \sin \psi + \\ + h_2 A \omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi - \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi + \\ + j \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю отдельно вещественную и мнимую части, находим:

$$\left. \begin{aligned} \pi A h_1 &= \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ \pi A \omega_0 h_2 &= \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.195)$$

Полученные четыре уравнения (2.194) и (2.195) позволяют определить все четыре неизвестные h_1 , h_2 , A и ω_0 . При этом, поскольку обеспечено соблюдение условия $\varepsilon\nu=0$, то частота первого приближения $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\nu$ в найденном периодическом решении будет

$$\Omega = \omega_0. \quad (2.196)$$

Теперь сравним полученный результат применения метода малого параметра с методом гармонической линеаризации. Сравнивая (2.195) с формулами (2.76) и учитывая (2.196), получаем:

$$h_1 = q(A, \Omega), \quad h_2 = \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega}. \quad (2.197)$$

Отсюда видно, что линейная порождающая система (2.192) при $\varepsilon=0$ в методе малого параметра при описанном здесь способе его приме-

нения точно совпадает с гармонически линейризованным уравнением, получаемым из (2.191) непосредственной подстановкой (2.75). Следовательно, и результаты применения обоих методов, несмотря на различие в них общего подхода к решению задачи и хода выкладок, будут одинаковыми.

Различие состоит в том, что по методу малого параметра в заданной нелинейной системе (2.191) выделяются нелинейные члены с малым параметром ϵ и требуется наличие периодического (синусоидального) решения в линейной порождающей системе (2.192) при $\epsilon = 0$. Затем по формуле первого приближения метода малого параметра (2.180) определяются амплитуда и поправка к порождающей частоте периодического решения с учетом членов, содержащих малый параметр. В методе же гармонической линейризации с самого начала нелинейность в заданной системе (2.191) заменяется специальными гармонически линейризованными членами без выделения малого параметра вообще. Затем полученная гармонически линейризованная система решается как линейная с целью определения синусоидального периодического решения. Операции во втором методе значительно проще для технических расчетов.

Как было показано выше, выбор порождающей системы в методе малого параметра из условия равенства нулю поправки на частоту, согласно формулам первого приближения этого метода с учетом членов, содержащих малый параметр, приводит к тем же расчетным формулам, что и в методе гармонической линейризации.

Итак, показано, что *в случае нелинейности общего вида $F(x, px)$ гармонически линейризованное уравнение (2.78) и является тем самым линейным уравнением, которое соответствует в методе малого параметра порождающей системе, наилучшим образом аппроксимирующей заданную нелинейную систему и сводящей к нулю поправку на частоту.*

Проделанные выкладки можно принять за обоснование метода гармонической линейризации с позицией метода малого параметра. Другое обоснование было дано в § 2.2.

Все это согласуется также и с тем, что, как показали Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, эквивалентная линейризация соответствует первому приближению асимптотического метода, учитывающего первую степень малого параметра (это было описано в § 2.5 для систем второго порядка).

Выше говорилось о нелинейностях общего вида $F(x, px)$. Что же касается часто встречающихся в автоматических системах петлевых нелинейных характеристик, то они обозначаются так же, как и однозначные через $F(x)$. Однако, поскольку при возрастании x они имеют иное очертание, чем при убывании x , интеграл (2.186) для них не равен нулю. Вследствие этого при введении в порождающую систему слагаемого hx , линейно аппроксимирующего петлевую нелинейность $F(x)$, на основании формулы (2.180) получается поправка

на частоту, которая будет малой, если петля узкая, и отнюдь не малой, если петля широкая. Поэтому при наличии петлевой нелинейности $F(x)$ следует в методе малого параметра исходить также из выражения (2.193) и пользоваться формулами (2.195), как и в общем случае $F(x, px)$, считая, что петлевая нелинейность $F(x)$, строго говоря, является частным видом общего случая нелинейности $F(x, px)$ с существенной зависимостью от знака производной px . Таким образом, петлевую нелинейность $F(x)$ можно обозначить символом $F(x, \text{sign } px)$. Напомним в связи с этим, что в методе гармонической линеаризации для петлевых нелинейностей всегда вводится второй коэффициент $q' \neq 0$ (см. § 2.1).

Требование метода малого параметра о наличии порождающей частоты в линейной системе при $\varepsilon = 0$ эквивалентно требованию наличия пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы (или требованию пересечения частотных характеристик в методе гармонического баланса). С точки зрения теории регулирования любое из этих требований одинаково означает желание отыскать синусоидальные колебания с постоянной амплитудой в замкнутой линейной системе, приблизительно заменяющей данную замкнутую нелинейную систему. Важно подчеркнуть при этом, что порождающая система в методе малого параметра есть именно *замкнутая* линейная система. Кроме того, в теории автоматического регулирования при исследовании нелинейных систем вводится понятие «линейная часть», под которой понимается *разомкнутая* линейная система (рис. 1.12, б). Из нее нелинейность исключена таким образом, что число уравнений становится на единицу меньше числа переменных. Например, в системе (2.71)

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0$$

порождающей будет *замкнутая* линейная система

$$Q(p)x + R(p)(h_1x + h_2px) = 0,$$

$$h_1 = q(A, \Omega), \quad h_2 = \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega},$$

а *линейной частью* нелинейной системы будет *разомкнутая* линейная система

$$Q(p)x = -R(p)y, \quad (2.198)$$

полученная исключением из заданного уравнения нелинейности в виде

$$y = F(x, px). \quad (2.199)$$

Точно так же для нелинейной системы (2.191) порождающей будет замкнутая линейная система (2.192) при $\varepsilon = 0$, а линейной частью в смысле теории регулирования (в общем случае, приведенной

линейной части, в отличие от определителя $L(p)$ порождающей системы или гармонически линеаризованной системы, уже не имеет чисто мнимых корней.

Как в формулах метода малого параметра, написанных в этом параграфе ранее, так и в формулах метода гармонической линеаризации существенно то, что фактически используется близость решения к синусоидальному только для тех переменных, которые стоят в уравнении под знаком нелинейной функции. Формы решений для остальных переменных в выкладках не участвуют. Это наводит на мысль о том, что решение для первых переменных может быть надежным даже в том случае, когда для вторых переменных решение заметно отличается от синусоидального. В методе гармонической линеаризации это обосновывается условием фильтра (§ 2.2). Следовательно, и в методе малого параметра условие фильтра следует считать таким дополнительным условием, которое делает применение метода малого параметра законным и в том случае, когда искомое периодическое решение близко к синусоидальному не для всех переменных системы, а лишь для тех, которые стоят под знаком нелинейной функции.

Так, например, пусть в нелинейной системе (2.191) или, что то же самое, (2.200)—(2.201) периодическое решение для переменной x_l близко к синусоидальному, а нелинейность $F(x_l, px_l)$ такова, что определяемая при этом из (2.201) переменная y далека от синусоиды. Тогда положим, что линейная часть системы (2.200) обладает свойством фильтра, т. е. что ее частотная характеристика (2.203) удовлетворяет условию

$$\left| \frac{E_{kl}(jn\Omega)}{Q(jn\Omega)} \right| \ll \left| \frac{E_{kl}(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right| \quad \text{и} \quad \left| \frac{E_{kl}(jn\Omega)}{Q(jn\Omega)} \right|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (2.204)$$

где $n = 2, 3, \dots$ или $n = 3, 5, \dots$ в зависимости от того, содержит ли разложение функции F в ряд Фурье четные гармоники или нет. Поскольку частотная характеристика (2.203) определяет изменение переменной x_l при заданном изменении y , содержащей высшие гармоники, то можно сказать, что по условию (2.204) главную роль в решении для x_l будет играть первая гармоника (частота Ω), а остальные гармоники переменной y окажут малое влияние на решение для переменной x_l , т. е. решение для x_l действительно может быть близким к синусоидальному.

Аналогично выражению (2.202) можно составить передаточную функцию и для любой другой переменной в системе (2.200) вместо x_l и путем проверки свойства фильтра для нее установить, какие еще другие переменные этой системы имеют периодическое решение, близкое к синусоидальному, а также найти форму решения для любой переменной с учетом высших гармоник, порождаемых нелинейной функцией $y = F(x_l, px_l)$.

Наконец, обратим внимание еще на одно очень важное обстоятельство. Говоря о наличии пары чисто мнимых корней в порождаю-

щей системе или в гармонически линеаризованной системе, мы все время имели в виду одновременное выполнение дополнительного условия: все остальные корни характеристического уравнения $L(p) = 0$ этой системы (кроме пары чисто мнимых) имеют отрицательные вещественные части конечной величины, т. е. предполагали, что многочлен (2.118)

$$L_1(p) = \frac{L(p)}{p^3 + \omega^3} \quad (2.205)$$

с запасом удовлетворяет критерию Гурвица (или другому линейному критерию устойчивости).

При этом предполагалось также (см. § 2.2), что разомкнутая линейная часть системы устойчива или нейтральна, т. е. что ее характеристическое уравнение $Q(p) = 0$ не имеет корней с положительной вещественной частью и чисто мнимых, а имеет лишь корни с отрицательными вещественными частями и может иметь нулевые корни.

Все это позволяло говорить не просто о близости нелинейной системы в периодическом (автоколебательном) режиме к линейной системе с парой чисто мнимых корней, а о близости ее к линейной системе, находящейся на колебательной границе устойчивости. Таким образом обеспечивалось то, что не только часть решения, соответствующая паре чисто мнимых корней, но и полное решение порождающей системы при начальных условиях, близких к начальным условиям исследуемого периодического режима нелинейной системы, близко к синусоидальному. Это соответствует положению Н. Н. Боголюбова о сильной устойчивости двухпараметрического семейства частных решений ([28] и [102], глава IV).

Сделанные предположения относительно всех корней порождающей (замкнутой гармонически линеаризованной) системы и разомкнутой линейной части системы вместе с соблюдением свойства фильтра позволяют говорить о применимости порождающего гармонически линеаризованного уравнения не только для определения периодического решения, но также в первом приближении для определения процесса установления периодического решения, т. е. для медленно затухающих или медленно расходящихся колебаний вблизи периодического решения, что и было сделано в § 2.4. В этом случае амплитуда a и частота ω в решении будут уже не постоянными, а медленно меняющимися функциями времени. Для этого нужно, конечно, чтобы и коэффициенты гармонической линеаризации $q(a, \omega)$ и $q'(a, \omega)$ (во многих практических задачах $q(a)$ и $q'(a)$) тоже были медленно меняющимися функциями от a и ω (или только a). Тогда «порождающей» системой будет уже линейная система не с постоянными коэффициентами, а с медленно меняющимися во времени коэффициентами. Своеобразие ее заключается только в том, что переменные коэффициенты q и q' не выражены в явном виде как функции времени, а зависят от решения. Аналогичное явление имеет место и при

определении периодического решения, где эти коэффициенты, хотя и постоянны, но заранее не заданы, так как они зависят от амплитуды (a в общем случае и от частоты) искомого решения. В этом смысле порождающая гармонически линеаризованная система сохраняет как бы главные черты аппроксимируемой нелинейной системы, позволяющие приближенно определить основные ее нелинейные особенности в периодических режимах и вблизи этих режимов.

В заключение необходимо также упомянуть о важных для исследуемого круга явлений работах Ю. А. Митропольского [102] по нелинейным системам высокого порядка с медленно меняющимися параметрами и В. О. Кононенко [93] по нелинейным системам высокого порядка, параметры которых медленно отклоняются от периодических.

§ 2.7. Выделение областей устойчивости равновесия

До сих пор речь шла об определении периодических решений и их устойчивости, т. е. рассматривалась такая область параметров нелинейной системы, в которой имеются периодические решения, устойчивые (автоколебания) либо неустойчивые. Однако во многих случаях требуется автоматическую систему построить так, чтобы автоколебаний не возникало и равновесное состояние системы было устойчивым при любых начальных условиях. В этих случаях потребуется находить область устойчивости равновесия системы вне области периодических решений.

Вообще говоря, особенности нелинейных систем не ограничиваются только возможностью существования в пространстве параметров областей периодических решений. Вне области периодических решений могут иметься и другие сложные особенности типа сепаратрис и т. п. Однако в данном параграфе речь будет идти о таких нелинейных системах, для которых в пространстве параметров вне области периодических решений, по крайней мере по соседству с ней, нет таких особенностей, а имеет место либо область устойчивости равновесия при любых начальных условиях, либо неустойчивости. Именно эти *области устойчивости равновесия вне области периодических решений* и будут определяться в данном параграфе. При этом предполагается наличие единственного равновесного состояния системы или же единственной зоны состояний равновесия (например, внутри зоны нечувствительности нелинейного звена системы).

Что же касается возможности наличия устойчивого равновесия внутри области периодических решений (например, на рис. 2.17, б при неустойчивом периодическом решении), то этому вопросу посвящается отдельно § 2.9.

Отсутствие периодического решения определяется тем, что характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы (2.115) или (2.116) ни при каких возможных для данной нелинейности значениях q и q' не имеет чисто мнимых корней. Но, как уже известно,

в рассматриваемых нелинейных системах гармонически линеаризованное уравнение справедливо и для переходных процессов вблизи периодического решения. Поэтому можно сказать, что если уравнение (2.115) или (2.116) в области отсутствия периодического решения, но вблизи нее удовлетворяет критерию Гурвица (или любому другому линейному критерию устойчивости, например критерию Михайлова, Найквиста) при любых возможных для данной нелинейности значениях q и q' , то, по крайней мере, вблизи найденной границы область отсутствия периодического решения будет областью устойчивости равновесия системы. Если же вне области периодических решений при любых возможных для данной нелинейности значениях q и q' гармонически линеаризованное уравнение (2.115) или (2.116) не удовлетворяет критерию устойчивости Гурвица (Михайлова или Найквиста), то это будет область неустойчивости системы.

Итак, рассматривается определение колебательной границы¹⁾ устойчивости равновесия нелинейной системы, удовлетворяющей условиям, выведенным в § 2.2 (они сформулированы кратко в начале § 2.3). При этом предполагается, что для гармонически линеаризованного уравнения системы все определители Гурвица положительны, кроме предпоследнего H_{n-1} , который может менять знак (или соблюдаются другие эквивалентные этому условия).

Определение колебательной границы устойчивости равновесия по гармонически линеаризованным уравнениям физически является вполне естественным для нелинейных систем, не поддающихся обычной линеаризации, но могущим иметь периодическое решение, близкое к синусоидальному. Ниже в § 2.8 будет показано на ряде примеров, что результаты такого определения области устойчивости равновесия нелинейной системы совпадают с результатами применения прямого метода Ляпунова (для достаточных условий устойчивости).

Если пользоваться линейным критерием устойчивости Михайлова, то *область устойчивости равновесия нелинейной системы рассматриваемых классов можно определить как такую область параметров системы, для которой критерий устойчивости Михайлова, примененный к гармонически линеаризованному уравнению системы, выполняется при любых значениях q и q' , возможных для данной нелинейности.* Другими словами, в этой области параметров системы ни при каких возможных значениях q и q' кривая Михайлова, получаемая подстановкой $p = j\omega$ в характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы, например в (2.115):

$$Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) = 0, \quad (2.206)$$

или в (2.116):

$$Q(p) + R_1(p) \left(q_1 + \frac{q'_1}{\Omega} p \right) + R_2(p) \left(q_2 + \frac{q'_2}{\Omega} p \right) = 0, \quad (2.207)$$

¹⁾ Граница между областью устойчивости равновесия и областью периодических решений, т. е. незатухающих колебаний.

или др., не должна проходить через начало координат, всегда охватывая его (рис. 2.27). Заметим, что в уравнении (2.206) коэффициенты q и q' не являются независимыми друг от друга. Каждому значению q соответствует для каждой нелинейности определенное значение q' и определенное для данной системы значение Ω (на границе устойчивости). Точно так же и в уравнении (2.207) все коэффициенты $q_1, q'_1, q_2, q'_2, \Omega$ взаимосвязаны.

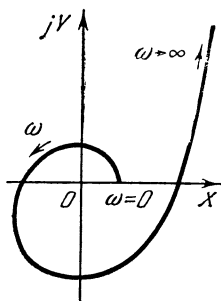


Рис. 2.27.

При использовании четвертого способа определения периодического решения (§ 2.3, рис. 2.11) граница устойчивости равновесия может быть определена графически по точкам путем подбора соответствующих граничных значений параметров, начиная с которых удовлетворяется указанное выше условие (примеры см. в главах IV и VI).

При использовании аналитического первого способа (§ 2.3) граница устойчивости равновесия определяется как граница существования вещественных положительных значений A и Ω в полученном решении. Например, в § 1.3, согласно (1.85) и (1.86), это будет $T_2 k_1 = T_1 k_{0.c}$, если полагать, что все параметры положительны. Область периодических решений в данном случае будет $T_2 k_1 > T_1 k_{0.c}$. Чтобы убедиться, что обратное условие $T_2 k_1 < T_1 k_{0.c}$ определяет область устойчивости равновесия системы, нужно проверить выполнение критерия Михайлова или Гурвица в любой одной точке вблизи найденной границы по характеристическому уравнению гармонически линеаризованной системы (так и решалась задача в § 1.3). Этот метод будет применен к конкретным системам в главе IV.

Аналогично следует поступать и при применении всех остальных способов определения периодического решения, находя границу устойчивости равновесия как предельно возможный случай используемого там графического решения, после чего надо произвести указанную выше проверку выполнения любого из линейных критериев устойчивости для гармонически линеаризованной системы.

Остановимся здесь особо на случае нелинейной системы с одной однозначной нечетно-симметричной нелинейностью любой конфигурации. Такие системы часто встречаются. Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы в этом случае, как видно из (2.206), имеет вид

$$Q(p) + R(p)q = 0. \quad (2.208)$$

Условием наличия периодического решения, согласно второму способу (§ 2.3), будет равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица:

$$H_{n-1} = 0, \quad (2.209)$$

причем величина определителя H_{n-1} является функцией коэффициента гармонической линеаризации q и параметров системы. Пусть при изменении какого-либо параметра системы k величина определителя

$$H_{n-1}(k, q)$$

может равняться нулю при каких-нибудь возможных для данной нелинейности значениях q в некотором интервале $k_1 < k < k_2$ (рис. 2.28, а);

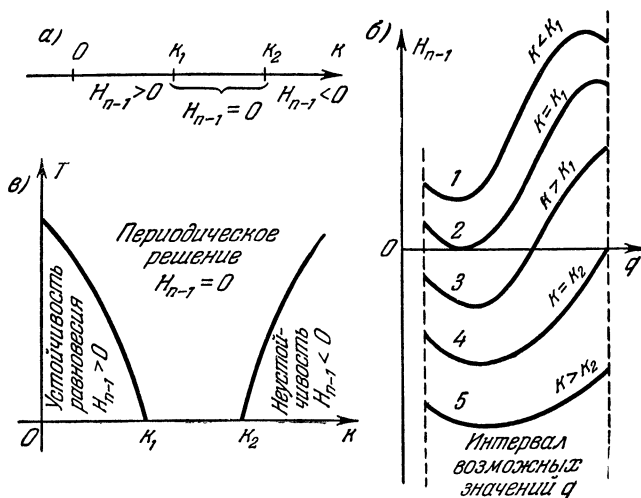


Рис. 2.28.

слева же от точки k_1 имеем $H_{n-1} > 0$, а справа от точки k_2 имеем $H_{n-1} < 0$ при всех возможных в данной задаче значениях q . Тогда слева от k_1 лежит область устойчивости равновесия системы ¹⁾, а справа от точки k_2 — область неустойчивости.

Граничные значения k_1 и k_2 могут быть определены как такие значения параметра k , при которых обращается в нуль соответственно наименьшее и наибольшее значения определителя H_{n-1} при изменении q в определенном для заданной нелинейности интервале. В самом деле, если при некотором значении $k = k_1$ будет равно нулю наименьшее (при изменении q) значение H_{n-1} (кривая 2 на рис. 2.28, б), а при $k > k_1$ возможно равенство $H_{n-1} = 0$ при каких-нибудь значениях q (кривая 3), то при $k < k_1$ обязательно будет $H_{n-1} > 0$ при всех значениях q (кривая 1). Здесь не рассматриваются особые случаи, которые почти не встречаются.

Практически, как будет показано в дальнейшем, этих кривых строить не придется.

¹⁾ Предполагается, что при этом все остальные определители Гурвица положительны (для систем до четвертого порядка включительно это означает просто положительность коэффициентов характеристического уравнения).

Точно так же и на плоскости любых двух параметров системы (например, k и T) случай, когда наименьшее (при изменении q) значение определителя H_{n-1} равно нулю, определит линию, изображающую границу области устойчивости равновесия системы (рис. 2.28, в), а случай, когда наибольшее значение определителя H_{n-1} равно нулю, определит границу области неустойчивости.

Эти экстремальные (наименьшее и наибольшее) значения определителя H_{n-1} могут быть найдены путем приравнивания нулю производной

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q} = 0 \quad (2.210)$$

(за исключением упоминавшихся выше особых случаев) или же путем непосредственного установления таких значений q , при которых имеют место наименьшее и наибольшее значения определителя H_{n-1} , на границах интервала изменения q , даже и при отсутствии математического экстремума.

Исключая из выражений (2.209) и (2.110) величину q , получим границу устойчивости равновесия либо неустойчивости системы, выраженную через параметры системы.

Однако получаемая при этом величина q , соответствующая математическому экстремуму определителя H_{n-1} , может выйти за пределы интервала возможных для данной нелинейности значений q , как, например, величина максимума H_{n-1} на рис. 2.28, б уходит вправо за этот интервал. Тогда берется ближайшее крайнее возможное его значение и непосредственно подставляется в выражение (2.209), что графически соответствует, например, кривой 4 на рис. 2.28, б. Кроме того, должны быть исключены из рассмотрения те участки получаемой границы устойчивости, где не соблюдается условие положительности всех остальных определителей Гурвица.

Следовательно, здесь исследование устойчивости равновесия нелинейной системы разбивается на два этапа [128]:

1-й этап — исключение q из уравнений (2.209) и (2.210) — дает условия устойчивости, *достаточные* при любой форме однозначной нечетно-симметричной нелинейности, так как в них величина q не ограничена ($0 \leq q \leq \infty$), т. е. не зависит от формы нелинейности;

2-й этап — отбрасывание лишних участков границы устойчивости, полученных на первом этапе, и замена их другими, вытекающими из ограничения интервала возможных значений q для данной нелинейности, — приводит к *необходимым* условиям устойчивости, так как мы при этом вплотную приближаемся к границе области существования периодического решения. (Эти необходимые условия являются приближенными в соответствии с приближенностью метода определения периодического решения.)

Аналогичным путем можно оценить также и область устойчивости равновесия при петлевой нелинейности, и, в общем случае, для $F(x, px)$,

что будет показано в конце настоящего параграфа на одном из примеров. Но в общем случае удобнее бывает пользоваться указанными в начале параграфа методами с использованием критерия Михайлова.

Пример 1. Приведем сначала простейший пример нелинейной системы (рис. 2.29), уравнения которой заданы в виде

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_1, \\ x_3 &= F(x), \quad x = x_2 - k_{o.c} x_1, \\ (T_2 p + 1) p x_1 &= k_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.211)$$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы при замене $F(x) = qx$ имеет вид:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q = 0. \quad (2.212)$$

Характеристическое уравнение разомкнутой линейной части, которое, согласно (2.80), получается отсюда при $q=0$, будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p = 0.$$

Оно обладает нулевым корнем, но не имеет ни чисто мнимых корней, ни корней с положительной вещественной частью (что и требуется

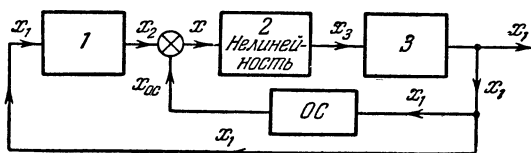


Рис. 2.29.

согласно § 2.3), так как после вынесения p за скобки остается квадратный трехчлен с положительными коэффициентами.

Предпоследний определитель Гурвица для уравнения (2.212) будет

$$H_{n-1} = (T_1 + T_2)(1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) - T_1 T_2 (k_1 + k_{o.c}) k_2 q.$$

Раскрыв скобки, запишем уравнение (2.209):

$$H_{n-1} = T_1 + T_2 + T_1 k_2 (T_1 k_{o.c} - T_2 k_1) q = 0. \quad (2.213)$$

Формула (2.210) принимает здесь вид

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q} = T_1 k_2 (T_1 k_{o.c} - T_2 k_1) = 0. \quad (2.214)$$

Величина q не вошла в выражение (2.214). Поэтому в данном простом примере нет необходимости исключать q из (2.213) и (2.214), как указывалось в общем методе. Тут само выражение (2.214) представляет собой уравнение границы устойчивости равновесия:

$$k_{o.c} = \frac{T_2 k_1}{T_1}. \quad (2.215)$$

Это будет именно границей устойчивости равновесия (а не устойчивости), потому что из (2.213) видно, что при

$$k_{o.c} > \frac{T_2 k_1}{T_1} \quad (2.216)$$

будет $H_{n-1} > 0$, а условие существования периодического решения (2.213) может выполняться только при

$$k_{o.c} < \frac{T_2 k_1}{T_1}, \quad (2.217)$$

так как все параметры и коэффициенты q положительны (по их физическому смыслу).

Полученные соотношения согласуются с построением областей устойчивости равновесия, произведенным для этого примера в главе I (рис. 1.21 и 1.22).

Согласно общему методу, изложенному выше, необходимо еще проверить положительность всех остальных определителей Гурвица, кроме уже обследованного H_{n-1} . В данном случае (система третьего порядка) это сводится к положительности коэффициентов характеристического уравнения (2.212). Из условия положительности свободного члена при этом имеем неравенства

$$k_{o.c} > -k_1 \quad \text{и} \quad k_2 > 0, \quad (2.218)$$

которые в сочетании с (2.216) определяют области устойчивости равновесия, показанные на рис. 2.30. Это соответствует первому этапу

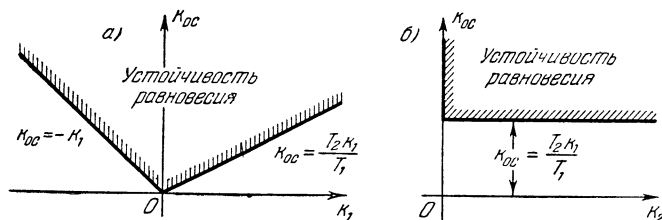


Рис. 2.30.

исследования, дающему условия устойчивости, достаточные при любой форме нелинейности, так как пока еще не рассматривались ограничения возможных значений q . На втором этапе исследования для определения необходимых условий устойчивости потребуем, чтобы получающееся из (2.213) и (2.214) значение q не выходило за рамки возможных для данной нелинейности значений. Из (2.213) и (2.214) имеем:

$$q = \frac{T_1 + T_2}{T_1 k_2 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})} = \infty. \quad (2.219)$$

Для рассмотренной в § 1.3 нелинейности (идеальное реле) это является возможным значением, так как там $0 \leq q \leq \infty$ (рис. 2.31, а). То же самое будет, если вместо реле 2 (рис. 2.29) поставить нелинейное звено $x_3 = F(x)$ с криволинейной характеристикой (рис. 2.31, б), для которой $k \leq q \leq \infty$.

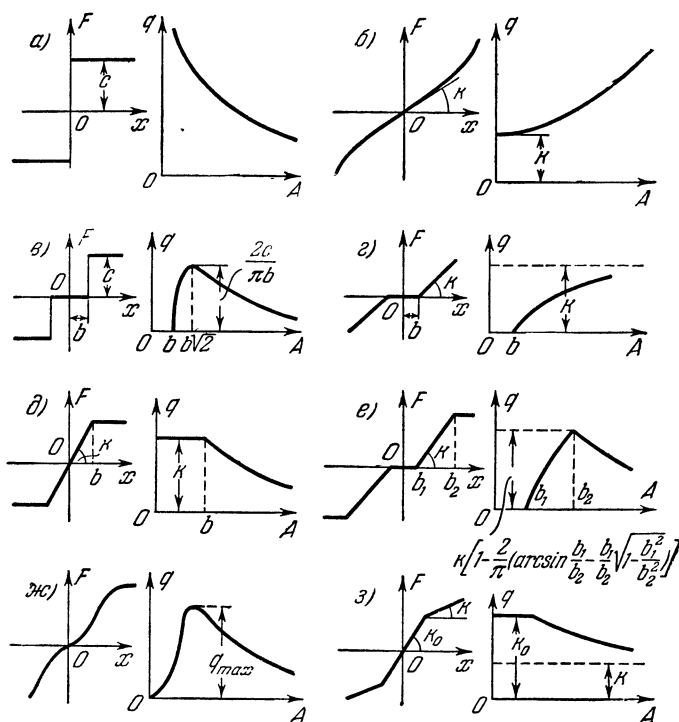


Рис. 2.31.

Если же в качестве нелинейного звена 2 в той же самой системе (рис. 2.29) будет стоять звено с зоной нечувствительности (рис. 2.31, в или г), или ограниченно-линейное звено с насыщением (рис. 2.31, д), или более сложного вида нелинейности (рис. 2.31, е, ж), то для всех них величина q будет иметь ограниченную область изменения:

$$0 \leq q \leq q_{\max}; \quad (2.220)$$

для нелинейности типа рис. 2.31, з эта область будет

$$q_{\min} \leq q \leq q_{\max} \quad (q > 0). \quad (2.221)$$

Поэтому во всех этих случаях для определения границы устойчивости равновесия нужно вместо получающегося из (2.213) и (2.214)

значения $q = \infty$ взять q_{\max} . Тогда, согласно (2.213), граница устойчивости будет

$$k_{o.c} = \frac{T_2 k_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 k_2 q_{\max}}; \quad (2.222)$$

условия же (2.218) остаются прежними. На рис. 2.32, а и б показаны линии 1, определяемые уравнением (2.222). Из сравнения с рис. 2.30 видно, что ограничение возможных значений q сверху в данной задаче

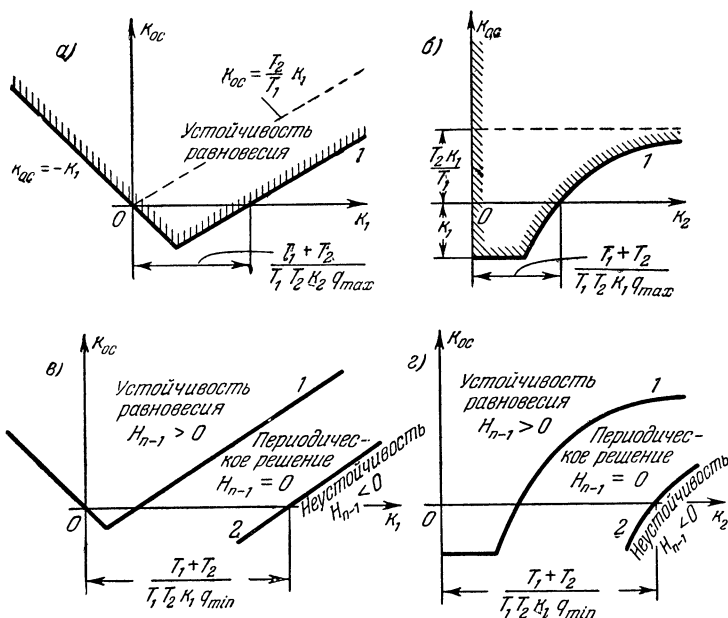


Рис. 2.32.

расширяет область устойчивости равновесия системы. В результате получаем условия устойчивости не только достаточные, но и необходимые.

Конкретное выражение величины q_{\max} , фигурирующее на рис. 2.32, а и б, зависит от формы нелинейности, как указано на рис. 2.31. Следовательно, и положение границы устойчивости равновесия системы будет зависеть от формы нелинейности.

Особо отметим случай (2.221). Там выполнение равенства (2.213) возможно только при условии

$$\frac{T_2 k_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 k_2 q_{\min}} < k_{o.c} < \frac{T_2 k_1}{T_1} - \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 k_2 q_{\max}}, \quad (2.223)$$

если ограничиться рассмотрением только положительных значений всех параметров. Поэтому область периодического решения здесь ограни-

чена еще с другой стороны, где она переходит в область неустойчивости системы (линии 2 на рис. 2.32, в, г). Аналогичная картина будет и для нелинейности типа рис. 2.31, б с той лишь разницей, что там $q_{\max} = \infty$. Во всех же остальных случаях, кроме рис. 2.31, б, з, $q_{\min} = 0$, вследствие чего область периодического решения продолжается неограниченно вправо от линии 1 (рис. 2.32, а и б).

Пример 2. Приведем пример другой автоматической системы, в которой, наоборот, величина q_{\min} определяет границу устойчивости

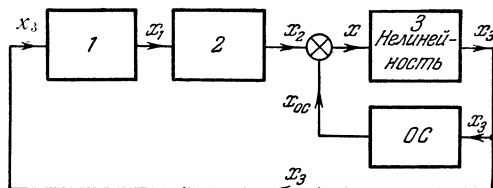


Рис. 2.33.

равновесия, а q_{\max} — неустойчивости. Рассмотрим систему (рис. 2.33), описываемую уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) p x_1 &= -k_1 x_3, \\ x_2 &= (k_2 + k_3 p) x_1, \\ p x_3 &= F(x), \quad x = x_2 - k_{o.c.} x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.224)$$

при положительных значениях коэффициентов.

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы при однозначной нечетно-симметричной нелинейности $F(x)$ будет

$$T_1 p^3 + (1 + k_{o.c.} T_1 q) p^2 + (k_{o.c.} + k_1 k_3) q p + k_1 k_2 q = 0. \quad (2.225)$$

При $q = 0$ имеем $T_1 p^3 + p^2 = 0$, т. е. корни линейной части удовлетворяют требованиям § 2.3.

Предпоследний определитель Гурвица для (2.225) будет

$$H_{n-1} = (1 + k_{o.c.} T_1 q) (k_{o.c.} + k_1 k_3) q - T_1 k_1 k_2 q.$$

Уравнение (2.209) поэтому примет вид

$$H_{n-1} = k_{o.c.} T_1 (k_{o.c.} + k_1 k_3) q^2 + (k_{o.c.} + k_1 k_3 - T_1 k_1 k_2) q = 0, \quad (2.226)$$

а уравнение (2.210)

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q} = 2 k_{o.c.} T_1 (k_{o.c.} + k_1 k_3) q + k_{o.c.} + k_1 k_3 - T_1 k_1 k_2 = 0. \quad (2.227)$$

Оба эти уравнения удовлетворяются при $q=0$, если

$$k_{0.c} + k_1 k_3 - T_1 k_1 k_2 = 0$$

или

$$k_2 = \frac{k_{0.c} + k_1 k_3}{k_1 T_1}. \quad (2.228)$$

Эта граница изображена на рис. 2.34, а.

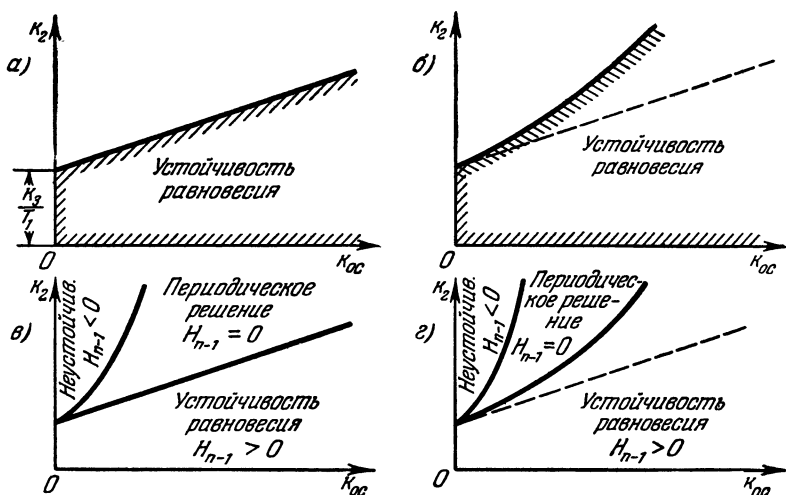


Рис. 2.34.

Если же $q \neq 0$, то уравнение (2.226) можно разделить на q и вместо (2.227) написать:

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{H_{n-1}}{q} \right) = k_{0.c} T_1 (k_{0.c} + k_1 k_3) = 0,$$

откуда получаем дополнительную границу устойчивости равновесия (рис. 2.34, а)

$$k_{0.c} = 0. \quad (2.229)$$

Утверждение, что равенство (2.228) определяет именно границу устойчивости равновесия (а не неустойчивости), вытекает из знака второй производной:

$$\frac{\partial^2 H_{n-1}}{\partial q^2} = 2k_{0.c} T_1 (k_{0.c} + k_1 k_3) > 0,$$

т. е. здесь действительно имеется минимум H_{n-1} .

В этом же можно убедиться и простой подстановкой в выражение (2.226) значения

$$k_2 < \frac{k_{0.c} + k_1 k_3}{k_1 T_1}, \quad (2.230)$$

что дает $H_{n-1} > 0$ при любом положительном значении q (см. область устойчивости равновесия на рис. 2.34, а).

Кроме того, из условия положительности свободного члена характеристического уравнения (2.225) имеем $k_2 > 0$.

Полученная таким образом на первом этапе исследования область устойчивости равновесия (рис. 2.34, а) будет одной и той же независимо от вида нелинейности. Это соответствует достаточным условиям устойчивости. Они будут и необходимыми для всех случаев, когда значение $q = 0$, отвечающее условию (2.228), является возможным. Это будет иметь место, в частности, для всех нелинейностей, изображенных на рис. 2.31, кроме двух: рис. 2.31, б и з. Для последних

$$q_{\min} = k. \quad (2.231)$$

Это значение и надо подставить в уравнение (2.226) вместо $q = 0$ для получения границы устойчивости равновесия (на втором этапе исследования), что дает (рис. 2.34, б)

$$k_2 = \frac{k_{o.c} + k_1 k_3}{T_1 k_1} (1 + T_1 k_{o.c} q_{\min}). \quad (2.232)$$

В данном случае область устойчивости равновесия расширяется, в отличие от прежнего примера, при наличии ограничения величины q снизу (см. (2.231)).

Ограничение же величины q сверху приведет в данном примере к появлению области неустойчивости системы. Так, если q изменяется в пределах

$$0 \leq q \leq q_{\max} \quad \text{или} \quad q_{\min} \leq q \leq q_{\max} \quad (2.233)$$

(все нелинейности на рис. 2.31, кроме 2.31, а и б), то условие наличия периодического решения (2.226) при всех положительных параметрах может выполняться лишь при

$$k_2 < \frac{k_{o.c} + k_1 k_3}{T_1 k_1} (1 + T_1 k_{o.c} q_{\max}). \quad (2.234)$$

В противном случае $H_{n-1} < 0$ при любом возможном значении q из интервала (2.233), т. е. имеется область неустойчивости (рис. 2.34, в или з).

Пример 3. Рассмотрим, далее, третий пример нелинейной системы, в которой минимум H_{n-1} (граница устойчивости равновесия) определяется не значениями $q = \infty$ и $q = 0$, как в предыдущих двух примерах, а некоторым промежуточным текущим значением q . Пусть автоматическая система (рис. 2.33) описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p^2 + T_2 p + 1) x_1 &= -k_1 x_3, \\ x_2 &= (k_2 + k_3 p + k_4 p^2) x_1, \\ p x_3 &= F(x), \quad x = x_2 - k_{o.c} x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.235)$$

При однозначной нечетно-симметричной нелинейности $F(x)$ характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы здесь будет

$$T_1^3 p^3 + [T_2 + (k_{o.c} T_1^2 + k_1 k_4) q] p^2 + [1 + (k_{o.c} T_2 + k_1 k_3) q] p + (k_{o.c} + k_1 k_2) q = 0. \quad (2.236)$$

Предпоследний определитель Гурвица имеет вид

$$H_{n-1} = [T_2 + (k_{o.c} T_1^2 + k_1 k_4) q] [1 + (k_{o.c} T_2 + k_1 k_3) q] - T_1^2 (k_{o.c} + k_1 k_2) q,$$

вследствие чего уравнение (2.209) будет

$$H_{n-1} = T_2 + (\alpha + \beta - \gamma) q + \frac{\alpha\beta}{T_2} q^2 = 0 \quad (\text{при } T_2 \neq 0), \quad (2.237)$$

где обозначено

$$\alpha = T_2 (k_{o.c} T_2 + k_1 k_3), \quad \beta = k_{o.c} T_1^2 + k_1 k_4, \quad \gamma = T_1^2 (k_{o.c} + k_1 k_2). \quad (2.238)$$

Уравнение же (2.210) примет вид

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q} = \alpha + \beta - \gamma + \frac{2\alpha\beta}{T_2} q = 0. \quad (2.239)$$

Определив отсюда

$$q = -\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2\alpha\beta} T_2 \quad (2.240)$$

и подставив его в уравнение (2.237), получим уравнение границы устойчивости равновесия системы в виде

$$(\alpha + \beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta = 0. \quad (2.241)$$

На плоскости параметров α, β это уравнение дает параболу (рис. 2.35, а), осью которой служит биссектриса координатного угла (прямая $\beta = \alpha$). Эта парабола касается осей координат в точках $A (\beta = \gamma)$ и $B (\alpha = \gamma)$. Вершина ее C имеет координаты

$$\alpha = \beta = \frac{\gamma}{4}.$$

Из условия положительности свободного члена (2.236), согласно (2.238), имеем:

$$\gamma > 0 \quad \text{при} \quad q > 0. \quad (2.242)$$

В отличие от предыдущих примеров здесь значения q вдоль границы устойчивости изменяются согласно формуле (2.240), причем q будет положительным на участке кривой ACB (рис. 2.35, а), в точках A и B будет $q = \infty$ (при $T_2 \neq 0$), а в точке C

$$q = \frac{4T_2}{\gamma}. \quad (2.243)$$

На участках же AE и BD (рис. 2.35, a), согласно (2.240), значения q будут отрицательными. Распределение значений q вдоль кривой $EACBD$ условно показано на рис. 2.35, b .

В силу условия (2.242) и имея в виду также, что для всех нелинейностей (рис. 2.31) $q \geq 0$, участки AE и BD (рис. 2.35, a), где $q < 0$, надо исключить из рассмотрения. С другой стороны, очевидно, что условие наличия периодического решения (2.237) при $q > 0$ и

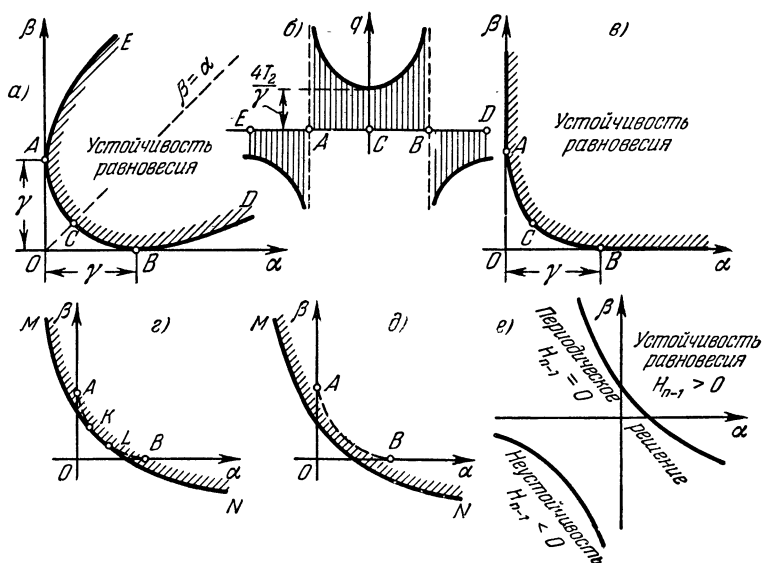


Рис. 2.35.

$\alpha + \beta > \gamma$ может удовлетворяться лишь при $\alpha\beta < 0$, т. е. во втором и четвертом квадрантах плоскости. Поэтому область устойчивости равновесия системы (вместо рис. 2.35, a) принимает вид рис. 2.35, b , где участки $A\beta$ и $B\alpha$ соответствуют значению $q = \infty$.

Если величина q имеет ограничение сверху в виде значения q_{\max} (все нелинейности на рис. 2.31, кроме рис. 2.31, a и b), то область устойчивости равновесия расширяется на некоторых участках, согласно (2.237), до гиперболы

$$T_2 + (\alpha + \beta - \gamma) q_{\max} + \frac{\alpha\beta}{T_2} q_{\max}^2 = 0, \quad (2.244)$$

где q_{\max} имеет свое особое значение для каждой нелинейности (см. рис. 2.31). Если при этом

$$\gamma > \frac{4T_2}{q_{\max}},$$

то в соответствии с (2.243) и рис. 2.35, б границами будут куски гиперболы (2.244) MK и LN , а на участке KL границей остается отрезок прежней параболы (рис. 2.35, г). Если же

$$\gamma < \frac{4T_2}{q_{\max}},$$

то границей устойчивости будет вся гипербола (рис. 2.35, д), причем при

$$\gamma \leq \frac{T_2}{q_{\max}}$$

область устойчивости включает в себя всю первую четверть плоскости α, β .

Наконец, при наличии ограничения q снизу в виде некоторого значения q_{\min} (рис. 2.31, б, з) получаются три области (рис. 2.35, е), причем границей области неустойчивости будет гипербола

$$T_2 + (\alpha + \beta - \gamma) q_{\min} + \frac{\alpha\beta}{T_2} q_{\min}^2 = 0.$$

Параметры α, β и γ , для которых построены все диаграммы на рис. 2.35, являются комбинациями (2.238) реальных параметров системы. Пусть, например, производится выбор коэффициентов k_3 и k_4 (коэффициенты интенсивности введения производных в закон регулирования, см. (2.235)). Из (2.238) видно, что эти коэффициенты входят только в параметры α и β , причем независимо друг от друга. Поэтому задача легко решается с помощью рис. 2.35. Если, кроме того, нужно подобрать и коэффициент k_2 по основному сигналу регулятора, то, согласно (2.238), надо менять параметр γ , что также легко сделать на основании рис. 2.35. Вообще говоря, можно построить также пространственную диаграмму в координатах α, β, γ .

Пример 4. В качестве последнего примера рассмотрим систему с петлевой нелинейностью. Пусть автоматическая система построена по схеме рис. 2.29 и описывается уравнениями (2.211), причем $F(x)$ — петлевая нелинейность, имеющая, например, любую из форм, указанных на рис. 2.36. После гармонической линеаризации уравнения (2.211) примут вид

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_1, \\ x_2 &= \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) x, \quad x = x_2 - k_{o.c} x_1, \\ (T_2 p + 1) p x_1 &= k_2 x_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.245)$$

где q и q' определяются по-разному для разных нелинейностей (рис. 2.36). Характеристическое уравнение этой системы будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_{o.c} q'') p^2 + [1 + T_1 k_2 k_{o.c} q - (k_1 + k_{q.c}) k_2 q''] p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q = 0, \quad (2.246)$$

где обозначено

$$q'' = -\frac{q'}{\Omega} > 0, \quad (2.247)$$

чтобы иметь дело с положительными числами (само $q' < 0$, см. рис. 2.36).

Предпоследний определитель Гурвица имеет здесь вид

$$H_{n-1} = (T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_{o.c} q'') [1 + T_1 k_2 k_{o.c} q - (k_1 + k_{o.c}) k_2 q''] - T_1 T_2 (k_1 + k_{o.c}) k_2 q. \quad (2.248)$$

Для устойчивости системы требуется $H_{n-1} > 0$. Из формулы (2.248), считая все параметры положительными и учитывая требование положительности всех коэффициентов уравнения (2.246), видно, что нали-

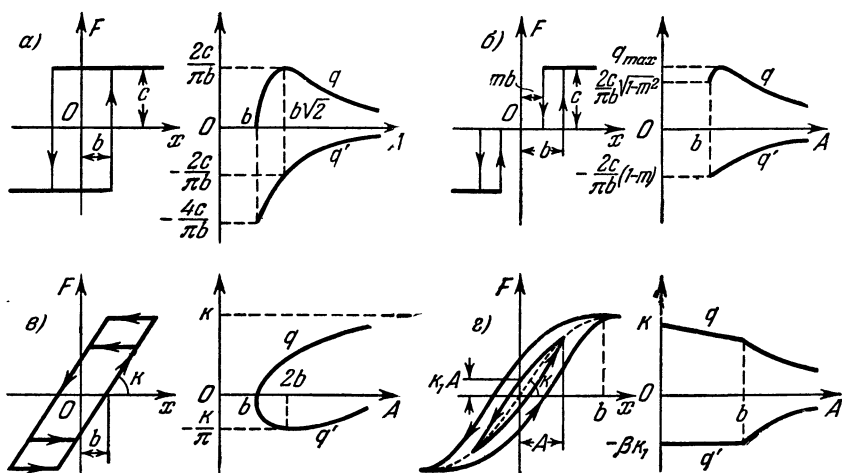


Рис. 2.36.

чие величины q'' сужает область устойчивости равновесия системы тем сильнее, чем больше эта величина q'' . Поэтому для приближенной оценки наибольшего сужения области устойчивости равновесия можно взять *максимально возможную* для исследуемой нелинейности величину q'' (учитывая ориентировочно и величину частоты Ω), не нарушающую, однако, положительности всех коэффициентов уравнения (2.246) при любом q , в том числе при $q = 0$ ¹⁾. Таким образом, обозначив

$$q''_{\max} = k_3,$$

будем полагать

$$0 < k_3 < \frac{T_1 + T_2}{T_1 k_2 k_{o.c}} \quad \text{и} \quad k_3 < \frac{1}{(k_1 + k_{o.c}) k_2}. \quad (2.249)$$

¹⁾ Этим обеспечивается оговоренное в § 2.3 отсутствие корней с положительной вещественной частью в характеристическом уравнении разомкнутой линейной части (2.80).

Введением постоянного значения $k_3 = q''_{\max}$ нелинейное запаздывание, выраженное в виде гистерезисной петли, заменено линейным запаздыванием в форме введения отрицательной производной с постоянным максимально возможным коэффициентом, т. е. с запасом в худшую для устойчивости сторону. К такой системе можно применить прежнюю методику, как для системы с однозначной нелинейностью. Уравнения (2.209) и (2.210), согласно (2.248), принимают здесь вид

$$H_{n-1} = (T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.}) [1 - k_2 k_3 (k_1 + k_{o.c.})] + T_1 k_2 (T_1 k_{o.c.} - T_2 k_1 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.}^2) q = 0, \quad (2.250)$$

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q} = T_1 k_2 (T_1 k_{o.c.} - T_2 k_1 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.}^2) = 0, \quad (2.251)$$

откуда для границы устойчивости равновесия получаем выражение

$$k_1 = \frac{T_1}{T_2} k_{o.c.} (1 - k_2 k_3 k_{o.c.}), \quad (2.252)$$

которое при отсутствии k_3 совпадает с прежним выражением (2.215). Новая граница устойчивости равновесия имеет вид параболы OBC (рис. 2.37), которая касается в начале координат прежней границы OM (2.215) и имеет ось, параллельную оси абсцисс k_1 . Укажем координаты вершины параболы B и ординату точки C (рис. 2.37):

$$(k_1)_B = \frac{T_1}{4T_2 k_2 k_3}, \quad (k_{o.c.})_B = \frac{1}{2k_2 k_3}, \quad (k_{o.c.})_C = \frac{1}{k_2 k_3}.$$

Вторая граница области устойчивости OD , вытекающая из положительности свободного члена характеристического уравнения (2.246), сохраняет прежний вид $k_{o.c.} = -k_1$.

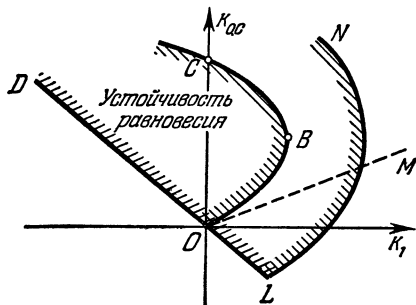


Рис. 2.37.

Изображенная на рис. 2.37 область устойчивости $DOBC$ соответствует, как и прежняя область (рис. 2.30, а), первому этапу исследования, когда величина q может принимать любые значения ($0 \leq q \leq \infty$), причем вдоль граничной параболы $q = \infty$. Если же для рассматриваемой нелинейности величина q ограничена некоторым значением q_{\max} (а это имеет

место для всех нелинейностей на рис. 2.36), то область устойчивости расширяется, а граница ее принимает вид кривой OLN на рис. 2.37 (прежде расширение области устойчивости было показано на рис. 2.32, а). Уравнение этой кривой определяется путем подстановки значения q_{\max} , соответствующего данной нелинейности, в уравнение (2.250).

Поскольку было использовано только максимальное значение q'' с ориентировочным учетом величины Ω , то полученные на рис. 2.37

картины областей устойчивости равновесия следует рассматривать как примерную оценку сужения области устойчивости за счет наличия петли в нелинейной характеристике (по-видимому, с запасом). Более полное исследование в сложных случаях можно произвести с использованием критерия Михайлова, как было указано в начале данного параграфа.

§ 2.8. Сравнение с определением областей устойчивости прямым (вторым) методом Ляпунова

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что привлечение гармонической линеаризации нелинейностей (вместо обычного способа линеаризации) для определения колебательной границы устойчивости равновесия является вполне естественным, так как в рассматриваемых типах нелинейных систем (см. §§ 2.2—2.4) периодическое решение, имеющее место на границе устойчивости, близко к синусоидальному (что и положено в основу гармонической линеаризации). Применение метода гармонической линеаризации дает здесь, как видно из § 2.7, весьма плодотворные результаты.

В данном параграфе будет показано, что полученные в § 2.7 области устойчивости равновесия нелинейных систем очень хорошо согласуются с результатами определения областей устойчивости прямым методом Ляпунова, а на первом этапе исследования (достаточные условия) и в тех случаях, когда все вещественные значения q являются для рассматриваемой нелинейности возможными (необходимые условия), эти результаты точно совпадают друг с другом. При ограниченном интервале возможных значений q метод гармонической линеаризации дает новые необходимые условия устойчивости.

При исследовании этого вопроса будем пользоваться приемами применения метода Ляпунова, разработанным А. И. Лурье [34]. Заметим также, что первый этап исследования в § 2.7 по результатам близок к методу, примененному А. М. Летовым [63].

Ко всем задачам, для которых в § 2.7 методом гармонической линеаризации были получены области устойчивости, будем применять метод Ляпунова и сравнивать результаты. Кроме того, некоторые задачи, решенные в книге А. И. Лурье [34] методом Ляпунова, будем решать методом гармонической линеаризации и также сравнивать результаты.

Пример 1. Нелинейная система описывается уравнениями (2.211):

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_1, \\ x_3 &= F(x), \quad x = x_2 - k_{0.c} x_1, \\ (T_2 p + 1) p x_1 &= k_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.253)$$

Эта система относится в обозначениях А. И. Лурье к классу систем ([34], стр. 25)

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_{\alpha} + h_k f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{s=1}^n j_s \eta_s,$$

причем в данной задаче имеем:

$$n=3, \quad \eta_1 = x_2, \quad \eta_2 = x_1, \quad \eta_3 = p x_1, \quad f(\sigma) = F(x),$$

вследствие чего система (2.253) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\frac{1}{T_1} \eta_1 - \frac{k_1}{T_1} \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= \eta_3, \\ \dot{\eta}_3 &= -\frac{1}{T_2} \eta_3 + \frac{k_2}{T_2} f(\sigma), & \sigma &= \eta_1 - k_{o.c} \eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.254)$$

Корни определителя

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_1} - \lambda & -\frac{k_1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_2} - \lambda \end{vmatrix}$$

будут

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{T_2}.$$

Заметим, что определитель $D(\lambda)$ точно соответствует многочлену $Q(p)$ в наших общих формулах (§§ 2.2 — 2.4, 2.6). Поэтому $D(\lambda) = 0$ является характеристическим уравнением разомкнутой линейной части системы.

Далее по формулам А. И. Лурье ([34], стр. 23 и 26) вычисляем:

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{k_1 k_2}{T_1 T_2}, \quad H_2 = \frac{k_2}{T_2} \left(\frac{1}{T_1} + \lambda \right), \quad H_3 = \frac{k_2}{T_2} \lambda \left(\frac{1}{T_1} + \lambda \right), \\ D'(\lambda) &= -\lambda \left(\frac{1}{T_2} + \lambda \right) - \left(\frac{1}{T_1} + \lambda \right) \left(\frac{1}{T_2} + \lambda \right) - \lambda \left(\frac{1}{T_1} + \lambda \right), \\ \gamma_1 &= \frac{k_1 k_2 T_1}{T_1 - T_2}, \quad \gamma_2 = -k_2 (k_1 + k_{o.c}), \quad \gamma_3 = \frac{k_1 k_2 T_2}{T_2 - T_1} + k_{o.c} k_2, \\ \beta_1 &= \frac{k_1 k_2}{T_2 - T_1}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \frac{k_1 k_2}{T_1 - T_2} - \frac{k_{o.c} k_2}{T_2}. \end{aligned}$$

Поэтому величины Γ^2 и ϑ ([34], стр. 78), определяющие границы устойчивости, здесь будут:

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_3}{\lambda_3} = k_2 (k_1 + k_{o.c}), \\ \vartheta &= \frac{(\beta_1 - \beta_3)(\lambda_1 - \lambda_3)}{4\lambda_1 \lambda_3} = -\frac{k_2}{4} \left(2k_1 + k_{o.c} - \frac{T_1}{T_2} k_{o.c} \right). \end{aligned}$$

Условия устойчивости по А. И. Лурье ([34], стр. 80) имеют вид

$$\Gamma^2 > 0 \quad \text{и} \quad -4\theta < \Gamma^2.$$

Первое из них дает

$$k_2(k_1 + k_{o.c}) > 0, \quad \text{т. е. } k_{o.c} > -k_1 \quad \text{и} \quad k_2 > 0, \quad (2.255)$$

а второе

$$k_2(2k_1 + k_{o.c}) - \frac{T_1}{T_2} k_{o.c} k_2 < k_2(k_1 + k_{o.c}),$$

откуда

$$k_{o.c} > \frac{T_2}{T_1} k_1. \quad (2.256)$$

Легко видеть, что оба эти условия устойчивости (2.255) и (2.256), полученные методом Ляпунова, совершенно точно совпадают с полученными в § 2.7 методом гармонической линеаризации условиями устойчивости (2.218) и (2.216), соответствующим графикам на рис. 2.30.

Как известно, теоремы прямого метода Ляпунова дают достаточные условия устойчивости, которые не всегда являются необходимыми. Сравнение полученных здесь результатов с результатами примера 1 в § 2.7 говорит о том, что в данной задаче формулы Лурье, соответствующие методу Ляпунова, дают необходимые и достаточные условия устойчивости только для систем с такими нелинейностями (например, рис. 2.31, а и б), для которых значение коэффициента q может принимать любые положительные значения $0 \leq q \leq \infty$. Для остальных же нелинейностей получаемые методом Ляпунова по формулам Лурье достаточные условия (2.255) и (2.256) уже, чем необходимые, дающие, согласно методу гармонической линеаризации, более широкую область устойчивости (2.222) (рис. 2.32), зависящую через величину q_{\max} от формы нелинейности. Условия же А. И. Лурье не зависят от формы нелинейности, т. е. они достаточны при любой однозначной нелинейности, в то время как конкретизация формы нелинейности (§ 2.7) приводит к более широкой для каждой данной нелинейности области устойчивости, что вполне естественно.

Пример 2. Нелинейная система описывается уравнениями (2.224):

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) p x_1 &= -k_1 x_3, \\ x_2 &= (k_2 + k_3 p) x_1, \\ p x_3 &= F(x), \quad x = x_2 - k_{o.c} x_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.257)$$

которые в обозначениях А. И. Лурье относятся к следующему классу ([34], стр. 37):

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + n_k \xi, \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{s=1}^n j_s \eta_s - r \xi, \quad (2.258)$$

причем в данном примере

$$n = 2, \quad \eta_1 = x_1, \quad \eta_2 = p x_1, \quad \xi = x_3, \quad f(\sigma) = F(x).$$

Система (2.257) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= -\frac{1}{T_1} \eta_2 - \frac{k_1}{T_1} \xi, \\ \dot{\xi} &= f(\sigma), & \sigma &= k_2 \eta_1 + k_3 \eta_2 - k_{o.c} \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.259)$$

Корни определителя

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} - \lambda \end{vmatrix}$$

будут:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_1}.$$

По формулам А. И. Лурье ([34], стр. 38) вычисляем:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{k_1}{T_1}, & N_2 &= \frac{k_1}{T_1} \lambda, \\ D_1 &= -\frac{1}{T_1} - \lambda, & D_1' &= -1, \\ \beta_1 &= -k_1 k_2, & \beta_2 &= k_1 k_2 - \frac{k_1 k_3}{T_1}. \end{aligned}$$

Вопрос об устойчивости здесь решается наличием вещественного решения квадратного уравнения относительно некоторой переменной a_2 ([34], стр. 68):

$$2a_2 \sqrt{k_{o.c}} + a_2^2 T_1 + k_1 k_2 - \frac{k_1 k_3}{T_1} = 0.$$

Поскольку отсюда

$$a_2 = -\frac{\sqrt{k_{o.c}}}{T_1} \pm \sqrt{\frac{k_{o.c}}{T_1^2} - \frac{k_1 k_2}{T_1} + \frac{k_1 k_3}{T_1^2}},$$

то условие вещественности решения при положительных параметрах будет

$$\frac{k_{o.c} + k_1 k_3}{T_1^2} > \frac{k_1 k_2}{T_1}$$

или

$$0 < k_2 < \frac{k_{o.c} + k_1 k_3}{k_1 T_1}, \quad (2.260)$$

что и является условием устойчивости данной нелинейной системы. И в этом случае полученное методом Ляпунова условие (2.260) совершенно точно совпадает с условием устойчивости (2.230), полученным методом гармонической линеаризации (см. также рис. 2.34, а).

Эти условия являются достаточными и необходимыми для всех нелинейностей, изображенных на рис. 2.31, кроме двух: рис. 2.31, б и з,

для которых методом гармонической линеаризации была получена более широкая область устойчивости (2.234), изображенная на рис. 2.34, б, для каждой конкретной формы нелинейности.

Пример 3. Нелинейная система описывается уравнениями (2.235):

$$\left. \begin{aligned} (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) x_1 &= -k_1 x_3, \\ x_2 &= (k_2 + k_3 p + k_4 p^2) x_1, \\ p x_3 &= F(x), \quad x = x_2 - k_{o.c} x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.261)$$

Такого типа система в других обозначениях рассмотрена А. М. Летовым [63] под названием второй задачи Булгакова. В главе IV упомянутой книги получена прямым методом Ляпунова по формулам А. И. Лурье граница области устойчивости системы в виде параболы такого же типа, как и на рис. 2.35, а. Такая парабола еще раньше была получена Б. В. Булгаковым [45] методом малого параметра. Эта парабола соответствует достаточным условиям устойчивости при любой форме однозначной нелинейности. На рис. 2.35 показано расширение области устойчивости системы для конкретных форм нелинейности, полученное методом гармонической линеаризации. Аналогичное расширение, но в других, менее удобных, координатах было получено методом малого параметра у Б. В. Булгакова.

Пример 4. Произведя в примере 4 § 2.7 замену (2.247) с максимально возможным значением $q''_{\max} = k_3$, мы фактически заменили заданную систему с петлевой нелинейностью (2.211) следующей нелинейной системой:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2 &= -k_1 x_1, \\ x_3 &= F(x) - k_3 p x, \quad x = x_2 - k_{o.c} x_1, \\ (T_2 p + 1) p x_1 &= k_2 x_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.262)$$

где $F(x)$ — однозначная нечетно-симметричная нелинейность. Эта замена дает запас при определении устойчивости, так как наличие величины k_3 сужает область устойчивости тем сильнее, чем больше значение k_3 .

Обозначив, как и в примере 1:

$$\eta_1 = x_2, \quad \eta_2 = x_1, \quad \eta_3 = p x_1, \quad f(\sigma) = F(x), \quad \sigma = x,$$

перепишем уравнения (2.262) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\frac{1}{T_1} \eta_1 - \frac{k_1}{T_1} \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= \eta_3, \\ \dot{\eta}_3 &= -\frac{1}{T_2} \eta_3 + \frac{k_2}{T_2} f(\sigma) - \frac{k_2 k_3}{T_2} \dot{\eta}_1 + \frac{k_2 k_3 k_{o.c}}{T_2} \eta_3. \end{aligned}$$

Преобразовав последнее уравнение путем подстановки выражения $\dot{\eta}_1$ из первого, окончательно придем к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\frac{1}{T_1} \eta_1 - \frac{k_1}{T_1} \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= \eta_3, \\ \dot{\eta}_3 &= \frac{k_2 k_3}{T_1 T_2} \eta_1 + \frac{k_1 k_2 k_3}{T_1 T_2} \eta_2 - \frac{1 - k_2 k_3 k_{o.c.}}{T_2} \eta_3 + \frac{k_2}{T_2} f(\sigma), \\ \sigma &= \eta_1 - k_{o.c.} \eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.263)$$

Корни определителя

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_1} - \lambda & -\frac{k_1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{k_2 k_3}{T_1 T_2} & \frac{k_1 k_2 k_3}{T_1 T_2} & -\frac{1 - k_2 k_3 k_{o.c.}}{T_2} - \lambda \end{vmatrix}$$

будут:

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_3 = \frac{1 - k_2 k_3 (k_1 + k_{o.c.})}{T_1 T_2}, \quad \lambda_1 + \lambda_3 = -\frac{T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.}}{T_1 T_2},$$

причем полагаем $\lambda_1 \lambda_3 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_3 < 0$, что согласуется с условиями (2.249).

Далее по формулам А. И. Лурье, как и в примере 1, вычисляем:

$$H_1 = -\frac{k_1 k_2}{T_1 T_2}, \quad H_2 = \frac{k_2}{T_2} \left(\frac{1}{T_1} + \lambda \right), \quad H_3 = \frac{k_2}{T_2} \lambda \left(\frac{1}{T_1} + \lambda \right),$$

$$D'(\lambda) = -3\lambda^2 - 2 \frac{T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.}}{T_1 T_2} \lambda - \frac{1 - k_2 k_3 (k_1 + k_{o.c.})}{T_1 T_2},$$

$$\gamma_1 = -\frac{k_2 (k_1 + k_{o.c.}) + T_1 k_2 k_{o.c.} \lambda_1}{\lambda_1 (2T_1 T_2 + T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.})},$$

$$\gamma_2 = -\frac{k_2 (k_1 + k_{o.c.})}{1 - k_2 k_3 (k_1 + k_{o.c.})}, \quad \gamma_3 = -\frac{k_2 (k_1 + k_{o.c.}) + T_1 k_2 k_{o.c.} \lambda_3}{\lambda_3 (2T_1 T_2 + T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.})},$$

$$\beta_1 = \gamma_1 \lambda_1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \gamma_3 \lambda_3.$$

После довольно громоздких выкладок, связанных с исключением величин λ_1 и λ_3 , получаем:

$$\Gamma^2 = \gamma_1 + \gamma_3 = \frac{k_2 (k_1 + k_{o.c.})}{1 - k_2 k_3 (k_1 + k_{o.c.})},$$

$$\vartheta = \frac{(\beta_1 - \beta_3) (\lambda_1 - \lambda_3)}{4\lambda_1 \lambda_3} = -\frac{k_2 [2T_2 (k_1 + k_{o.c.}) - k_{o.c.} (T_1 + T_2 - T_1 k_2 k_3 k_{o.c.})]}{4T_2 [1 - k_2 k_3 (k_1 + k_{o.c.})]}.$$

Условия устойчивости $\Gamma^2 > 0$ и $-\vartheta < \Gamma^2$ принимают вид

$$k_2 (k_1 + k_{o.c.}) > 0, \quad \text{т. е.} \quad k_{o.c.} > -k_1 \quad \text{при} \quad k_2 > 0, \quad (2.264)$$

$$k_{o.c.} T_1 (1 - k_2 k_3 k_{o.c.}) - k_1 T_2 > 0. \quad (2.265)$$

В обоих случаях полагается, что, исходя из условия $\lambda_1 \lambda_3 > 0$, будет

$$1 - k_2 k_3 (k_1 + k_{0.c}) > 0.$$

Как видим, полученные здесь сложным путем границы устойчивости совершенно точно совпадают с теми, которые были получены в примере 4 § 2.7 более простым способом — только дифференцированием определителя Гурвица H_{n-1} .

Пример 5. А. И. Лурье ([34], стр. 84), применяя метод Ляпунова, получает в качестве примера границы устойчивости для нелинейной системы, описываемой следующими уравнениями ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} T_a p \varphi &= -\xi, \\ (T_r^2 p^2 + T_k p + \delta) \eta &= \varphi, \\ p \xi &= F(x), \quad x = \eta - \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.266)$$

Решим эту же задачу методом гармонической линеаризации.

При однозначной нечетно-симметричной нелинейности $F(x)$ после гармонической линеаризации получим характеристическое уравнение системы (2.266) в виде

$$T_r^2 p^4 + (T_k + T_r^2 q) p^3 + (\delta + T_k q) p^2 + \delta q p + \frac{q}{T_a} = 0.$$

Предпоследний определитель Гурвица будет

$$H_{n-1} = \delta q [(T_k + T_r^2 q)(\delta + T_k q) - T_r^2 \delta q] - \frac{q}{T_a} (T_k + T_r^2 q)^2,$$

вследствие чего уравнение (2.209) принимает вид

$$H_{n-1} = \left(T_k \delta^2 - \frac{T_k^2}{T_a} \right) q + T_k \left(T_k \delta - 2 \frac{T_r^2}{T_a} \right) q^2 + T_r^2 \left(T_k \delta - \frac{T_r^2}{T_a} \right) q^3 = 0. \quad (2.267)$$

Уравнение (2.210) будет

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q} = T_k \delta^2 - \frac{T_k^2}{T_a} + 2 T_k \left(T_k \delta - 2 \frac{T_r^2}{T_a} \right) q + 3 T_r^2 \left(T_k \delta - \frac{T_r^2}{T_a} \right) q^2 = 0. \quad (2.268)$$

Одной из границ устойчивости, по условию положительности свободного члена характеристического уравнения будет значение $q=0$ (при $T_a > 0$). При $q=0$ оба уравнения (2.267) и (2.268) удовлетворяются, если

$$T_k \delta^2 = \frac{T_k^2}{T_a}. \quad (2.269)$$

При $q > 0$ уравнение (2.267) можно поделить на q и вместо уравнения (2.268) записать:

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{H_{n-1}}{q} \right) = T_k \left(T_k \delta - 2 \frac{T_r^2}{T_a} \right) + 2 T_r^2 \left(T_k \delta - \frac{T_r^2}{T_a} \right) q = 0, \quad (2.270)$$

¹⁾ Обозначение $f(\sigma)$ А. И. Лурье заменено здесь на $F(x)$.

откуда

$$q = \frac{T_k(2T_r^2 - T_a T_k \delta)}{2T_r^2(T_a T_k \delta - T_r^2)}. \quad (2.271)$$

Поскольку здесь $q > 0$, то данное выражение для q можно использовать только при условии

$$2T_r^2 > T_a T_k \delta > T_r^2. \quad (2.272)$$

Подставив значение q из (2.271) в уравнение (2.267), поделенное на q , получим:

$$4T_r^2(T_a T_k \delta - T_r^2) - T_a T_k^3 = 0. \quad (2.273)$$

Введем обозначения:

$$\chi = \frac{T_k}{\delta^2 T_a}, \quad \psi = \frac{\delta T_r^2}{T_k^2}. \quad (2.274)$$

Тогда условие (2.269) примет вид

$$\chi = 1, \quad (2.275)$$

а условия (2.273) и (2.272) будут:

$$\chi = \frac{1}{\psi} - \frac{1}{4\psi^2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2\psi} < \chi < \frac{1}{\psi}, \quad (2.276)$$

что и показано графически на рис. 2.38, а. Эти условия совершенно точно совпадают с результатами А. И. Лурье ([34], стр. 84) и представляют собой достаточные условия устойчивости системы при любой форме нелинейности ($0 \leq q \leq \infty$).

Используя метод гармонической линеаризации, на втором этапе исследования замечаем следующее. Вдоль границы устойчивости, согласно (2.271) и (2.276), величина q изменяется по закону

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_r^2}{T_k} q &= 2\psi - 1 & \text{при} & \quad \psi > 0,5, \\ q &= 0 & \text{при} & \quad 0 \leq \psi \leq 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (2.277)$$

Если величина q имеет ограничение сверху q_{\max} (все нелинейности на рис. 2.31, кроме рис. 2.31, а и б), то, обозначив

$$x = \frac{T_r^2}{T_k} q_{\max}, \quad (2.278)$$

получим ограничение изменения величины $\frac{T_r^2}{T_k} q$ вдоль границы устойчивости, указанное на рис. 2.38, в, вследствие чего прежняя достаточная граница (рис. 2.38, а) будет и необходимой только при $0 < \psi < \frac{1+x}{2}$. При

$$\psi > \frac{1+x}{2}$$

нужно непосредственно воспользоваться подстановкой величины q_{\max} в уравнение (2.267), что с обозначениями (2.274) и (2.278) дает

$$\chi = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{\psi} + \frac{1}{(1+x)^2},$$

где, согласно (2.278) и рис. 2.31, величина x имеет свое особое значение для каждой данной нелинейности. Эта новая граница CD

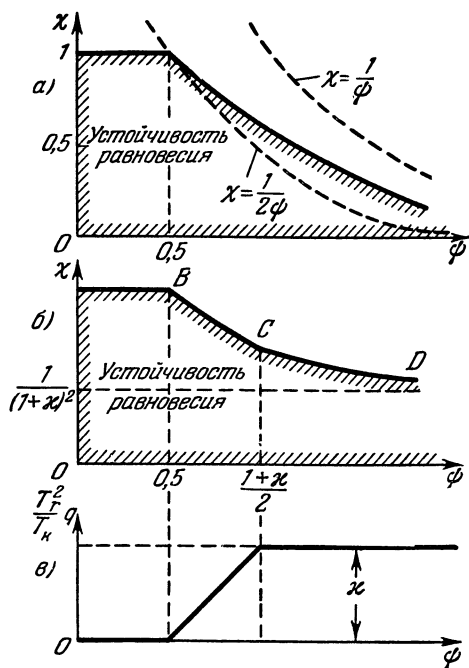


Рис. 2.38.

изображена на рис. 2.38, б. Она расширяет область устойчивости в зависимости от формы нелинейности.

Пример 6. Приведем еще один пример нелинейной системы, рассмотренной А. И. Лурье ([34], стр. 87) методом Ляпунова:

$$\left. \begin{aligned} (p^3 + 2np + \omega^2) \eta &= -N\xi, \\ p\xi &= F(x), \quad x = (j_0 + j_1 p) \eta - r\xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.279)$$

Решим здесь ту же задачу методом гармонической линеаризации. Характеристическое уравнение системы (2.279) после гармонической линеаризации будет

$$p^3 + (2n + rq)p^2 + (\omega^2 + 2nrq + j_1 Nq)p + (\omega^2 r + j_0 N)q = 0.$$

Оба уравнения удовлетворяются при $q=0$, если

$$4n^2r + 2nj_1N - j_0N = 0$$

или

$$nj_1 = \frac{j_0}{2} - \frac{2n^2r}{N} \quad (2.288)$$

(см. рис. 2.39, прямая 4), что также совпадает с результатом А. И. Лурье. Если же $q \neq 0$, то уравнение (2.286) можно разделить на q и вместо (2.287) написать:

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{H_{n-1}}{q} \right) = r(2nr + j_1N) = 0,$$

что, однако, не является существенным, так как получаемое отсюда значение

$$nj_1 = -\frac{2n^2r}{N}$$

определяет прямую, которая лежит вне области устойчивости, вытекающей из (2.288).

Заключение. Таким образом, мы видим, что во всех случаях результаты применения метода Ляпунова подтверждают законность определения областей устойчивости нелинейных систем (рассматриваемых типов) методом гармонической линеаризации на первом этапе. Формулы А. И. Лурье, основанные на методе Ляпунова, дают достаточные условия устойчивости, гарантирующие устойчивость системы при любой форме однозначной нечетно-симметричной нелинейности. Они оказываются также и необходимыми, если для заданной нелинейности являются возможными все значения q ($0 \leq q \leq \infty$). В противном случае необходимые условия устойчивости будут шире. При наличии же петлевой нелинейности или нелинейности более общего вида $F(x, px)$ область устойчивости может сузиться. Метод гармонической линеаризации позволяет найти эти расширения и сужения области устойчивости для каждой конкретной заданной нелинейности. Кроме того, метод гармонической линеаризации с привлечением критерия Михайлова позволяет находить области устойчивости и для более сложных нелинейных систем рассматриваемых здесь классов (см. §§ 2.2—2.4, а также примеры в главах IV и VI).

Изложенные факты позволяют надеяться на то, что возможно развитие некоторой строгой теории устойчивости по первому приближению не с помощью разложения Тейлора, а с помощью разложения Фурье, т. е. на основе не обычной, а гармонической линеаризации.

§ 2.9. Определение устойчивости системы в ограниченной области начальных условий

При рассмотрении выделения областей устойчивости равновесия в § 2.7 имелась в виду устойчивость равновесного состояния системы при любых начальных условиях. Таким образом, предполагалось наличие единственного равновесного состояния системы (или единственной

зоны равновесия). Вообще же говоря, нелинейная система может обладать двумя или большим числом равновесных состояний, области устойчивости или неустойчивости которых при всех заданных параметрах системы разделяются определенными соотношениями начальных условий (т. е. начальных отклонений переменных и их производных или начальных амплитуд колебаний). Рассмотрение таких систем часто может быть сведено к рассмотрению систем с единственным состоянием равновесия, если заранее определить нелинейные характеристики вблизи каждого из этих состояний по отдельности и вытекающие отсюда ограничения пределов изменения всех переменных. Затем можно применять методы исследования устойчивости, изложенные в § 2.7, отдельно для каждого из этих состояний равновесия, говоря при этом, однако, не об устойчивости системы при любых начальных условиях, а об устойчивости данного ее состояния равновесия *в ограниченной области начальных условий, определяемой пределами изменения переменных, для которых справедливы составленные уравнения колебаний системы около данного состояния равновесия.*

Этим характеризуется *одно* понятие устойчивости системы в ограниченной области начальных условий. К нему мы больше возвращаться не будем, полагая далее во всех случаях, что выражение «устойчивость системы при любых начальных условиях» (§ 2.7) будет употребляться всегда с молчаливым добавлением: «пределах, для которых справедливы исследуемые уравнения динамики системы, выражающие ее движение около данного равновесного состояния» (такое ограничение может диктоваться не только вышесказанным, но и иными причинами).

Другое понятие устойчивости системы в ограниченной области начальных условий требует особого исследования и состоит в следующем.

Встречаются случаи, когда равновесное состояние нелинейной системы устойчиво *при ограниченных (достаточно малых) начальных отклонениях, в то время как при больших начальных отклонениях переходный процесс в системе оказывается расходящимся*, несмотря на то, что остаются справедливыми те же самые уравнения динамики системы с теми же самыми коэффициентами (параметрами системы) и той же самой нелинейностью. Такой вид устойчивости системы в ограниченной области начальных условий не обнаруживается непосредственно методами, изложенными в § 2.7 (определяющими область устойчивости в пространстве параметров системы при любых начальных условиях). Рассматриваемая теперь область устойчивости должна быть выделена либо в пространстве начальных условий при всех заданных параметрах системы, либо *в совокупном пространстве начальных условий и параметров системы.* В большинстве случаев мы будем ориентироваться на последний случай, как более общий и представляющий больший прак-

тический интерес для задачи синтеза, т. е. для выбора наивыгоднейших параметров нелинейной автоматической системы при ее проектировании.

Типичным случаем ограничения области начальных условий, при которых равновесное состояние системы устойчиво, является наличие одного неустойчивого периодического решения. В самом деле, если начальная амплитуда a_0 меньше амплитуды A , найденной для неустойчивого периодического решения, то переходный процесс затухает (рис. 2.17, б), т. е. равновесное состояние системы *устойчиво* «в малом». Если же начальная амплитуда больше A , то процесс расходится, т. е. система *неустойчива* «в большом» (если нет других особенностей, кроме указанного периодического решения, например, если нет второго, устойчивого, периодического режима). В частности, для нелинейных систем второго порядка этот вид ограничения области устойчивости на плоскости начальных условий изображается неустойчивым предельным циклом, соответствующим неустойчивому периодическому решению (рис. 2.40, а).

В случае, когда имеется второе периодическое решение, устойчивое, с большей амплитудой A_2 (рис. 2.40, б), то прежняя неустойчивость системы при больших отклонениях заменится устойчивыми автоколебаниями с амплитудой A_2 , изображаемыми вторым предельным циклом. Однако если амплитуда A_2 будет недопустимо велика по условиям работы данной системы, то практически это будет эквивалентно неустойчивости системы при начальных условиях, выходящих за пределы первого предельного цикла (неустойчивость «в большом»). В случае, когда амплитуда A_2 невелика и не опасна (а может быть, даже желательна) при работе данной системы, в то время как амплитуда первого цикла A_1 (рис. 2.40, б) очень мала, система будет практически работоспособной автоколебательной системой. При этом слишком малая область устойчивости внутри первого цикла не будет иметь практического значения, так как реально действующие на систему возмущения будут всегда выводить ее из этой области. Это случай *жесткого возбуждения автоколебаний*, происходящего в результате начального толчка конечной величины, в отличие от *мягкого возбуждения* при наличии единственного устойчивого периодического решения (рис. 2.40, в), который соответствует картине процессов на рис. 2.17, а.

Возможен также случай устойчивости автоколебаний при ограниченных начальных условиях, т. е. внутри неустойчивого предельного цикла (рис. 2.40, г), за пределами которого находится область неустойчивости системы «в большом». Здесь практическая трактовка поведения системы зависит от величин амплитуд обоих периодических решений. Если амплитуда A_1 (рис. 2.40, г) достаточно велика, так что реальные возмущения не могут вывести систему за ее пределы, а амплитуда A_2 допустима при работе данной системы, то данная система практически работоспособна. При нарушении одного из этих

условий систему следует забраковать, считая ее *практически неустойчивой*.

Точно так же нелинейную систему с одним неустойчивым периодическим решением (рис. 2.40, а) можно считать практически работоспособной в случае, если амплитуда A достаточно велика. Иначе система будет практически неустойчива.

Здесь говорилось о работоспособности системы в обычном для практики смысле. Однако возможна специальная задача, в которой

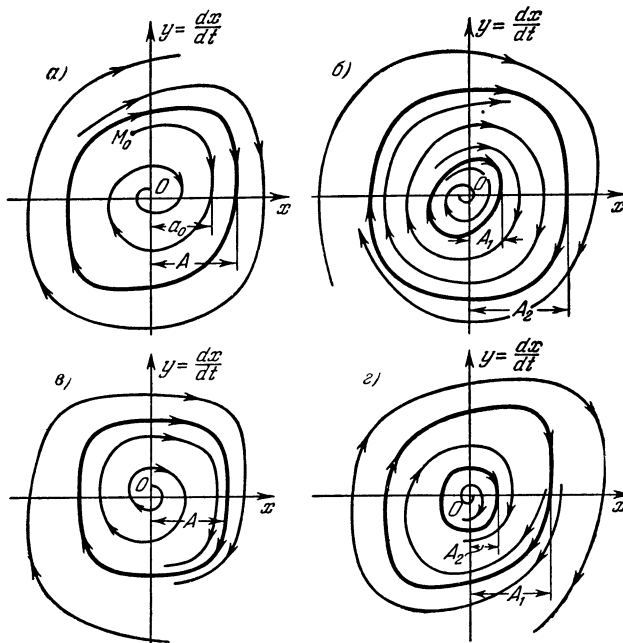


Рис. 2.40.

может использоваться переход системы в неустойчивое состояние при больших отклонениях для того, чтобы привести систему в какое-либо совершенно новое состояние. Такая задача может встретиться в технике самонастраивающихся автоматических систем и в вычислительной технике. Тогда выбором параметров системы можно добиться заданного значения A для границы начальных условий, за пределами которой появляется требуемая неустойчивость системы.

Говоря об определении какой-либо области начальных условий, мы всегда должны представлять себе фазовое пространство, число измерений которого равно порядку системы. Однако в случае наличия периодического решения это представление можно упростить. Так, например, для системы второго порядка вместо задания двух начальных условий (x_0, y_0) достаточно задать одну величину a_0 , которую

будем называть *начальной амплитудой* (рис. 2.40, *а* и 2.17, *б*), так как очевидно, что если $a_0 < A$, то значения x_0 , y_0 (точка M_0 на рис. 2.40, *а* и 2.17, *б*) обязательно лежат внутри области, ограниченной предельным циклом, независимо от расположения начальной точки M_0 переходного процесса. Таким же понятием начальной амплитуды в методе гармонической линеаризации будем пользоваться и для систем высокого порядка, хотя там картина процессов значительно сложнее. Это положение базируется на свойстве сильной устойчивости, описанном Н. Н. Боголюбовым ([102], глава IV) и проиллюстрированном выше на стр. 155.

Кроме того, определяя устойчивость системы в ограниченной области начальных условий при помощи неустойчивого периодического решения, надо помнить, что, вообще говоря, возможны и другие ограничения такой области, например в виде сепаратрис, которых, однако, касаться не будем как менее существенных для рассматриваемых автоматических систем.

В § 2.7 пространство параметров нелинейной системы было разделено (ограничиваясь в основном положительными значениями параметров, согласно их физическому смыслу) на три области: область устойчивости системы при любых начальных условиях, область существования периодических решений и область неустойчивости системы при любых начальных условиях. Теперь в области существования периодических решений будем определять либо автоколебания, либо устойчивость системы в ограниченной области начальных условий, либо их комбинации, описанные выше. При этом будут определяться сходимости и расходимости колебательных переходных процессов при разных начальных условиях в области существования периодических решений. Совокупность начальных условий, согласно сказанному выше, будем характеризовать одной величиной начальной амплитуды a_0 . Такой подход решения задачи в первом приближении достаточен для многих инженерных расчетов особенно на первом этапе проектирования нелинейной автоматической системы.

Так, например, при наличии одного неустойчивого периодического решения (рис. 2.17, *б* и 2.40, *а*) пространство начальных условий (заменяемое нами осью амплитуд a) делится на две области: сходящихся и расходящихся колебаний, как указано на рис. 2.41, *а*. При этом колебания могут сходиться не обязательно в точку O , а в любую точку внутри зоны нечувствительности около точки O , половина ширины которой обозначается буквой b . При отсутствии этой зоны имеем $b = 0$. Сходимость и расходимость процессов удобно обозначать стрелками (рис. 2.41, *а*). На рис. 2.41 показано также разбиение оси начальных условий (оси амплитуд) на области сходящихся и расходящихся колебаний для всех остальных картин процессов, изображенных на рис. 2.40. Стрелки указывают здесь как бы *области притяжения* нестационарных решений к стационарным (равновесным или автоколебательным).

Очевидно, что определенное положение точки A (амплитуда периодического решения) на рис. 2.41, a отвечает определенному заданию всех параметров системы. Поэтому каждая диаграмма типа рис. 2.41 соответствует определенной точке пространства параметров данной нелинейной системы. Следовательно, если к координатным осям пространства параметров системы добавить одно новое измерение — ось начальных условий (ось амплитуд a), то получится совокупное пространство параметров и начальных условий, в котором удобно изображать области притяжения (в том числе и области устойчивости системы в ограниченной области начальных условий) при наличии

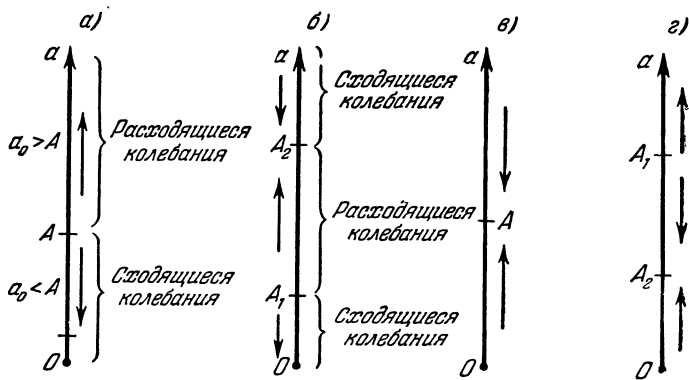


Рис. 2.41.

периодических решений. Так и следует поступать при исследовании той области параметров системы, в которой существуют периодические решения.

Допустим, что для некоторой нелинейной системы выделены (§ 2.7) область устойчивости системы и область существования периодических решений (рис. 2.42, a) по какому-либо одному параметру k (например, коэффициенту усиления), разделенные «критическим» значением $k_{кр}$. Затем пусть найдено единственное устойчивое периодическое решение (§§ 2.3 и 2.4), зависимость амплитуды A которого от параметра k показана на рис. 2.42, $б$.

Тогда можно построить (рис. 2.42, $в$) на плоскости (в общем случае в пространстве) с координатными осями k (параметр системы) и a (амплитуды переходных процессов) границу, разделяющуюся на две указанные выше области (пунктирная линия). Линия $a = A$ разделяет область существования периодических решений на две области: сходящихся процессов (выше линии $a = A$, т. е. при начальной амплитуде $a_0 > A$), и расходящихся процессов (ниже линии $a = A$, т. е. при $a_0 < A$). На чертеже условимся обозначить это стрелками (рис. 2.42, $в$), смысл которых понятен без надписей. Такую же стрелку можно поставить и в области устойчивости при любых начальных условиях

($k < k_{кр}$). Изображенная на рис. 2.42, в картина соответствует рис. 2.17, а, 2.40, в и 2.41, в. Аналогичная картина изображена на рис. 2.43, а для процессов типа рис. 2.17, б, 2.40, а и 2.41, а (при $k_{кр1} < k < k_{кр2}$), а на рис. 2.43, б — для рис. 2.40, б и 2.41, б (при

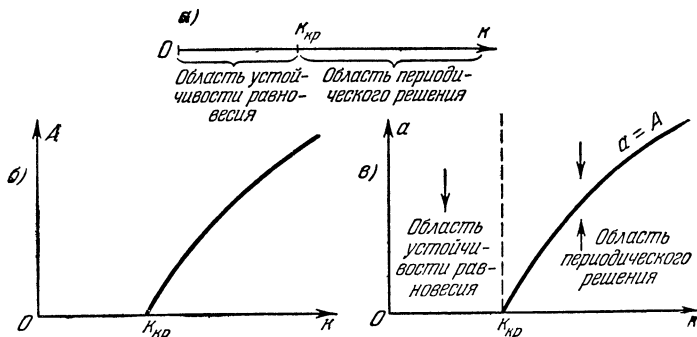


Рис. 2.42.

$k > k_{кр}$). Как видно, неустойчивое периодическое решение является границей областей притяжения.

Поскольку методы выделения областей устойчивости системы в пространстве параметров, а также способы определения периодических решений и исследование их устойчивости были уже описаны

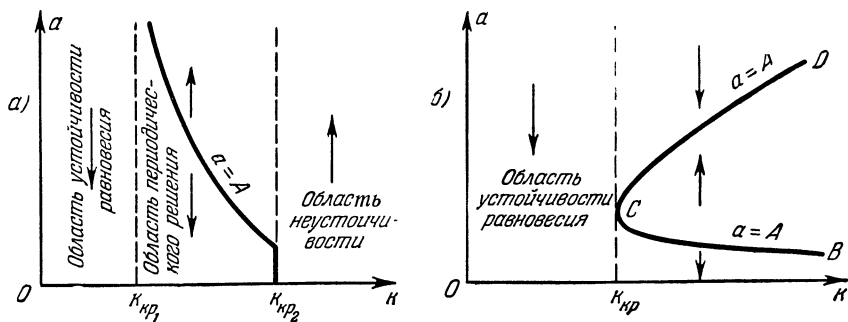


Рис. 2.43.

в предыдущих параграфах, то теперь остается только изложить метод определения областей притяжения, т. е. областей сходимости и расходимости переходных процессов внутри области существования периодических решений при разных начальных условиях (как частный случай при этом получится и выделение области начальных условий типа рис. 2.43, а), при которых равновесное состояние системы устойчиво. Основа метода будет та же, что и в § 2.7.

Прежде всего положим, что во всей исследуемой области параметров системы и начальных амплитуд соблюдаются все условия применимости метода гармонической линеаризации, установленные в § 2.2 и сформулированные кратко в начале § 2.3. Кроме того, как и в §§ 2.4 и 2.7, положим, что во всей этой области для характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы остаются положительными все определители Гурвица, кроме предпоследнего H_{n-1} , или, что то же самое, выполняется критерий Михайлова или Гурвица для многочлена пониженной степени (2.118). Для систем не выше четвертого порядка это эквивалентно положительности коэффициентов

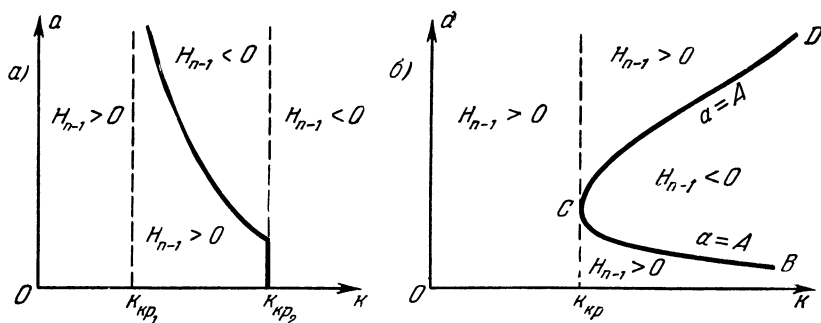


Рис. 2.44.

характеристического уравнения во всей исследуемой области параметров системы и начальных амплитуд. При этом надо иметь в виду, что амплитуда входит в характеристическое уравнение только через коэффициенты гармонической линеаризации q и q' . Следовательно, выражение «*во всей исследуемой области начальных амплитуд*» нужно применительно к характеристическому уравнению гармонически линеаризованной системы понимать как выражение: «*при всех возможных для данной нелинейности значениях коэффициентов q и q'* ».

Все это обеспечивает отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы, кроме одной пары комплексных корней. Последняя обращается в пару чисто мнимых корней на линии $a = A$ (рис. 2.43), определяющей амплитуду периодического решения, где предпоследний определитель Гурвица $H_{n-1} = 0$. Вне этой линии $a = A$ либо $H_{n-1} > 0$, либо $H_{n-1} < 0$. В первом случае пара мнимых корней приобретает отрицательную вещественную часть и колебательный переходный процесс затухает, а во втором случае — положительную вещественную часть, что свидетельствует о наличии расходящихся колебаний. Так, например, картина процессов, показанным на рис. 2.43, отвечает распределение знаков предпоследнего определителя Гурвица H_{n-1} , изображенное на рис. 2.44. При этом считается, конеч-

но, что положительность всех остальных определителей Гурвица везде соблюдена.

Таков метод оценки сходимости и расходимости колебаний (определения областей притяжения) в нелинейной автоматической системе, поддающейся расчету методом гармонической линеаризации, при разных начальных условиях, выраженных в виде значений начальной амплитуды. Этот метод легко перевести с языка критерия Гурвица на язык критерия Михайлова, что существенно для систем высокого порядка, особенно в сложных задачах и в задачах с временным запаздыванием.

Каждой точке линии $a=A$ (рис. 2.44) отвечает прохождение кривой Михайлова через начало координат (рис. 2.45), что эквивалентно условию $H_{n-1}=0$. Положительность остальных определителей Гурвица гарантируется соответствующим очертанием остальной части кривой Михайлова (она должна идти вокруг начала координат по часовой стрелке, обходя нужное число квадрантов). Если при всех $a > A$ кривая Михайлова за счет изменения коэффициентов q и q' смещается в положения 1 (рис. 2.45), что эквивалентно $H_{n-1} > 0$, а при всех $a < A$ — в положения 2, что эквивалентно $H_{n-1} < 0$, то в первом случае процессы затухают, а во втором — расходятся. Следовательно, при этом получается картина процессов, изображенная на рис. 2.42, в (при $k > k_{кр}$). В обратном случае получим картину типа рис. 2.43, а ($k_{кр1} < k < k_{кр2}$). В случае же, показанном на рис. 2.43, б, кривая Михайлова должна быть смещена в положения 1 (рис. 2.45) при всех значениях a , лежащих под нижней кривой $a=A$ и над верхней кривой $a=A$, и в положения 2 при всех значениях a , лежащих между кривыми $a=A$.

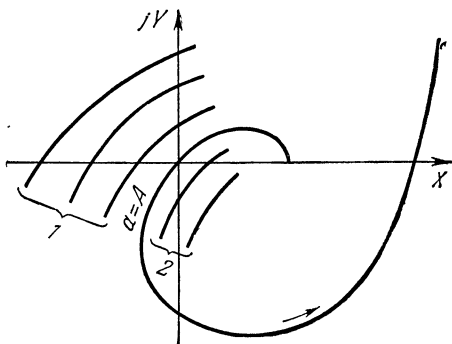


Рис. 2.45.

Из рассмотрения этих методов оценок сходимости и расходимости переходных процессов при разных начальных условиях и в разных областях значений параметров системы можно вывести некоторые важные заключения с точки зрения упрощения инженерных расчетов.

Все критерии устойчивости периодического решения, изложенные в § 2.4 (кроме метода осреднения периодических коэффициентов), имеют по существу ту же основу, что и методы §§ 2.7 и 2.9, с той лишь разницей, что в § 2.4 исследовалось поведение системы лишь в малой окрестности периодического решения. Пусть по методу § 2.3 найдена зависимость амплитуды периодического решения от параметров

системы, например, в виде рис. 2.42, б и по методу § 2.4 установлена его устойчивость. Полученную в данном примере картину сходимости и расходимости процессов, в том числе и определение устойчивости равновесного состояния (рис. 2.42, в), можно рассматривать как простое распространение результатов исследования устойчивости периодического решения на всю плоскость (k, a). Это следует из того, что указанное на рис. 2.42, в направление стрелок вблизи линии $a = A$ определяется непосредственно при исследовании устойчивости периодического решения. Теперь они только распространены непрерывно на все начальные условия внутри области существования периодического решения, а также и за пределы этой области (левее точки $k = k_{кр}$, рис. 2.42, в), где получена область устойчивости равновесия системы. Точно так же и все стрелки, показанные на

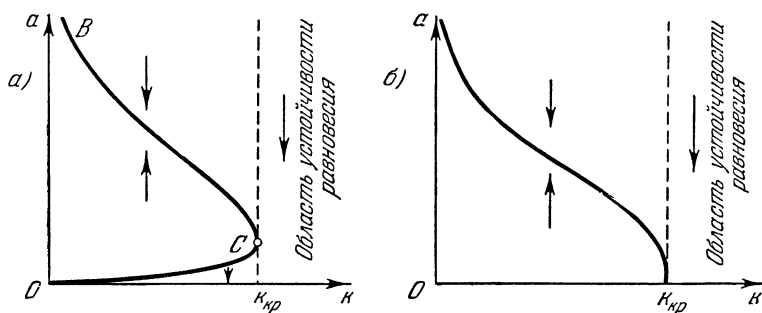


Рис. 2.46.

рис. 2.43, можно трактовать как перенесение результатов исследования устойчивости периодического решения на всю плоскость параметров и начальных условий [49]. Разумеется, что при таком распространении результатов надо быть уверенным в соблюдении всех изложенных в данном параграфе условий.

Можно поступать и иначе. После определения периодических решений (§ 2.3), не исследуя их устойчивости, можно переходить сразу к изложенным в §§ 2.9 и 2.7 исследованиям всего пространства параметров и начальных условий. При этом устойчивость и неустойчивость периодических решений выясняются сами собой без дополнительных исследований.

Другого рода нелинейные системы, редко встречающиеся в автоматике, где разделяющие линии различных типов процессов не будут соответствовать периодическим решениям, а будут определяться иначе (сепаратрисы и т. п.), рассматриваться не будут.

Все описанные исследования базируются, согласно § 2.2, на том, что коэффициенты гармонической линеаризации q и q' достаточно плавно изменяются с изменением амплитуды, т. е. производные $\frac{dq}{da}$

и $\frac{dq'}{da}$ ограничены. В местах резкого изменения q и q' изложенный метод может давать неправильные результаты. Например, в некоторых специфических задачах вместо результата, полученного в виде рис. 2.46, а, точное решение дает результат типа рис. 2.46, б, т. е. неустойчивое периодическое решение (линия OC) и область под ней оказываются ложными. Однако это не имеет существенного практического значения, так как ордината точки C оказывается при этом малой, а значит, и вся линия OC лежит настолько низко, что практически может не приниматься во внимание. Результат же, получаемый изложенным здесь методом для участков плавного изменения q и q' (что дает линию BC , рис. 2.46, а), является надежным и именно он будет определять поведение данной нелинейной системы.

Остановимся еще на разделении границ устойчивости нелинейных систем на опасные и безопасные. *Безопасной границей устойчивости* будем называть такую, на которой равновесное состояние системы еще

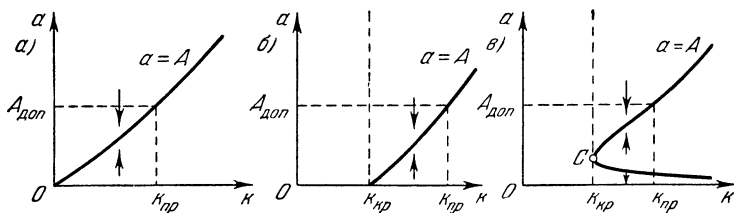


Рис. 2.47.

остается устойчивым в достаточно большой области начальных условий (например, $k = k_{кр}$ на рис. 2.43, а), или же такую, вблизи которой появляются устойчивые автоколебания с достаточно малой амплитудой (например, рис. 2.42, в). К последнему случаю могут относиться также рис. 2.43, б и 2.46, а, если ордината точки C достаточно мала. Если же она велика настолько, что амплитуда устойчивых автоколебаний становится недопустимой для данной системы, то границы устойчивости на рис. 2.43, б и 2.46, а будут *опасными*.

В тех случаях, когда нелинейность такова, что при малых отклонениях система описывается линейными уравнениями, можно говорить о безопасных или опасных границах, определяемых для данной системы по линейным уравнениям. Пример такого рода с учетом возникновения автоколебаний рассмотрен ниже в § 4.4.

Наконец, дадим еще количественное выражение понятия *практической устойчивости автоколебательных систем* [87], о которой выше уже говорилось в общей форме. На практике часто встречаются замкнутые автоматические системы, работающие все время в автоколебательном режиме. К ним относятся, например, вибрационные

регуляторы напряжения, вибрационные измерители ускорения, некоторые гиросtabilизаторы с релейным управлением и т. п. В таких системах вообще может отсутствовать устойчивое положение равновесия, а будет возможен лишь устойчивый автоколебательный режим (рис. 2.47, а). Тогда область устойчивости системы практически надо понимать как такую область параметров, в которой амплитуда автоколебаний не превосходит допустимого для данной системы значения $A_{\text{доп}}$ (область $0 < k < k_{\text{пр}}$ на рис. 2.47, а). Такая же практическая граница устойчивости $k_{\text{пр}}$ может вводиться в рассмотрение и в тех случаях, когда существует область устойчивости равновесного положения (рис. 2.47, б и в), но система должна или вынуждена работать в автоколебательном режиме.

Г Л А В А П

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПРИ СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

При симметричных колебаниях гармоническая линеаризация нелинейной функции $F(x, px)$ сводится к замене ее соотношением (см. § 2.1)

$$F(x, px) = \left[q(A, \Omega) + \frac{q'(A, \Omega)}{\Omega} p \right] x. \quad (3.1)$$

При этом предполагается, что решение для входной величины нелинейного звена ищется в гармоническом виде

$$x = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t$$

и учитывается только первая гармоника разложения в ряд Фурье периодической функции аргумента ψ :

$$F(x, px) = F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi).$$

Коэффициенты гармонической линеаризации в этом случае определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} q(A, \Omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q'(A, \Omega) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Если нелинейная функция не зависит от скорости изменения входной величины, то коэффициенты гармонической линеаризации будут зависеть только от амплитуды колебаний и формулы (3.2) примут вид

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q'(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Как уже указывалось (§ 2.1), те же приемы гармонической линеаризации нелинейностей применимы и тогда, когда нелинейная функция будет зависеть также и от ускорения входной величины или когда под знаком нелинейности будет как входная, так и выходная величины нелинейного звена (нелинейная система второго класса). Здесь это будет показано на конкретных примерах.

Найдем выражения для коэффициентов гармонической линеаризации при симметричных колебаниях в нелинейных системах для наиболее часто встречающихся нелинейностей. Наличие готовых выражений для коэффициентов q и q' значительно облегчит на практике исследование нелинейных систем методом гармонической линеаризации.

§ 3.1. Релейные характеристики

Под релейной характеристикой понимается такое изменение выходной величины нелинейного звена в зависимости от входной, когда при некоторых, вполне определенных значениях входной величины

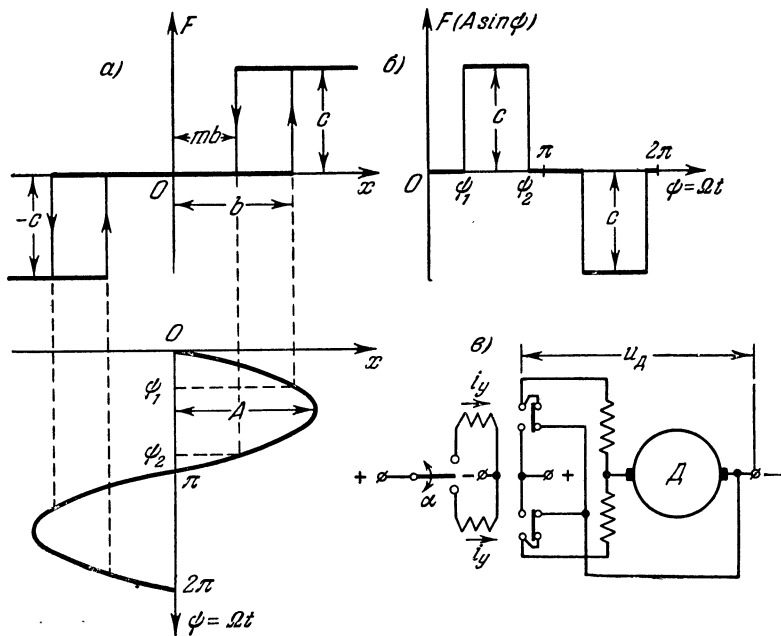


Рис. 3.1.

выходная величина изменяется скачком, а при всех других значениях остается постоянной.

Релейная характеристика общего вида. Релейная характеристика общего вида представлена на рис. 3.1, а. По такой нелинейной зави-

симости, например, изменяется напряжение u_d , приложенное к двигателю, от управляющего тока i_y реле (рис. 3.1, в), если двигатель управляется двумя нейтральными электромагнитными реле и включен по схеме с динамическим торможением¹⁾. Положительное и отрицательное значения тока условно соответствуют подключению того или другого реле при взаимно противоположных перемещениях α управляющего элемента. Различные знаки напряжения, приложенного к двигателю, показывают, что двигатель подключается на прямое и обратное вращение. Плавность изменения тока в управляющих обмотках реле обусловлена индуктивностью управляющей цепи, а гистерезисные петли обусловлены различными токами срабатывания и отпуска реле.

Для выполнения гармонической линеаризации указанной нелинейной характеристики полагаем, что решение для x ищется в виде

$$x = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t. \quad (3.4)$$

Тогда в соответствии с графиком $F(x)$ получим периодическую функцию $F(A \sin \psi)$ с аргументом $\psi = \Omega t$ (рис. 3.1, б), причем точкам переключения реле $x = b$ и $x = mb$ будут соответствовать значения аргумента $\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}$ и $\psi_2 = \pi - \arcsin \frac{mb}{A}$. Коэффициент возврата реле m может быть любым дробным числом в интервале

$$-1 \leq m \leq 1.$$

При амплитуде $A \leq b$ реле выключены, т. е. передача сигнала в системе отсутствует. Поэтому коэффициенты гармонической линеаризации q и q' будем определять при условии $A \geq b$.

В данном случае интегралы в формулах (3.3) будут иметь одинаковые значения за каждый полупериод и, следовательно, достаточно рассмотреть

$$\int_0^\pi = \int_0^{\psi_1} + \int_{\psi_1}^{\psi_2} + \int_{\psi_2}^\pi.$$

Первый и третий интегралы обращаются в нуль, так как на этих участках $F(A \sin \psi) = 0$. Тогда первый коэффициент гармонической линеаризации будет

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{2c}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} = \frac{2c}{\pi A} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2). \end{aligned}$$

¹⁾ В случае схемы без динамического торможения линеаризацию следует выполнять для реле и двигателя, рассматриваемых совместно (см. § 3.9).

Учитывая значения ψ_1 и ψ_2 , формулу для определения $q(A)$ запишем в виде

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.5)$$

Выполняя вычисление коэффициента $q'(A)$, получим:

$$\begin{aligned} q'(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{2c}{\pi A} \sin \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} = -\frac{2c}{\pi A} (\sin \psi_1 - \sin \psi_2), \end{aligned}$$

или с учетом значений ψ_1 и ψ_2

$$q'(A) = -\frac{2cb}{\pi A^2} (1 - m) \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.6)$$

Релейные характеристики, представленные на рис. 3.2, можно рассматривать как частные случаи релейной характеристики общего вида. Зависимость, изображенная на рис. 3.2, *а*, может характеризовать, например, изменение напряжения на потребителе, подключаемом трехпозиционным поляризованным реле, от тока управления. Характеристика рис. 3.2, *б* соответствует двухпозиционному поляризованному реле. По характеристике рис. 3.2, *в* будет, например, изменяться положение концевых выключателей в зависимости от перемещения привода. Характеристику рис. 3.2, *г* получим, если в схеме рис. 3.1, *в* управляющие реле будут с большим коэффициентом возврата. Идеальную релейную характеристику рис. 3.2, *д* можно получить при управлении потребителем от двух контактов, как, например, при управлении двигателем по схеме, представленной на рис. 3.2, *е*. Здесь входной величиной является перемещение x подвижного контакта K_1 . Индукционный двигатель имеет две управляющие обмотки, подключенные так, что магнитные потоки, создаваемые ими, противоположны. Одна из управляющих обмоток постоянно подключена к сети через добавочное сопротивление R_d . Вторая подключается при замыкании контактов. Сопротивление R_d подбирается таким, чтобы магнитный поток первой обмотки был в два раза меньше потока второй. В результате момент, развиваемый двигателем, будет практически изменяться по идеальной релейной характеристике в зависимости от перемещения x подвижного контакта.

Следует иметь в виду, что реле имеют временные запаздывания, обусловленные временем движения якоря, которые в данных характеристиках не учитываются и подлежат дополнительному учету.

Определим коэффициенты гармонической линеаризации для характеристик рис. 3.2 как частные случаи характеристики общего вида.

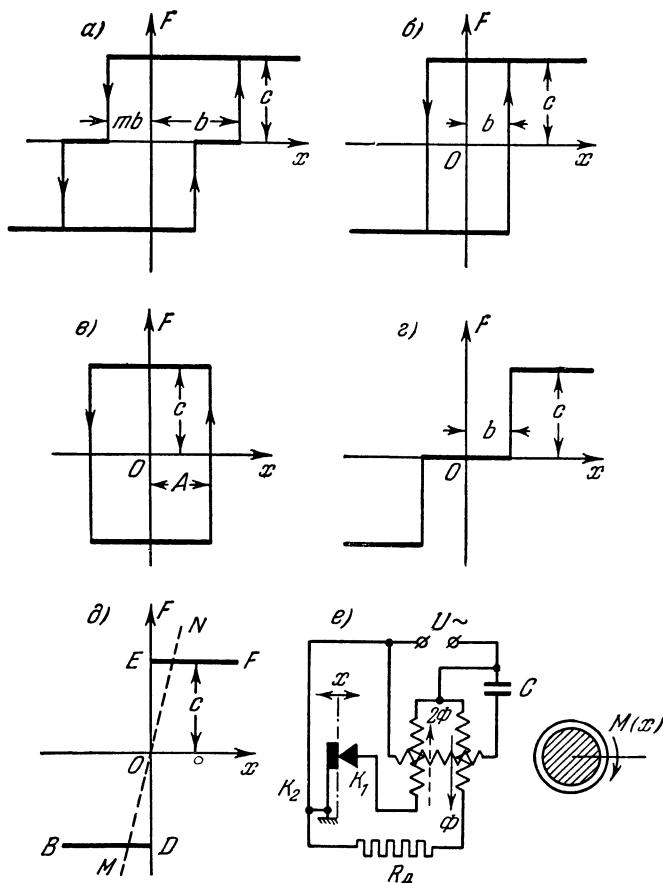


Рис. 3.2.

Релейная характеристика при смещенной гистерезисной петле. Считая в характеристике вида рис. 3.2, a величину m отрицательной ($-1 \leq m \leq 0$), в соответствии с (3.5) и (3.6) получим:

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b, \quad (3.7)$$

$$q'(A) = -\frac{2cb}{\pi A^2} (1 + |m|) \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.8)$$

Релейная характеристика с гистерезисной петлей. Для релейной характеристики рис. 3.2, б имеем $m = -1$. Поэтому в

соответствии с (3.5) и (3.6) получим значения коэффициентов гармонической линейризации в виде

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \quad \text{при } A \geq b, \quad (3.9)$$

$$q'(A) = -\frac{4cb}{\pi A^3} \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.10)$$

Релейная характеристика с гистерезисной петлей переменной ширины. В релейной характеристике на рис. 3.2, в ширина гистерезисной петли равна двум амплитудам и изменяется с изменением амплитуды. Тогда, полагая в (3.9) и (3.10) $b = A$, получим:

$$q(A) = 0, \quad (3.11)$$

$$q'(A) = -\frac{4c}{\pi A}. \quad (3.12)$$

Релейная характеристика с зоной нечувствительности. Для релейной характеристики на рис. 3.2, з имеем $m = 1$. Поэтому из

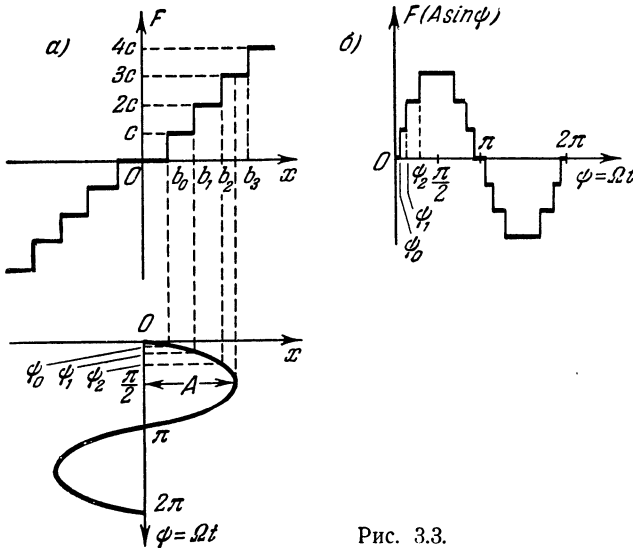


Рис. 3.3.

(3.5) и (3.6) получаем значения коэффициентов гармонической линейризации в виде

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \quad q'(A) = 0 \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.13)$$

Идеальная релейная характеристика. Для идеальной релейной характеристики (рис. 3.2, д) будет $m = 0$, $b = 0$. Тогда в соответ-

ствии с (3.5) и (3.6) получим:

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A}, \quad q'(A) = 0. \quad (3.14)$$

Заметим, что для всех однозначных симметричных характеристик коэффициент $q'(A)$ обращается в нуль.

Релейная ступенчатая характеристика. Релейная ступенчатая характеристика представлена на рис. 3.3, а. Такая характеристика будет, например, отображать зависимость изменения напряжения, снимаемого с ламельного потенциометра, от угла поворота ползунка. Вычислим коэффициенты гармонической линейаризации для случая равных ступенек $b_0 = b_1 - b_0 = b_2 - b_1 = \dots = b_n - b_{n-1}$, когда при колебаниях входной величины перекрывается n ступенек. Коэффициент $q'(A)$ в этом случае равен нулю. Коэффициент $q(A)$ можно определить по формуле (3.3) интегрированием за четверть периода с учетом значений функции $F(A \sin \psi)$ (рис. 3.3, б) и соответствующих значений углов. При значении аргумента $0 < \psi < \psi_0$ функция $F(A \sin \psi)$ равна нулю. Выполняя вычисления, получим:

$$\begin{aligned} q(A) = & \frac{4}{\pi A} \left[\int_{\psi_0}^{\psi_1} c \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} 2c \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} 3c \sin \psi d\psi + \dots \right. \\ & \left. \dots + \int_{\psi_{n-1}}^{\psi_n} nc \sin \psi d\psi + \int_{\psi_n}^{\frac{\pi}{2}} (n+1)c \sin \psi d\psi = -\frac{4c}{\pi A} \left[\cos \psi \right]_{\psi_0}^{\psi_1} + \right. \\ & \left. + 2 \cos \psi \right]_{\psi_1}^{\psi_2} + 3 \cos \psi \Big|_{\psi_2}^{\psi_3} + \dots + n \cos \psi \Big|_{\psi_{n-1}}^{\psi_n} + (n+1) \cos \psi \Big|_{\psi_n}^{\frac{\pi}{2}} \Big] = \\ & = \frac{4c}{\pi A} \sum_{v=0}^n \cos \psi_v. \end{aligned}$$

Учитывая значение $\cos \psi_v = \sqrt{1 - \frac{b_v^2}{A^2}}$, находим:

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sum_{v=0}^n \sqrt{1 - \frac{b_v^2}{A^2}} \quad \text{при} \quad b_n \leq A \leq b_{n+1}. \quad (3.15)$$

В частности, для случая $b_1 \leq A \leq b_2$ (из 3.15) получим:

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right). \quad (3.16)$$

На приведенных примерах легко понять смысл гармонической линейаризации релейных характеристик. Так, например, для идеальной

релейной характеристики (рис. 3.2, д) выражение (3.14) означает замену ломаной характеристики $BDEF$ прямолинейной характеристикой MN с таким наклоном, чтобы прямая MN приблизительно заменяла тот участок ломаной $BDEF$, который охватывается искомой амплитудой A . Отсюда становится понятной обратно пропорциональная зависимость q от A в формуле (3.14), так как чем больше

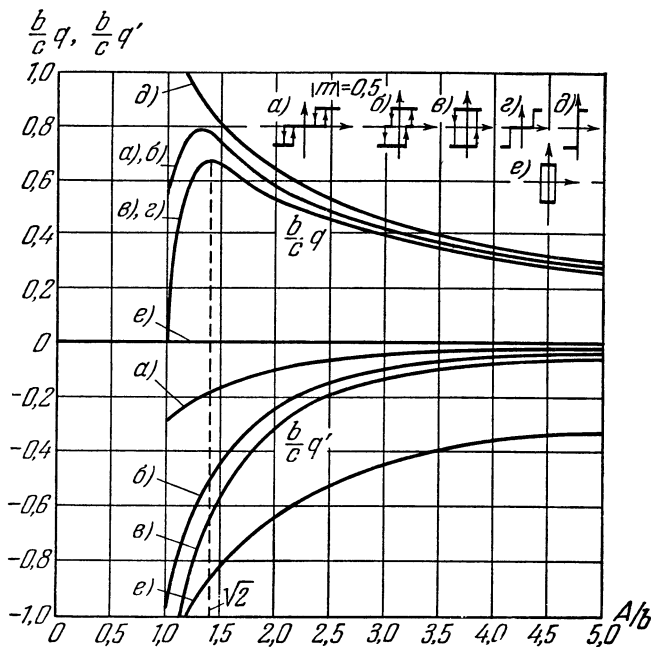


Рис. 3.4.

амплитуда A колебаний входной величины x , тем более пологой должна быть прямая MN , приблизительно заменяющая ломаную $BDEF$.

Аналогично обстоит дело и с релейной характеристикой рис. 32, г, для которой наклон заменяющей ее прямой определяется формулой (3.13).

Следовательно, всякое безгистерезисное релейное звено в колебательном процессе эквивалентно некоторому линейному звену с переменным передаточным числом (коэффициентом усиления) $q(A)$, зависящим от амплитуды колебаний входной величины.

Что касается релейного звена с гистерезисной характеристикой, то, согласно (3.9) и (3.10), оно заменяется линейным звеном с таким же коэффициентом $q(A)$, но, кроме того, еще вводится отрицательная производная в правой части уравнения. Введение отрицательной производной приводит к отставанию в реакции звена на входное

воздействие. Это служит «линейным эквивалентом», заменяющим эффект действия нелинейности в виде гистерезисной петли. При этом коэффициент $q'(A)$ при производной согласно (3.10) тоже уменьшается с увеличением амплитуды A колебаний входной величины x , что объясняется тем, что эффект влияния гистерезисной петли на процесс колебаний в релейном звене должен быть тем меньшим, чем больше амплитуда по сравнению с шириной гистерезисной петли.

Для построения кривых изменения амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы часто бывает удобным пользоваться графиками изменения коэффициентов гармонической линеаризации при изменении амплитуды. Кроме того, для определения устойчивости получаемых периодических решений необходимо бывает знать не только значения $q(A)$ и $q'(A)$, но и знаки их частных производных $\frac{\partial q}{\partial A}$ и $\frac{\partial q'}{\partial A}$, т. е. направление касательной. Поэтому целесообразно построить графики изменения коэффициентов гармонической линеаризации в зависимости от амплитуды.

Для релейных характеристик указанные графики, построенные по соответствующим формулам, представлены на рис 3.4. Графики построены для относительного изменения амплитуды $\frac{A}{b}$ и относительных значений коэффициентов гармонической линеаризации $\frac{b}{c} q$ и $\frac{b}{c} q'$.

§ 3.2. Нелинейные характеристики с зоной нечувствительности, насыщением и переменным коэффициентом усиления

Характеристика с зоной нечувствительности и насыщением. Статическая характеристика звена с зоной нечувствительности и насыщением изображена на рис. 3.5, *a*. По такой зависимости, например, изменяется перепад давления Δp в мембранном исполнительном механизме от угла поворота α заслонки управляющего элемента (рис. 3.5, *в*). Зона нечувствительности пневмоусилителя обусловлена углом перекрытия α_n . Такая же характеристика будет соответствовать электронному усилителю, работающему при входных величинах, доводящих усилитель до насыщения. Зона нечувствительности будет соответствовать начальному пологому участку характеристики усилителя.

Вычислим коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$. Коэффициент $q'(A)$ в этом случае равен нулю, так как характеристика однозначная.

Здесь также колебания возможны только при условии, что амплитуда A будет превосходить значение половины зоны нечувствительности, т. е. b_1 .

При колебаниях входной величины x нелинейного звена по гармоническому закону функция $F(A \sin \psi)$ будет иметь вид рис. 3.5, *б*.

Значение интеграла в первой формуле (3.3) будет одинаковым для каждой четверти периода. Тогда можно записать:

$$q(A) = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

и так как в интервале $0 \leq \psi \leq \psi_1$ $F(A \sin \psi) = 0$, то

$$q(A) = \frac{4}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi.$$

Подставляя значения $F(A \sin \psi)$ и разбивая интегрирование на два участка, получаем:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{4k}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} (A \sin \psi - b_1) \sin \psi d\psi + \frac{4c}{\pi A} \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{4k}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin^2 \psi d\psi - \frac{4kb_1}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin \psi d\psi + \frac{4c}{\pi A} \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{4k}{\pi} \left(\frac{\psi}{2} \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} \right) + \frac{4kb_1}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} - \frac{4c}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{2k}{\pi} \left(\psi_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 - \psi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right) + \frac{4kb_1}{\pi A} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) + \\ &\quad + \frac{4c}{\pi A} \cos \psi_2. \end{aligned}$$

Подставляя в полученное выражение $c = k(b_2 - b_1)$ и учитывая, что

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b_1}{A}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{b_2}{A},$$

окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{A} - \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_2}{A} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{A^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right), \\ q'(A) &= 0 \quad \text{при} \quad A \geq b_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Если же будет $A < b_2$, то нужно пользоваться формулой (3.18), приведенной ниже.

Характеристика с зоной нечувствительности без насыщения.
Характеристику звена с зоной нечувствительности без насыщения (рис. 3.5, а) можно рассматривать как частный случай характеристики

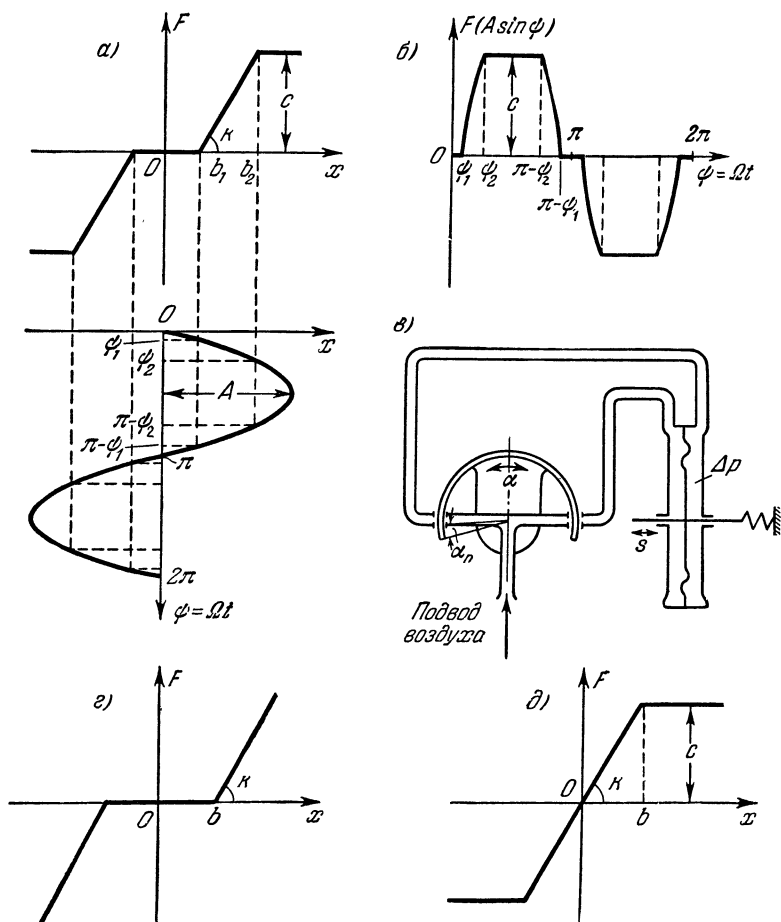


Рис. 3.5.

рис. 3.5, а при условиях $A \leq b_2$, $b_1 = b$. Тогда $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ и в соответствии с (3.17) получаем:

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \\ q'(A) &= 0 \quad \text{при} \quad A \geq b. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Как видно, звено с зоной нечувствительности уподобляется здесь линейному звену с уменьшенным за ее счет коэффициентом усиления. Это уменьшение коэффициента усиления значительно при малых амплитудах и невелико при больших, причем

$$0 \leq q(A) \leq k \quad \text{при} \quad b \leq A \leq \infty.$$

Характеристика с насыщением без зоны нечувствительности. Для случая звена с насыщением без зоны нечувствительности (рис. 3.5, б), полагая в (3.17) $b_1 = 0$, $b_2 = b$, $\psi_1 = 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \\ q'(A) &= 0 \quad \text{при} \quad A \geq b. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

При значениях $A \leq b$ коэффициент $q(A) = k$ (линейная характеристика).

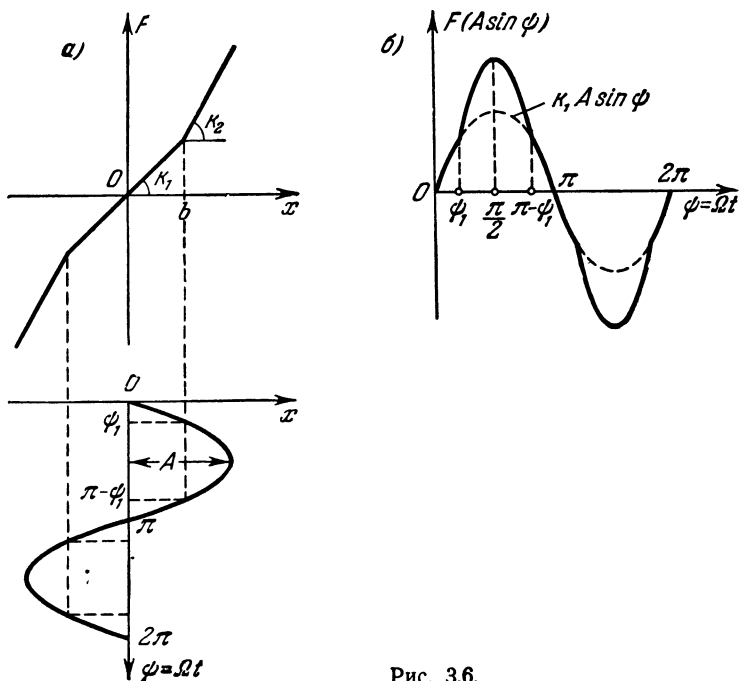


Рис. 3.6.

При амплитудах колебаний входной величины, захватывающих зону насыщения, данное звено заменяется как бы линейным звеном с тем

меньшим коэффициентом усиления $q(A)$, чем больше амплитуда (в противоположность предыдущему случаю).

Характеристика с переменным коэффициентом усиления. Статическая характеристика звена с переменным коэффициентом усиления представлена на рис. 3.6, а. Такая характеристика может быть получена либо аппроксимацией криволинейной статической характеристики, либо в звеньях с линейной характеристикой при наличии устройства переключения передаточного числа в зависимости от значения входной величины.

При значении $x \leq b$ звено остается линейным. Поэтому будем определять значение $q(A)$ при условии $A \geq b$. При изменении входной величины x по гармоническому закону функция $F(A \sin \psi)$ будет периодической функцией аргумента ψ (рис. 3.6, б). Так как в этом случае значение интеграла в (3.3) будет одинаковым за каждую четверть периода, то $q(A)$ вычислим по формуле

$$q(A) = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi.$$

Учитывая соответствующие значения функции $F(A \sin \psi)$ и значения аргумента ψ , получим:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{4}{\pi A} \int_0^{\psi_1} k_1 A \sin^2 \psi d\psi + \frac{4}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} [k_2 (A \sin \psi - b) + k_1 b] \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{4k_1}{\pi} \int_0^{\psi_1} \sin^2 \psi d\psi + \frac{4k_2}{\pi} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi - \frac{4k_2 b}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi + \frac{4k_1 b}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{4k_1}{\pi} \left(\frac{\psi}{2} \Big|_0^{\psi_1} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_0^{\psi_1} \right) + \frac{4k_2}{\pi} \left(\frac{\psi}{2} \Big|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \right) + \frac{4k_2 b}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} - \\ &- \frac{4k_1 b}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4k_1}{\pi} \left(\frac{\psi_1}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\psi_1 \right) + \frac{4k_2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\psi_1 \right) - \\ &- \frac{4k_2 b}{\pi A} \cos \psi_1 + \frac{4k_1 b}{\pi A} \cos \psi_1 = k_2 - \frac{2}{\pi} (k_2 - k_1) \arcsin \frac{b}{A} + \\ &+ \frac{2}{\pi} (k_2 - k_1) \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} - \frac{4}{\pi} (k_2 - k_1) \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= k_2 - \frac{2}{\pi} (k_2 - k_1) \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \\ q'(A) &= 0 \quad \text{при} \quad A \geq b. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

В данном случае ломаная характеристика заменяется после линеаризации одной прямой со средним между k_1 и k_2 наклоном $q(A)$, причем этот наклон изменяется в интервале $k_1 \leq q(A) \leq k_2$ при изменении амплитуды $b \leq A \leq \infty$. Для амплитуд $A \leq b$ имеем линейную характеристику с наклоном k_1 .

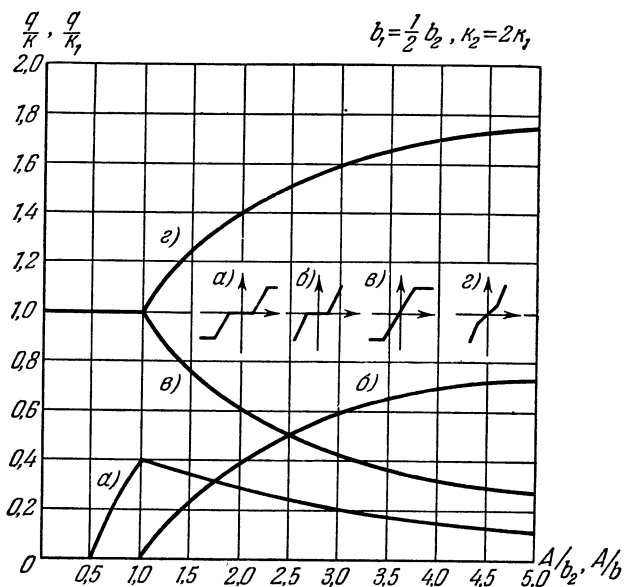


Рис. 3.7.

Для рассмотренных характеристик, как и для релейных, легко построить кривые изменения коэффициентов гармонической линеаризации $q(A)$ в зависимости от значений амплитуды A , что и представлено на рис. 3.7.

§ 3.3. Характеристики с гистерезисными петлями

Характеристика с зоной нечувствительности, насыщением и гистерезисной петлей. Нелинейная статическая характеристика, имеющая зону нечувствительности, насыщение или ограничение и гистерезисные петли, представлена на рис. 3.8, а. По такой зависимости будет, например, изменяться перемещение s от угла поворота за-

слонки α в мембранном исполнительном механизме (рис. 3.5, в). Зона нечувствительности обусловлена углом перекрытия заслонки α , насыщение — ограниченным перепадом давления, а петли гистерезиса — наличием сухого трения штока о корпус мембранной коробки.

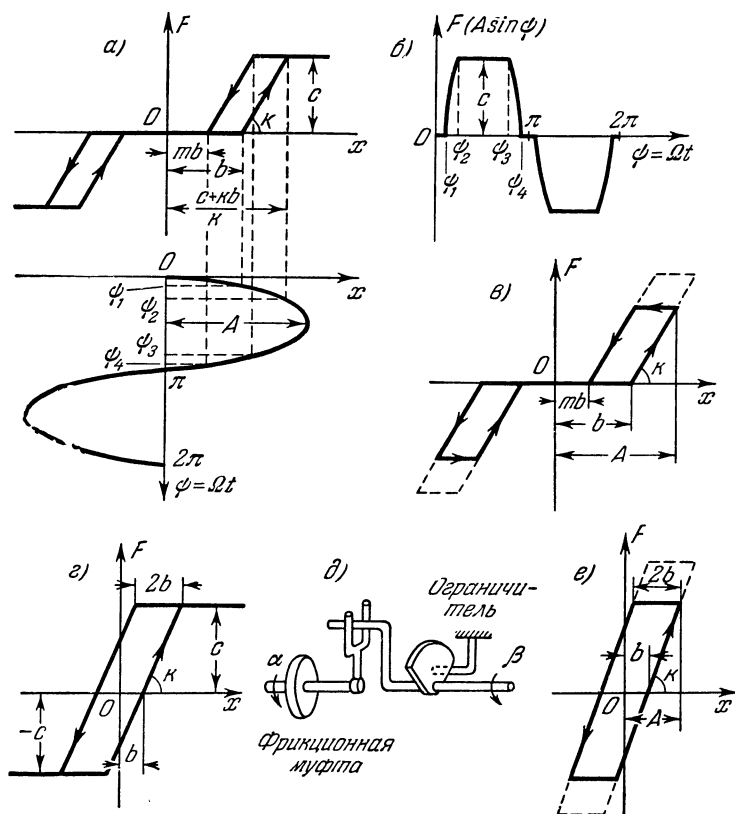


Рис. 3.8.

При изменении входной величины x такого нелинейного звена по гармоническому закону выходная величина будет периодической функцией аргумента $\psi = \Omega t$ (рис. 3.8, б). Вычислим коэффициенты гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$ по формулам (3.3). Здесь, как и в случае релейной характеристики общего вида, m — любое дробное число в интервале $-1 \leq m \leq 1$.

Интегралы в формулах (3.3) будут одинаковыми за каждый полу-период. Значения интегралов от 0 до ψ_1 и от ψ_4 до π обращаются в нуль, так как функция $F(A \sin \psi)$ на этих интервалах равна нулю.

Выполняя вычисление коэффициента $q(A)$, получим:

$$\begin{aligned}
 q(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_0^\pi F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\
 &= \frac{2}{\pi A} \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} k(A \sin \psi - b) \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} c \sin \psi d\psi + \right. \\
 &+ \left. \int_{\psi_3}^{\psi_4} k(A \sin \psi - mb) \sin \psi d\psi \right] = \frac{2k}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin^2 \psi d\psi - \frac{2kb}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin \psi d\psi + \\
 &+ \frac{2c}{\pi A} \int_{\psi_2}^{\psi_3} \sin \psi d\psi + \frac{2k}{\pi} \int_{\psi_3}^{\psi_4} \sin^2 \psi d\psi - \frac{2mkb}{\pi A} \int_{\psi_3}^{\psi_4} \sin \psi d\psi = \\
 &= \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\psi}{2} \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} \right) + \frac{2kb}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} - \frac{2c}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_2}^{\psi_3} + \\
 &+ \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\psi}{2} \Big|_{\psi_3}^{\psi_4} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_{\psi_3}^{\psi_4} \right) + \frac{2mkb}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_3}^{\psi_4} = \\
 &= \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\psi_2}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\psi_2 - \frac{\psi_1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\psi_1 \right) + \frac{2kb}{\pi A} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) - \\
 &- \frac{2c}{\pi A} (\cos \psi_3 - \cos \psi_2) + \frac{2k}{\pi} \left(\frac{\psi_4}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\psi_4 - \frac{\psi_3}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\psi_3 \right) + \\
 &+ \frac{2mkb}{\pi A} (\cos \psi_4 - \cos \psi_3).
 \end{aligned}$$

Учитывая значения соответствующих углов

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{c + kb}{kA},$$

$$\psi_3 = \pi - \arcsin \frac{c + mkb}{kA}, \quad \psi_4 = \pi - \arcsin \frac{mb}{A}$$

и выполняя преобразования, получаем:

$$\begin{aligned}
 q(A) &= \frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{c + kb}{kA} + \arcsin \frac{c + mkb}{kA} - \arcsin \frac{b}{A} - \arcsin \frac{mb}{A} + \right. \\
 &+ \frac{c + kb}{kA} \sqrt{1 - \frac{(c + kb)^2}{k^2 A^2}} + \frac{c + mkb}{kA} \sqrt{1 - \frac{(c + mkb)^2}{k^2 A^2}} - \\
 &- \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} - \frac{mb}{A} \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \Big] \quad \text{при} \quad A \geq \frac{c + kb}{k}. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Выполняя вычисление коэффициента $q'(A)$, получим:

$$\begin{aligned}
 q'(A) = & \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} k(A \sin \psi - b) \cos \psi d\psi + \right. \\
 & + \int_{\psi_2}^{\psi_3} c \cos \psi d\psi + \int_{\psi_3}^{\psi_4} k(A \sin \psi - mb) \cos \psi d\psi \left. \right] = \frac{2k}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin \psi \cos \psi d\psi - \\
 & - \frac{2kb}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos \psi d\psi + \frac{2c}{\pi A} \int_{\psi_2}^{\psi_3} \cos \psi d\psi + \frac{2k}{\pi} \int_{\psi_3}^{\psi_4} \sin \psi \cos \psi d\psi - \\
 & - \frac{2mb}{\pi A} \int_{\psi_3}^{\psi_4} \cos \psi d\psi = \frac{k}{\pi} \sin^2 \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} - \frac{2kb}{\pi A} \sin \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} + \frac{2c}{\pi A} \sin \psi \Big|_{\psi_2}^{\psi_3} + \\
 & + \frac{k}{\pi} \sin^2 \psi \Big|_{\psi_3}^{\psi_4} - \frac{2mb}{\pi A} \sin \psi \Big|_{\psi_3}^{\psi_4} = \frac{k}{\pi} (\sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_1) - \\
 & - \frac{2kb}{\pi A} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) + \frac{2c}{\pi A} (\sin \psi_3 - \sin \psi_2) + \frac{k}{\pi} (\sin^2 \psi_4 - \sin^2 \psi_3) - \\
 & - \frac{2mb}{\pi A} (\sin \psi_4 - \sin \psi_3).
 \end{aligned}$$

Подставляя значения углов ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 и ψ_4 и выполняя преобразования, получаем:

$$q'(A) = -\frac{2bc(1-m)}{\pi A^2} \quad \text{при} \quad A \geq \frac{c+kb}{k}. \quad (3.22)$$

Если же $A \leq \frac{c+kb}{k}$, то вместо (3.21) и (3.22) нужно пользоваться формулами, приведенными ниже.

Характеристика с зоной нечувствительности и гистерезисными петлями без насыщения. Характеристика с зоной нечувствительности и гистерезисными петлями без насыщения представлена на рис. 3.8, *в*. По такой зависимости будет изменяться перемещение иглы того же мембранного исполнительного механизма (рис. 3.5, *б*) в зависимости от угла положения заслонки управляющего элемента в случае, когда при колебательном движении мембраны перепад давления в мембранной коробке не достигает полного давления, т. е. в характеристике отсутствует участок насыщения.

Для определения коэффициентов $q(A)$ и $q'(A)$ в этом случае в формулах (3.21) и (3.22) следует положить

$$\frac{c+kb}{k} = A, \quad (3.23)$$

так как c — здесь величина переменная, зависящая от A .

Тогда из формул (3.21) и (3.22) получим:

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left[1 - \frac{b(1-m)}{A} \right] - \arcsin \frac{b}{A} - \arcsin \frac{mb}{A} + \right. \\ \left. + \left[1 - \frac{b(1-m)}{A} \right] \sqrt{1 - \left[1 - \frac{b(1-m)}{A} \right]^2} - \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} - \right. \\ \left. - \frac{mb}{A} \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right\} \quad \text{при } A \geq b, \quad (3.24)$$

$$q'(A) = -\frac{2kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) (1-m) \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.25)$$

Характеристика с насыщением и гистерезисной петлей. Характеристика с насыщением и гистерезисной петлей представлена на рис. 3.8, з. По такой зависимости будет, например, изменяться угол поворота выходного вала в зависимости от угла поворота входного вала в кинематической передаче при наличии люфта и ограничения (рис. 3.8, д). Приведенную характеристику можно рассматривать как частный случай характеристики (рис. 3.8, а) при $m = -1$. Тогда из формул (3.21) и (3.22) получим:

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{c+kb}{kA} + \arcsin \frac{c-kb}{kA} + \frac{c+kb}{kA} \sqrt{1 - \frac{(c+kb)^2}{k^2 A^2}} + \right. \\ \left. + \frac{c-kb}{kA} \sqrt{1 - \frac{(c-kb)^2}{k^2 A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq \frac{c+kb}{k}, \quad (3.26)$$

$$q'(A) = -\frac{4bc}{\pi A^2} \quad \text{при } A \geq \frac{c+kb}{k}. \quad (3.27)$$

Характеристика типа люфта или зазора. Нелинейная характеристика типа люфта или зазора представлена на рис. 3.8, е. По такому закону будет изменяться угол поворота выходного вала в зависимости от угла поворота входного вала в кинематической передаче при наличии люфта без ограничения. Данную нелинейную характеристику можно рассматривать как частный случай характеристики с зоной нечувствительности и гистерезисными петлями (рис. 3.8, в) при условии $m = -1$. Тогда в соответствии с формулами (3.24) и (3.25) получим:

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right] \quad \text{при } A \geq b, \quad (3.28)$$

$$q'(A) = -\frac{4kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.29)$$

Кривые изменения коэффициентов $q(A)$ и $q'(A)$ в зависимости от амплитуды для рассмотренных характеристик представлены на рис. 3.9.

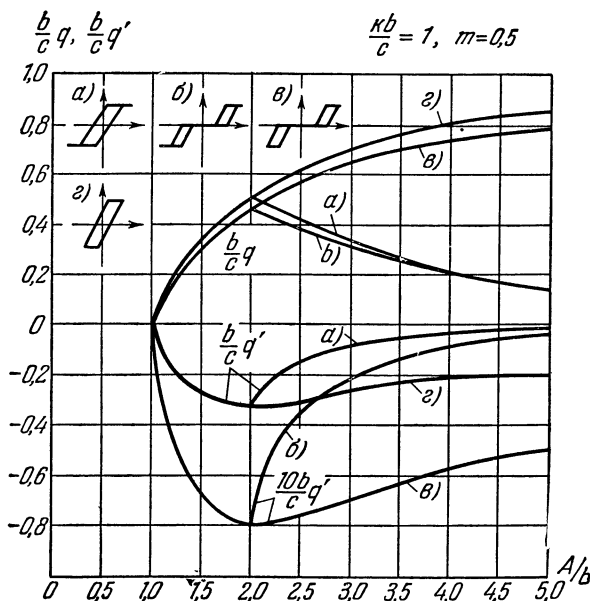


Рис. 3.9.

§ 3.4. Степенные нелинейные характеристики

При составлении уравнений звеньев автоматических систем могут встречаться степенные нелинейные характеристики вида

$$F(x) = kx^n \quad \text{при } n \text{ целом нечетном,}$$

$$F(x) = kx^n \operatorname{sign} x \quad \text{при } n \text{ целом четном.}$$

Например, при больших скоростях движения силы вязкого трения пропорциональны квадрату и кубу скорости. Кроме того, степенные характеристики удобно применять для аппроксимации нелинейных статических характеристик, получаемых экспериментально.

Рассмотрим степенную характеристику общего вида, представленную графиком (рис. 3.10). Здесь в силу однозначности характеристики коэффициент $q'(A)$ обращается в нуль.

Коэффициент $q(A)$ в соответствии с (3.3) может быть вычислен интегрированием за четверть периода:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi = \frac{4k}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A^n \sin^n \psi \sin \psi \, d\psi = \\ &= \frac{4kA^{n-1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \psi \, d\psi = \\ &= \frac{4nkA^{n-1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \psi \, d\psi - \frac{4kA^{n-1}}{(n+1)\pi} \sin^n \psi \cos \psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

где n — целое и положительное число.

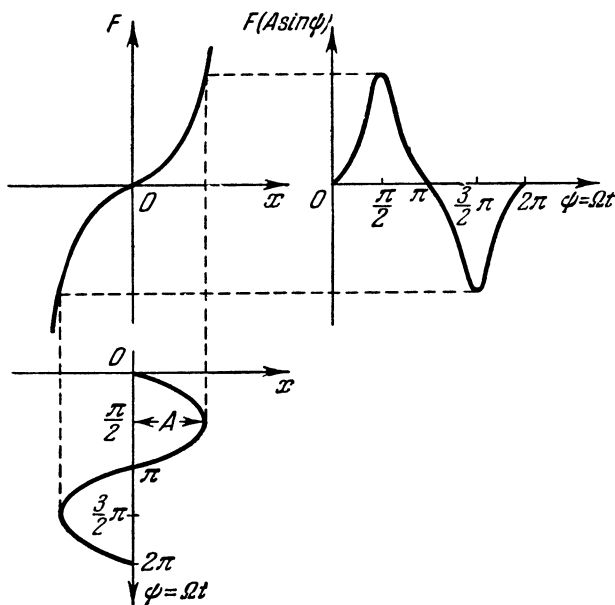


Рис. 3.10.

Так как последнее слагаемое при заданных пределах обращается в нуль, то для вычисления $q(A)$ будем иметь формулу

$$q(A) = \frac{4nkA^{n-1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \psi \, d\psi,$$

где n — целое и положительное число.

Сравнив это с предыдущим выражением, получаем рекуррентную формулу

$$q_n = \frac{nA^2}{n+1} q_{n-2}, \quad (3.30)$$

где n — показатель степени нелинейной функции $F(x)$.

Поэтому, чтобы определить коэффициент гармонической линеаризации для нечетно-симметричной характеристики любой степени,

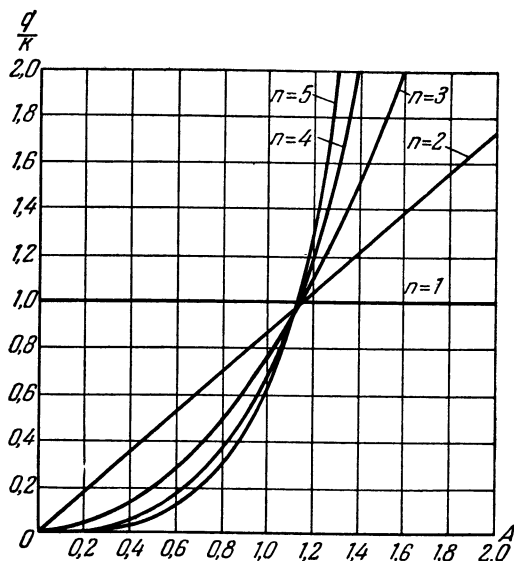


Рис. 3.11.

достаточно знать каких-нибудь два значения q (одно для четной степени и одно для нечетной). Возьмем за исходные значения $n=0$ и $n=1$. При $n=0$ имеем $F(x)=k \operatorname{sign} x$ (идеальная релейная характеристика), для которой согласно (3.14)

$$q(A) = \frac{4k}{\pi A},$$

а при $n=1$ имеем $F(x)=kx$ (линейная характеристика), для которой

$$q = k.$$

Исходя из этого, по формуле (3.30) получаем общее выражение коэффициента гармонической линеаризации для любой степенной характеристики в виде

$$q(A) = \frac{3 \cdot 5 \dots n}{4 \cdot 6 \dots (n+1)} k A^{n-1} \quad \text{при } n \text{ нечетном,}$$

$$q(A) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots n}{3 \cdot 5 \dots (n+1)} k A^{n-1} \quad \text{при } n \text{ четном.}$$

В частности, для характеристики $F(x) = kx^2 \operatorname{sign} x$ получаем:

$$q(A) = \frac{8kA}{3\pi} = 0,85kA. \quad (3.31)$$

Для характеристики $F(x) = kx^3$ имеем:

$$q(A) = \frac{3kA^3}{4} = 0,75kA^3; \quad (3.32)$$

для характеристики $F(x) = kx^4 \operatorname{sign} x$

$$q(A) = \frac{32kA^3}{15\pi} = 0,68kA^3; \quad (3.33)$$

для характеристики $F(x) = kx^5$

$$q(A) = \frac{5kA^4}{8} = 0,625kA^4. \quad (3.34)$$

Кривые зависимости $\frac{q}{k}$ от A для степенных нелинейных характеристик представлены на рис. 3.11.

Степенные нелинейности второго класса. При аппроксимации некоторых экспериментально полученных нелинейных характеристик, как, например, механических характеристик двухфазных асинхронных двигателей с полым ротором (рис. 3.12), применяются степенные полиномы, под знак нелинейности которых входит как входная, так и выходная величины (нелинейности второго класса). Выполним гармоническую линеаризацию для некоторых нелинейностей второго класса.

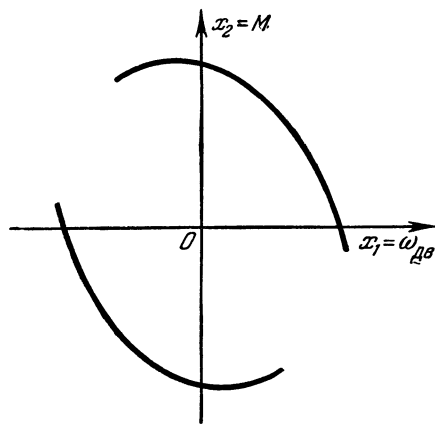


Рис. 3.12.

Нелинейная функция
 $F(x_1, x_2) = kx_2^2 \operatorname{sign} x_1$. В том случае, когда под знаком нелинейности стоят входная величина x_1 и выходная величина x_2 нелинейного звена, полагают,

что решение для выходной величины нелинейного звена отыскивается в гармоническом виде

$$x_2 = A_2 \sin \Omega t$$

и для входной величины также в гармоническом виде, но с другой амплитудой и сдвигом по фазе относительно выходной величины:

$$x_1 = A_1 \sin (\Omega t - \varphi).$$

Соотношения между амплитудами A_1 и A_2 и сдвиг по фазе φ определяются через частотные характеристики линейной части, разделяющей переменные x_1 и x_2 .

При учете приведенных соотношений нелинейная функция $F(x_1, x_2)$ будет периодической функцией аргумента $\psi = \Omega t$ (рис. 3.13) и запишется в виде

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = \\ = k (A_2 \sin \psi)^2 \operatorname{sign} \sin (\psi - \varphi). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Как видно из графика (рис. 3.13), условие отсутствия постоянной составляющей разложения функции $F(x_1, x_2)$ в ряд Фурье выполняется.

Следует иметь в виду, что коэффициенты гармонической линеаризации теперь будут зависеть не только от амплитуды A_2 , но и от частоты колебаний Ω за счет различных сдвигов по фазе φ при различных частотах.

Определим коэффициенты гармонической линеаризации $q(A_2, \Omega)$ и $q'(A_2, \Omega)$ для функции (3.35). Интегралы в формулах (3.2) будут одинаковыми за каждый полупериод. Тогда, вычисляя значение $q(A_2, \Omega)$, получим:

$$\begin{aligned} q(A_2, \Omega) &= \frac{1}{\pi A_2} \int_0^{2\pi} F(x_1, x_2) \sin \psi \, d\psi = \\ &= \frac{2kA_2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \psi \operatorname{sign} \sin (\psi - \varphi) \sin \psi \, d\psi = \\ &= \frac{2kA_2}{\pi} \left(- \int_0^{\varphi} \sin^3 \psi \, d\psi + \int_{\varphi}^{\pi} \sin^3 \psi \, d\psi \right) = \frac{2kA_2}{\pi} \left(\cos \psi \Big|_0^{\varphi} - \frac{1}{3} \cos^3 \psi \Big|_0^{\varphi} \right) - \\ &\quad - \cos \psi \Big|_{\varphi}^{\pi} + \frac{1}{3} \cos^3 \psi \Big|_{\varphi}^{\pi} = \frac{2kA_2}{\pi} \left(2 \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$q(A_2, \Omega) = \frac{4kA_2}{\pi} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right), \quad \varphi = \varphi(\Omega). \quad (3.36)$$

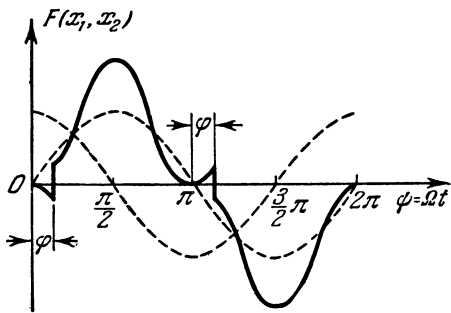


Рис. 3.13.

Вычисляя значение $q'(A_2, \Omega)$, получим:

$$\begin{aligned} q'(A_2, \Omega) &= \frac{1}{\pi A_2} \int_0^{2\pi} F(x_1, x_2) \cos \psi \, d\psi = \\ &= \frac{2kA_2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \psi \operatorname{sign} \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \, d\psi = \\ &= \frac{2kA_2}{\pi} \left(- \int_0^{\varphi} \sin^2 \psi \cos \psi \, d\psi + \int_{\varphi}^{\pi} \sin^2 \psi \cos \psi \, d\psi \right) = \\ &= \frac{2kA_2}{3\pi} \left(- \sin^3 \psi \Big|_0^{\varphi} + \sin^3 \psi \Big|_{\varphi}^{\pi} \right) = \frac{2kA_2}{3\pi} (-\sin^3 \varphi - \sin^3 \varphi) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$q'(A_2, \Omega) = -\frac{4kA_2}{3\pi} \sin^3 \varphi, \quad \varphi = \varphi(\Omega). \quad (3.37)$$

Заметим, что из формул (3.36) и (3.37) при $\varphi = 0$ получим значения коэффициентов

$$q(A_2) = \frac{8kA_2}{3\pi}, \quad q'(A_2) = 0,$$

соответствующие степенной функции

$$F(x_2) = kx_2^2 \operatorname{sign} x_2.$$

Нелинейная функция $F(x_1, x_2) = kx_2^3 \operatorname{sign} x_2 \operatorname{sign} x_1$. Полагая, как и в предыдущем случае:

$$x_2 = A_2 \sin \Omega t,$$

$$x_1 = A_1 \sin(\Omega t - \varphi), \quad \Omega t = \psi,$$

нелинейную функцию $F(x_1, x_2)$ запишем в виде

$$F(x_1, x_2) = k(A_2 \sin \psi)^3 \operatorname{sign} \sin \psi \operatorname{sign} \sin(\psi - \varphi). \quad (3.38)$$

График функции (3.38) имеет вид, подобный графику функции (3.35) (рис. 3.13). Следовательно, и в данном случае постоянная составляющая функции $F(x_1, x_2)$ будет равна нулю.

Вычисляя $q(A_2, \Omega)$, получим:

$$\begin{aligned}
 q(A_2, \Omega) &= \frac{1}{\pi A_2} \int_0^{2\pi} F(x_1, x_2) \sin \psi \, d\psi = \\
 &= \frac{2kA_2^3}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \psi \operatorname{sign} \sin \psi \operatorname{sign} \sin(\psi - \varphi) \sin \psi \, d\psi = \\
 &= \frac{2kA_2^3}{\pi} \left(- \int_0^{\varphi} \sin^4 \psi \, d\psi + \int_{\varphi}^{\pi} \sin^4 \psi \, d\psi \right) = \\
 &= \frac{2kA_2^3}{\pi} \left(- \frac{3}{8} \psi \Big|_0^{\varphi} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_0^{\varphi} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{32} \sin 4\psi \Big|_0^{\varphi} + \frac{3}{8} \psi \Big|_{\varphi}^{\pi} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_{\varphi}^{\pi} + \frac{1}{32} \sin 4\psi \Big|_{\varphi}^{\pi} \right) = \\
 &= \frac{2kA_2^3}{\pi} \left(\frac{3}{8} \pi - \frac{3}{4} \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \frac{1}{16} \sin 4\varphi \right)
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$q(A_2, \Omega) = \frac{kA_2^3}{\pi} \left(\frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right), \quad \varphi = \varphi(\Omega). \quad (3.39)$$

Вычисляя значение $q'(A_2, \Omega)$, получим:

$$\begin{aligned}
 q'(A_2, \Omega) &= \frac{1}{\pi A_2} \int_0^{2\pi} F(x_1, x_2) \cos \psi \, d\psi = \\
 &= \frac{2kA_2^3}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \psi \operatorname{sign} \sin \psi \operatorname{sign} \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \, d\psi = \\
 &= \frac{2kA_2^3}{\pi} \left(- \int_0^{\varphi} \sin^3 \psi \cos \psi \, d\psi + \int_{\varphi}^{\pi} \sin^3 \psi \cos \psi \, d\psi \right) = \\
 &= \frac{kA_2^3}{2\pi} \left(- \sin^4 \psi \Big|_0^{\varphi} + \sin^4 \psi \Big|_{\varphi}^{\pi} \right) = \frac{kA_2^3}{2\pi} (-\sin^4 \varphi - \sin^4 \varphi)
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$q'(A_2, \Omega) = -\frac{kA_2^3}{\pi} \sin^4 \varphi, \quad \varphi = \varphi(\Omega). \quad (3.40)$$

В частном случае при значении $\varphi = 0$ из (3.39) и (3.40) получим значения коэффициентов

$$q(A_2) = \frac{3kA_2^3}{4}, \quad q'(A_2) = 0,$$

соответствующие функции

$$F(x_2) = kx_2^3.$$

§ 3.5. Гистерезисные петли электрических цепей с железом

При исследовании автоматических систем, имеющих электрические цепи с железом, необходимо учитывать нелинейности в виде гистерезисной петли (рис. 3.14, а). По такому нелинейному закону будет изменяться магнитная индукция магнитопровода в зависимости от тока, протекающего по его обмотке. Для электромашинных усили-

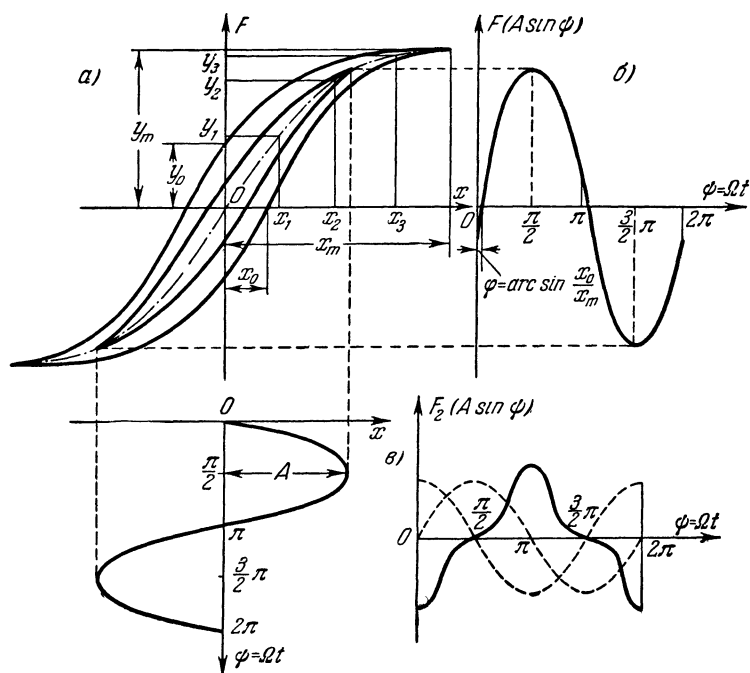


Рис. 3.14.

телей такая характеристика будет соответствовать изменению э. д. с. в зависимости от тока управления.

В общем случае будем считать, что характеристика типа гистерезисной петли $F(x)$ отражает зависимость выходной величины нелинейного звена от входной в установившемся режиме.

Форма гистерезисной характеристики определяется материалом магнитопровода и может изменяться за счет специальных средств, как, например, применением дополнительной обмотки, питаемой переменным током повышенной частоты по сравнению с частотой колебаний регулируемой или управляемой величины автоматической системы.

Гистерезисные характеристики не могут быть отображены точной аналитической зависимостью, но могут быть получены экспериментально для соответствующих звеньев системы. Для гармонической линеаризации экспериментально снятой гистерезисной характеристики можно вначале подобрать аппроксимирующую функцию, а затем выполнить линеаризацию по обычным правилам.

Следует иметь в виду, что гистерезисная петля электрической цепи с железом при колебании входной величины с переменной амплитудой будет претерпевать сложные деформации. Для приближенных расчетов будем полагать, что при изменении амплитуды колебаний входной величины гистерезисная характеристика остается подобной самой себе, как показано на рис. 3.14, а.

При изменении входной величины x по гармоническому закону выходная величина будет представлять собой искаженную синусоиду (рис. 3.14, б). Это искажение будет тем большим, чем больше амплитуда колебаний величины x . Кроме того, наличие петли гистерезиса вызывает отставание по фазе выходной величины относительно входной. Фазовый сдвиг будет тем большим, чем шире петля гистерезиса. При гармонической линеаризации фазовый сдвиг учитывается коэффициентом $q'(A)$.

Будем аппроксимировать гистерезисную петлю путем подбора функции $F_1(x)$ для основной кривой (средняя штрих-пунктирная линия) с ординатами, равными полусумме ординат прямой и обратной ветвей петли, и подбора дополнительной функции $F_2(x)$, учитывающей ординаты ветвей, отсчитываемые от основной кривой. Следовательно, гистерезисная петля представляется в виде

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

Аналитически представим функцию $F_1(x)$ в виде степенного полинома. В силу приближенности самого метода гармонической линеаризации можно ограничиться тремя членами полинома и представить функцию $F_1(x)$ в виде

$$F_1(x) = Bx + Cx^3 + Dx^5, \quad (3.41)$$

где B , C , D — коэффициенты, определяемые по трем выбранным точкам на основной кривой.

Выбрав три точки на положительном участке основной кривой и обозначив абсциссы выбранных точек через x_1 , x_2 , x_3 , а ординаты через y_1 , y_2 , y_3 (рис. 3.14, а), составим для определения коэффициентов B , C и D три уравнения:

$$\begin{aligned} y_1 &= Bx_1 + Cx_1^3 + Dx_1^5, \\ y_2 &= Bx_2 + Cx_2^3 + Dx_2^5, \\ y_3 &= Bx_3 + Cx_3^3 + Dx_3^5. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно искомых B, C и D , получим:

$$B = \frac{y_1 x_2^3 x_3^3 (x_3^2 - x_2^2) + y_2 x_1^3 x_3^3 (x_3^2 - x_1^2) + y_3 x_1^3 x_2^3 (x_2^2 - x_1^2)}{\Delta},$$

$$C = \frac{y_1 x_2 x_3 (x_2^4 - x_3^4) + y_2 x_1 x_3 (x_3^4 - x_1^4) + y_3 x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4)}{\Delta},$$

$$D = \frac{y_1 x_2 x_3 (x_3^2 - x_2^2) + y_2 x_1 x_3 (x_1^2 - x_2^2) + y_3 x_1 x_2 (x_2^2 - x_1^2)}{\Delta},$$

где

$$\Delta = x_1 x_2 x_3 [x_1^2 x_2^2 (x_2^2 - x_1^2) + x_1^2 x_3^2 (x_1^2 - x_3^2) + x_2^2 x_3^2 (x_3^2 - x_2^2)].$$

Таким образом определяется основная функция $F_1(x)$. Дополнительную функцию $F_2(x)$ представим в виде

$$F_2(x) = -\gamma A \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sign} px, \quad (3.42)$$

где значение $n = 2, 3, 4, \dots$ выбирается на основании экспериментально полученной гистерезисной характеристики в зависимости от ее формы. Величина

$$\gamma = \frac{y_0}{x_m} \quad (3.43)$$

определяется из той же экспериментальной характеристики.

Заметим, что при определении решения для x в виде

$$x = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t, \quad (3.44)$$

будет

$$1 - \frac{x^2}{A^2} = \cos^2 \psi$$

и, следовательно, дополнительная функция, согласно (3.42), запишется через аргумент ψ в виде

$$F_2(A \sin \psi) = -\gamma A \cos^n \psi \operatorname{sign} \cos \psi \quad \text{при } n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.45)$$

Полная аппроксимирующая функция в соответствии с (3.41)—(3.43) будет

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = Bx + Cx^3 + Dx^5 - \gamma A \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sign} px. \quad (3.46)$$

Значения коэффициентов гармонической линеаризации нелинейных членов x^3 и x^5 функции $F_1(x)$ были определены в предыдущем параграфе. Вычислим теперь коэффициенты гармонической линеаризации для функции $F_2(x)$.

Функция $F_2(A \sin \psi)$ будет четной (рис. 3.14, в) при любых целых n , и, следовательно, коэффициент

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_2(A \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (3.47)$$

для нее обращается в нуль.

Вычислим значения коэффициента $q'(A)$ для $F_2(x)$ при различных значениях n . Из рис. 3.14, в видно, что интеграл в формуле (3.3) для вычисления $q'(A)$ будет одинаковым за каждую четверть периода. Тогда для определения $q'(A)$ получим формулу

$$q'(A) = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = -\frac{4\gamma}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \psi d\psi. \quad (3.48)$$

Как видно, здесь коэффициент q' не будет зависеть от амплитуды колебаний A .

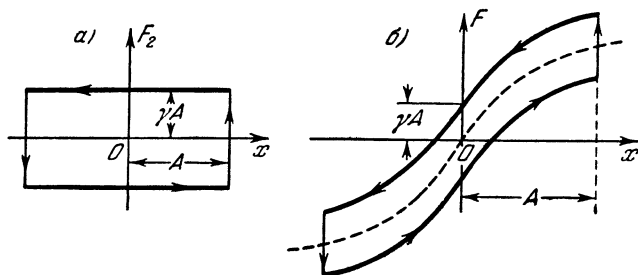


Рис. 3.15.

Формулу (3.48) можно преобразовать к виду

$$q' = -\frac{4\gamma}{\pi} \left| \frac{\cos^n \psi \sin \psi}{n} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4\gamma}{\pi} \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \psi d\psi.$$

Поскольку первое слагаемое обращается в нуль, то, сравнивая второе слагаемое с (3.48), получаем рекуррентную формулу

$$q'_n = \frac{n}{n+1} q'_{n-2}.$$

Возьмем за исходные значения $n=0$ и $n=1$. При $n=0$ из (3.42) получаем:

$$F_2(x) = -\gamma A \operatorname{sign} px,$$

что соответствует релейной гистерезисной петле с переменными шириной и высотой (рис. 3.15, а). Полная характеристика $F = F_1 + F_2$ в этом случае вместо рис. 3.14, а принимает вид рис. 3.15, б.

Значение q' для рассмотренного случая $n=0$ можно получить либо по формуле (3.48), либо из готового выражения (3.12) при $c=\gamma A$, что дает

$$q' = -\frac{4\gamma}{\pi}.$$

При $n=1$ из формулы (3.48) находим:

$$q' = -\gamma.$$

Поэтому, используя рекуррентную формулу, получим общее выражение коэффициента гармонической линеаризации гистерезисной петли q' для любой степени n в виде

$$q' = -\frac{3 \cdot 5 \dots n}{4 \cdot 6 \dots (n+1)} \gamma \quad \text{при } n \text{ нечетном,}$$

$$q' = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots n}{3 \cdot 5 \dots (n+1)} \gamma \quad \text{при } n \text{ четном.}$$

Отсюда коэффициент q' в зависимости от степени n аппроксимирующей функции $F_2(x)$ будет иметь значения, приведенные в таблице 3.1.

Т а б л и ц а 3.1

n	2	3	4	5	6	7	8	9
q'	$-0,85 \gamma$	$-0,75 \gamma$	$-0,68 \gamma$	$-0,625 \gamma$	$-0,582 \gamma$	$-0,547 \gamma$	$-0,518 \gamma$	$-0,492 \gamma$

Беря значения $q(A)$ из (3.32) и (3.34) для второго и третьего нелинейных членов функции $F_1(x)$ и учитывая, что для всех n коэффициент $q(A)$ для функции $F_2(x)$ равен нулю, получим формулу для вычисления коэффициента гармонической линеаризации $q(A)$ общей функции $F(x)$ в виде

$$q(A) = B + 0,75 CA^2 + 0,625 DA^4. \quad (3.49)$$

Коэффициент C в этой формуле обычно будет отрицательным. Коэффициент D может иметь любой знак в зависимости от формы гистерезисной характеристики.

Независимость коэффициента q' , характеризующего отставание по фазе колебаний выходной величины от входной, для данной нелинейности объясняется принятым условием, что гистерезисная характеристика, сжимаясь при уменьшении амплитуды колебаний входной величины, остается подобной самой себе. Для различных характеристик значение коэффициента q' будет различным в зависимости от формы петли.

Возможно и более сложное аналитическое представление гистерезисной характеристики с учетом ее деформаций при изменении амплитуды колебаний входной величины.

§ 3.6. Нелинейности типа сухого и квадратичного трения

Нелинейная характеристика типа сухого трения (рис. 3.16, а) представляет зависимость силы или момента сухого трения от скорости. Здесь имеется в виду, что противоположное направление силы или момента трения относительно скорости движения обычно учитывается при составлении уравнений. По виду такая характеристика похожа на идеальную релейную характеристику. В отличие

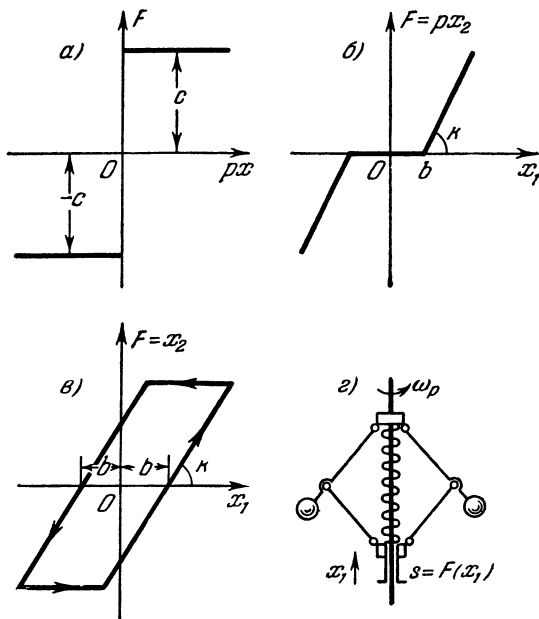


Рис. 3.16.

от релейной характеристики следует иметь в виду, что $F(px)$ может принимать не только значения c и $-c$, но и значения $-c \leq F(px) \leq c$, когда в течение некоторого времени скорость $px = 0$. При мгновенном же прохождении значения скорости через нуль сила или момент сухого трения скачком меняют знак на противоположный.

Следовательно, в том случае, когда значение входной величины $px = 0$ при колебательном движении пробегается мгновенно (без остановок), то гармоническая линеаризация характеристики сухого трения выполняется как идеальной релейной.

В том случае, когда значение скорости $px = 0$ пробегается не мгновенно, а имеются остановки в движении звена с сухим трением, замена характеристики типа сухого трения релейной характеристикой

может быть слишком грубой для исследования колебаний. Остановки в движении системы с сухим трением возможны тогда, когда при подходе к скорости $px = 0$ окажется, что сумма всех сил или моментов, приложенных к звену с трением, будет меньше силы или момента сухого трения.

Определим коэффициенты гармонической линеаризации для характеристики сухого трения, принятой в виде идеальной релейной, т. е. при отсутствии заметных остановок внутри периода колебаний.

Полагая

$$px = A_p \sin \Omega t,$$

где A_p — амплитуда колебаний скорости, в соответствии с идеальной релейной характеристикой получаем:

$$q(A_p) = \frac{4c}{\pi A_p}, \quad (3.50)$$

где c — постоянное значение силы или момента сухого трения. Формула гармонической линеаризации сухого трения будет

$$F(px) = q(A_p) px. \quad (3.51)$$

Если при исследовании нелинейной системы желательно получить решение для самой переменной x , то, полагая

$$x = A \sin \Omega t, \quad px = A\Omega \cos \Omega t,$$

получаем:

$$A_p = A\Omega.$$

Тогда, обозначив

$$q'(A) = \frac{4c}{\pi A}, \quad (3.52)$$

получим в соответствии с (3.50) и (3.51) формулу гармонической линеаризации характеристики сухого трения для этого случая в виде

$$F(x) = \frac{q'(A)}{\Omega} px. \quad (3.53)$$

В случае наличия остановок в движении системы с сухим трением исследование значительно усложняется (см. § 1.1). Однако в двух частных случаях учет остановок достаточно прост.

В первом случае учитывается сухое и вязкое линейное трение, а масса подвижных элементов звена с трением считается равной нулю (малы инерционные силы). Кроме того, считается, что в звене нет восстанавливающей силы. Тогда сухое трение можно учесть посредством ранее приведенной нелинейной характеристики с зоной нечувствительности (рис. 3.16, б), представляющей зависимость скорости движения px_2 звена с сухим трением от воздействующих сил или моментов x_1 . При изменении входной величины в пределах

— $b \leq x_1 \leq b$ выходная величина — скорость равна нулю. При $|x| > |b|$ в звене устанавливается скорость, пропорциональная разности $|x| - |b|$.

В соответствии с (3.18) коэффициенты гармонической линеаризации в этом случае будут иметь значения:

$$q(A) = k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \quad q'(A) = 0 \text{ при } A \geq b. \quad (3.54)$$

После выполнения гармонической линеаризации уравнения звена с сухим трением и линейным трением

$$\left. \begin{aligned} k_2 p x_2 + c \operatorname{sign} p x_2 &= k_1 x_1 & \text{при } p x_2 \neq 0, \\ -c < k_1 x_1 < c & & \text{при } p x_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

следует заменить единым нелинейным уравнением

$$p x_2 = F(x_1).$$

Затем вместо нелинейной функции $F(x_1)$ следует подставить линейное выражение

$$F(x_1) = q(A) x_1,$$

причем в формуле (3.54) для $q(A)$, k и b определяются через коэффициенты уравнения (3.55) по соотношениям:

$$k = \frac{k_1}{k_2}, \quad b = \frac{c}{k_1}.$$

Во втором случае учитываются только сухое трение и линейная восстанавливающая сила, а масса подвижных элементов звена с трением (инерционные силы) считается равной нулю. Для такого звена за нелинейную характеристику можно принять характеристику типа люфта или зазора (рис. 3.16, в). В этом случае за выходную величину звена с сухим трением принимается перемещение x_2 , а за входную x_1 — силы или моменты, приложенные к подвижной части звена. Ширина петли $2b$ определяется величиной силы или момента сухого трения. Например, если пренебречь инерционными силами подвижных частей центробежного регулятора (рис. 3.16, г) и учитывать сухое трение, то по характеристике рис. 3.16, в будет изменяться перемещение z муфты центробежного устройства в зависимости от приложенных к муфте сил x_1 . Перемещение муфты начинается тогда, когда скорость вращения центробежного устройства достигает величины, при которой сила, действующая на муфту, преодолет трение покоя. При изменении направления вращения центробежного устройства перемещение муфты остается постоянным, пока сила, действующая на муфту, не изменится на величину, равную $2b$.

Полагая, что решение для входной величины x_1 звена с трением ищется в гармоническом виде в соответствии со значением коэффи-

циентов гармонической линеаризации для характеристики типа люфта, получим значения коэффициентов $q(A)$ и $q'(A)$:

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right] \text{ при } A \geq b, \quad (3.56)$$

$$q'(A) = -\frac{4kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) \text{ при } A \geq b. \quad (3.57)$$

При этом гармоническая линеаризация нелинейной характеристики (рис. 3.16, в) выполняется по формуле

$$F(x_1) = \left[q(A) + \frac{q'(A)}{\Omega} p \right] x_1. \quad (3.58)$$

После выполнения гармонической линеаризации уравнения звена с сухим трением и линейной восстанавливающей силой

$$\left. \begin{aligned} c \operatorname{sign} p x_2 + k_2 x_2 &= k_1 x_1 & \text{при } p x_2 \neq 0, \\ (k_2 x_m - c) < k_1 x_1 < (k_2 x_m + c) & \text{при } p x_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

следует заменить единым нелинейным уравнением

$$x_2 = F(x_1). \quad (3.60)$$

В (3.59) x_m — максимальное значение x_1 в установившемся колебательном движении. Нелинейную функцию $F(x_1)$ в (3.60) следует затем заменить линейным соотношением (3.58). Коэффициенты k и b в формулах (3.56) и (3.57) для $q(A)$ и $q'(A)$ определяются через коэффициенты уравнения (3.59) по соотношениям:

$$k = \frac{k_1}{k_2}, \quad b = \frac{c}{k_1}.$$

При больших скоростях движения иногда приходится учитывать трение, пропорциональное квадрату скорости. Такая нелинейная характеристика подобна степенной. Отличие от степенной характеристики будет только в том, что за входную величину здесь следует принимать не величину x , а скорость изменения ее px , т. е. в этом случае получается нелинейная функция

$$F(px) = k(px)^2 \operatorname{sign} px.$$

Полагая, что решение для скорости ищется в гармоническом виде

$$px = A_p \sin \psi, \quad \psi = \Omega t,$$

в соответствии с (3.31) получим значение коэффициента гармонической линеаризации:

$$q(A_p) = \frac{8kA_p}{3\pi} = 0,85 kA_p \quad (3.61)$$

и, следовательно,

$$F(px) = q(A_p) px = 0,85 kA_p px. \quad (3.62)$$

Если желательно получить решение для самой переменной x , то, полагая

$$x = A \sin \Omega t, \quad px = A\Omega \cos \Omega t,$$

имеем:

$$A_p = A\Omega.$$

Обозначив при этом

$$q''(A) = \frac{8kA}{3\pi} = 0,85 kA, \quad (3.63)$$

получим в соответствии с (3.61) формулу гармонической линеаризации в виде

$$F(x) = q''(A) \Omega px. \quad (3.64)$$

§ 3.7. Нелинейные характеристики с опережающими петлями

До сих пор двузначные петлевые нелинейные характеристики рассматривались как запаздывающие, когда при возрастании входной величины нелинейного звена выходная величина изменялась в соответствии с правой ветвью характеристики, а при убывании — в соответствии с левой ветвью характеристики (рис. 3.17, а). Возможны нелинейные характеристики и с опережающими петлями. Иногда желательно

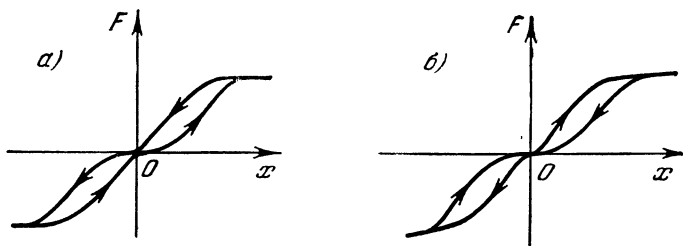


Рис. 3.17.

искусственно 'создать звенья с нелинейными статическими характеристиками с опережающими петлями, например для улучшения динамических свойств нелинейной системы.

В звене с нелинейной характеристикой с опережающими петлями (рис. 3.17, б) выходная величина изменяется в соответствии с левой ветвью при возрастании входной величины и в соответствии с правой ветвью при убывании входной величины.

Определим коэффициенты гармонической линеаризации для некоторых нелинейных статических характеристик с опережающими петлями.

Релейная характеристика общего вида с опережающими петлями. Релейная характеристика общего вида с опережающими петлями представлена на рис. 3.18, а.

Для выполнения гармонической линейзации указанной нелинейной характеристики полагаем, что решение для x отыскивается в гармоническом виде

$$x = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t.$$

Тогда в соответствии с графиком $F(x)$ получим периодическую функцию $F(A \sin \psi)$ по аргументу $\psi = \Omega t$ (рис. 3.18, б). Точкам переключе-

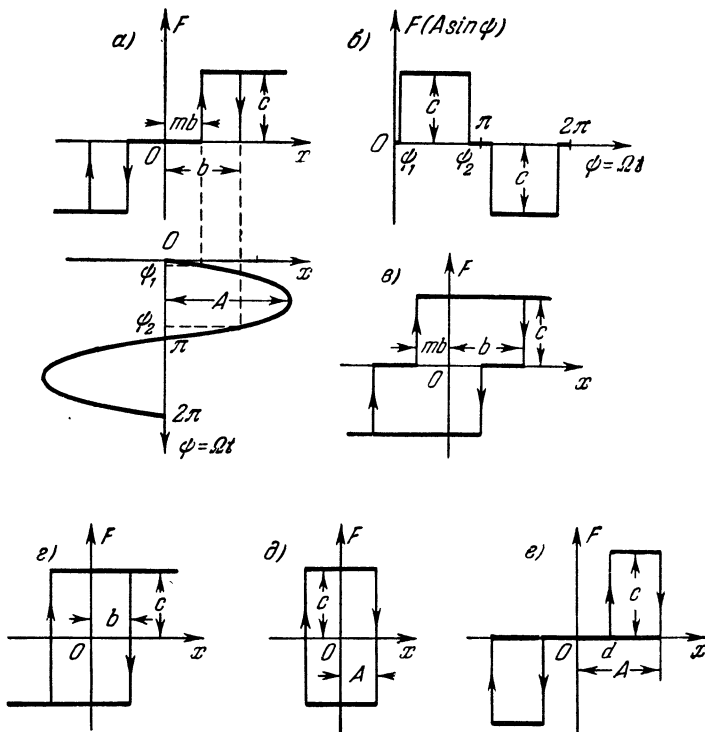


Рис. 3.18.

чения реле будут соответствовать значения $x = mb$, $x = b$ и значения аргумента $\psi_1 = \arcsin \frac{mb}{A}$, $\psi_2 = \pi - \arcsin \frac{b}{A}$. Здесь m — любое дробное число в интервале $-1 \leq m \leq 1$.

При амплитуде $A \leq mb$ реле выключены и передача сигнала в системе отсутствует. Если $mb \leq A \leq b$, то полагаем, что включение и выключение реле происходят при одном и том же значении $x = mb$. В этом случае характеристика с опережающими петлями вырождается

в релейную характеристику с зоной нечувствительности, для которой коэффициенты гармонической линеаризации определены (см. (3.13)). Здесь же рассмотрим случай, когда при установившихся колебаниях $A \geq b$.

Выполняя вычисления по формулам (3.3) и учитывая, что значения интегралов в этих формулах будут одинаковыми за каждый полупериод, для коэффициента $q(A)$ получим:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{2c}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} = \frac{2c}{\pi A} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2). \end{aligned}$$

Учитывая значения ψ_1 и ψ_2 , формулу для определения $q(A)$ запишем в виде

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right) \text{ при } A \geq b. \quad (3.65)$$

Выполняя вычисление коэффициента $q'(A)$, получим:

$$\begin{aligned} q'(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{2c}{\pi A} \sin \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} = -\frac{2c}{\pi A} (\sin \psi_1 - \sin \psi_2), \end{aligned}$$

или при учете значений ψ_1 и ψ_2

$$q'(A) = \frac{2cb}{\pi A^2} (1 - m) \text{ при } A \geq b. \quad (3.66)$$

Сравнивая полученный результат со значениями коэффициентов для релейной характеристики общего вида с запаздывающими петлями (3.5) и (3.6), замечаем, что для коэффициента $q(A)$ получено такое же значение (3.65), что и (3.5), а для коэффициента $q'(A)$ — такое же значение (3.66) по абсолютной величине, что и (3.6), но с положительным знаком. Это означает, что $q(A)$ в обоих случаях одинаково отражает наклон прямой, заменяющей при гармонической линеаризации нелинейную характеристику. Опережающие свойства данной характеристики отражаются при гармонической линеаризации коэффициентом $q'(A)$, определяющим долю вводимой *положительной* производной. В характеристиках с запаздывающими петлями эта производная была отрицательной. Отсюда очевидны возможности создания нелинейных корректирующих устройств в автоматических системах.

Релейная характеристика при смещенной опережающей петле. Считая в характеристике вида рис. 3.18, в величину m отрицательной ($-1 < m < 0$), из (3.65) и (3.66) получим

формулы:

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b, \quad (3.67)$$

$$q'(A) = \frac{2cb}{\pi A^2} (1 + |m|) \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.68)$$

Релейная характеристика с опережающей петлей. Для релейной характеристики рис. 3.18, *г* имеем $m = -1$. Тогда в соответствии с (3.65) и (3.66) получим значения коэффициентов гармонической линеаризации:

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \quad \text{при } A \geq b, \quad (3.69)$$

$$q'(A) = \frac{4cb}{\pi A^2} \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.70)$$

Релейная характеристика с опережающей петлей переменной ширины. В релейной характеристике рис. 3.18, *д* ширина петли равна двум амплитудам и изменяется вместе с изменением амплитуды. Тогда, полагая в (3.69) и (3.70) $b = A$, получим:

$$q(A) = 0, \quad (3.71)$$

$$q'(A) = \frac{4c}{\pi A}. \quad (3.72)$$

Очевидно, что звено с подобной нелинейной характеристикой эквивалентно после гармонической линеаризации дифференцирующему звену. Звено с такой же по виду, но запаздывающей характеристикой было эквивалентно интегрирующему звену.

Релейная характеристика с двумя опережающими петлями переменной ширины. В релейной характеристике рис. 3.18, *е* значение входной величины $x = d = \text{const}$ соответствует включению реле. Отключение реле происходит при изменении знака скорости входной величины, когда $\dot{x} = A$. Полагая в релейной характеристике общего вида $mb = d$ и $b = A$, получим:

$$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{d^2}{A^2}} \quad \text{при } A \geq d, \quad (3.73)$$

$$q'(A) = \frac{2c}{\pi A} \left(1 - \frac{d}{A} \right) \quad \text{при } A \geq d. \quad (3.74)$$

Характеристика с трапецидальными опережающими петлями переменной ширины. Вычислим коэффициенты гармонической линеаризации для характеристики, представленной на рис. 3.19, *а*.

Полагая, что решение для входной величины x нелинейного звена ищется в виде

$$x = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t,$$

выходную величину $F(A \sin \psi)$ получим в виде периодической функции аргумента $\psi = \Omega t$ (рис. 3.19, б).

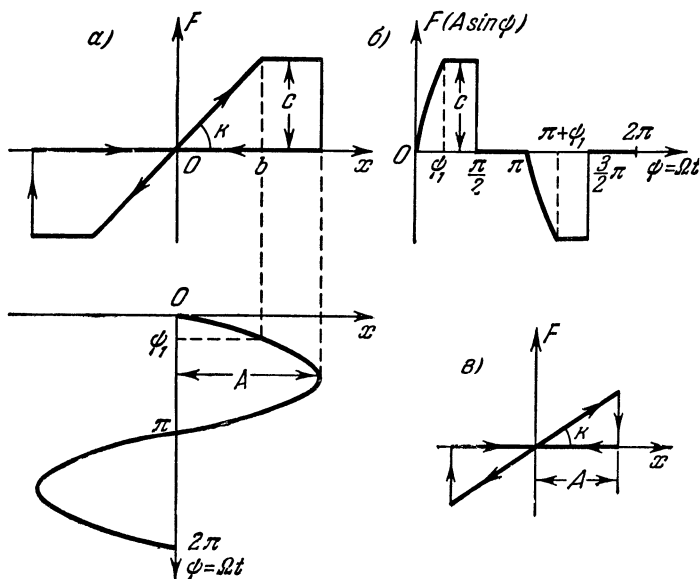


Рис. 3.19.

Выполняя вычисления по формулам (3.3) и учитывая, что значения интегралов в формулах будут одинаковыми за каждый полупериод, для коэффициента $q(A)$ получим:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{2}{\pi A} \left(\int_0^{\psi_1} k A \sin \psi \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} c \sin \psi d\psi \right) = \\ &= \frac{2}{\pi A} \left[k A \left(\frac{\psi}{2} \Big|_0^{\psi_1} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_0^{\psi_1} \right) - c \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] = \\ &= \frac{k}{\pi} \left(\psi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right) + \frac{2c}{\pi A} \cos \psi_1. \end{aligned}$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}$ и $c = kb$, получим:

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b. \quad (3.75)$$

Для коэффициента $q'(A)$ находим:

$$\begin{aligned} q'(A) &= \frac{2}{\pi A} \left(\int_0^{\psi_1} kA \sin \psi \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} c \cos \psi d\psi \right) = \\ &= \frac{2}{\pi A} \left(\frac{1}{2} kA \sin^2 \psi \Big|_0^{\psi_1} + c \sin \psi \Big|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \frac{k}{\pi} \sin^2 \psi_1 + \frac{2c}{\pi A} (1 - \sin \psi_1). \end{aligned}$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}$ и $c = kb$, получим:

$$q'(A) = \frac{2kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{2A} \right) \quad \text{при} \quad A \geq b. \quad (3.76)$$

В том случае, когда в колебательном установившемся процессе значения амплитуды будут $A \leq b$, характеристика с трапецеидальными петлями вырождается в характеристику с треугольными опережающими петлями переменной ширины (рис. 3.19, в). Для случая такой характеристики величина b будет переменной и равной A . Полагая в (3.75) и (3.76) $b = A$, получим формулы для вычисления коэффициентов гармонической линеаризации:

$$q = \frac{k}{2}, \quad q' = \frac{k}{\pi}. \quad (3.77)$$

Как видно из (3.77), коэффициенты гармонической линеаризации для характеристики с треугольными опережающими петлями не зависят от амплитуды A , т. е. звено с такой характеристикой будет себя вести как линейное с введением производной. При этом коэффициент усиления при входной величине x равен $\frac{k}{2}$, а коэффициент при производной по времени от входной величины $\dot{p}x$ равен $\frac{k}{\pi\Omega}$.

Гармоническая линеаризация нелинейностей достаточно просто выполняется для любых кусочно-линейных и других аналитически представимых нелинейных статических характеристик. Если такое представление затруднительно, то возможны и графические методы определения коэффициентов гармонической линеаризации. Один из графических методов рассмотрен в следующем параграфе.

§ 3.8. Графический способ гармонической линеаризации нелинейностей

В том случае, когда нелинейную статическую характеристику трудно представить в аналитическом виде, но она является достоверной (т. е. снята экспериментально), удобно применить графический способ определения коэффициентов гармонической линеаризации.

В статье [81] приводится графический способ, основанный на связи коэффициентов гармонической линеаризации с формой статической характеристики. Там же дано его обоснование. Указанный способ можно распространить как на однозначные симметричные нелинейные статические характеристики, так и на двухзначные и несимметричные характеристики. Здесь приводится без доказательства графический прием определения коэффициентов гармонической линеаризации однозначных симметричных нелинейных статических характеристик.

Точная формула для вычисления коэффициентов гармонической линеаризации

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

на основе приближенного вычисления интеграла может быть сведена к выражению

$$q(A) \approx \frac{2}{3A} \left[F(A) + F\left(\frac{A}{2}\right) \right]. \quad (3.78)$$

Приближенная зависимость (3.78) позволяет определить $q(A)$ графическим способом.

Для определения $q(A)$ необходимо нанести на график правую ветвь нелинейной статической характеристики $F(x) = F(A)$ (рис. 3.20). Изменив масштаб по оси абсцисс, получим кривую $F\left(\frac{A}{2}\right)$. Складывая ординаты первой и второй кривых, получим кривую $F(A) + F\left(\frac{A}{2}\right)$. Затем проводим прямую, параллельную оси ординат через точку $A = -\frac{2}{3}$. Для определения значения $q(A)$ при данном значении $A = A_1$ нужно провести через начало координат и ординату кривой $F(A) + F\left(\frac{A}{2}\right)$ прямую. Отрезок, отсекаемый этой прямой, на прямой $A = -\frac{2}{3}$ и равен искомому значению $q(A_1)$. Это очевидно из подобия треугольников Ocd и aOb .

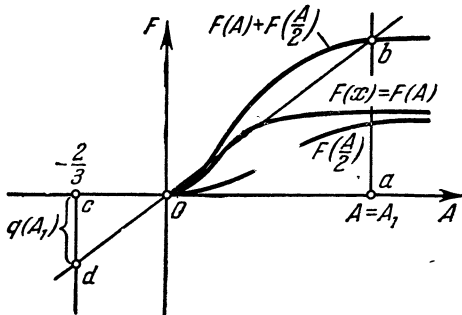


Рис. 3.20.

При условии, что $Oc = \frac{2}{3}$, $ab = F(A_1) + F\left(\frac{A_1}{2}\right)$, $Oa = A_1$, имеем:

$$cd = q(A_1) = \frac{2}{3} \frac{F(A_1) + F\left(\frac{A_1}{2}\right)}{A_1}.$$

Выполняя подобную операцию для других значений $A = A_2, A = A_3, \dots$, $\dots, A = A_n$, получим кривую $q(A)$.

Точность определения графическим способом коэффициентов гармонической линеаризации для практики вполне достаточная. На рис. 3.21 для сравнения представлены кривые $q(A)$ для рассмотренных ранее нелинейных характеристик, вычисленные по точным формулам (сплошные кривые) и полученные приведенным приближенным графическим способом (пунктирные кривые).

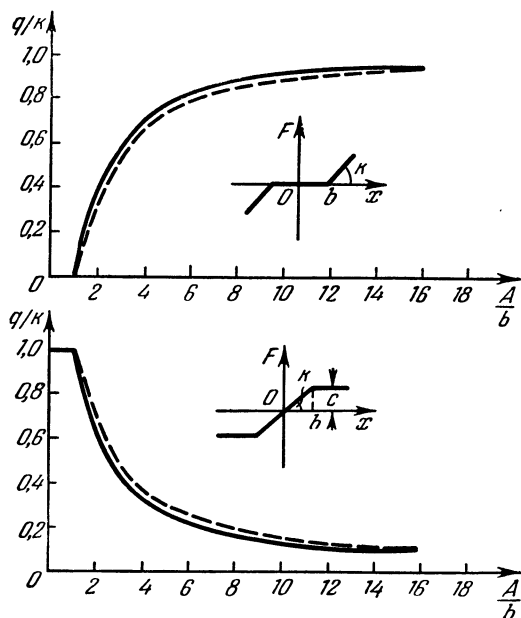


Рис. 3.21.

Кроме описанного графического способа можно применять еще экспериментальное определение $q(A)$ на основе работы [113].

В тех случаях, когда коэффициенты гармонической линеаризации определяются графическим или экспериментальным методом в виде кривых $q(A)$; в уравнениях для нахождения периодического решения (см. § 2.3) будут неизвестными q и Ω , относительно которых и разрешаются уравнения. Кривые $q(A)$ используются для определения амплитуды A периодического решения по известному для этого решения значению q . Такой прием часто бывает полезным и при сложной аналитической зависимости коэффициентов гармонической линеаризации от амплитуды. Для использования этого приема достаточно предварительно построить график $q(A)$ для рассматриваемой нелинейности.

§ 3.9. Релейный исполнительный механизм

Релейный исполнительный механизм (рис. 3.22, а), состоящий из двигателя с независимым возбуждением и реле, управляющего цепью якоря (рис. 3.22, а), как показано в [127], нельзя рассматривать в виде последовательного соединения релейного и линейного звеньев.

Управляющее реле при исследовании процессов системы, включающей релейный исполнительный механизм, при большом коэффициенте возврата реле можно приближенно представить в виде звена со статической характеристикой, показанной на рис. 3.22, б.

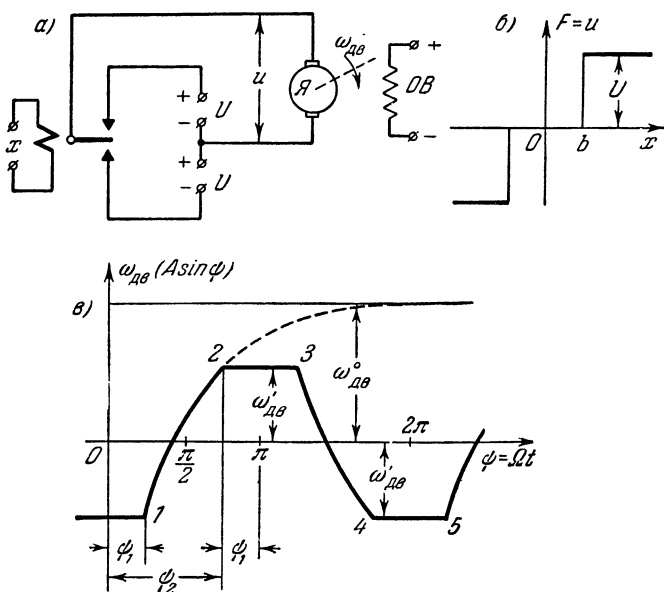


Рис. 3.22.

Движение якоря двигателя при колебательном установившемся процессе в системе в течение одного периода колебаний описывается различными дифференциальными уравнениями в зависимости от замкнутого или разомкнутого состояния контактов реле.

Если не учитывать момента нагрузки и механические характеристики двигателя считать линейными, то при замкнутых контактах уравнение двигателя имеет вид

$$(Tp + 1) \omega_{дв} = kM, \quad (3.79)$$

где $\omega_{дв}$ — угловая скорость вращения вала двигателя, M — пусковой момент, T — электромеханическая постоянная времени двигателя, k — передаточное число.

Для случая разомкнутого состояния контактов якорь двигателя превращается в маховик, и движение якоря двигателя описывается уравнением

$$I p \omega_{\text{дв}} = 0, \quad (3.80)$$

где I — момент инерции якоря двигателя.

Поэтому при выполнении гармонической линеаризации в этом случае реле и двигатель следует рассматривать совместно.

Полагая, что входная величина x изменяется по синусоидальному закону

$$x = A \sin \Omega t,$$

при определении периодической функции $\omega_{\text{дв}} = \omega_{\text{дв}}(\psi)$, $\psi = \Omega t$, необходимо найти решение для установившегося режима по уравнениям (3.79) и (3.80) с учетом характеристики реле (рис. 3.22, б). Указанное решение представлено на рис. 3.22, в. От нуля до точки 1 двигатель имеет постоянную скорость $\omega'_{\text{дв}} = \text{const}$, знак которой определяется предшествующим замкнутым положением контактов реле. При этом угол ψ_1 определяется соотношением

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}. \quad (3.81)$$

Для участка 1—2 решение (3.79) дает

$$\omega_{\text{дв}} = \omega_{\text{дв}}^0 - (\omega_{\text{дв}}^0 + \omega'_{\text{дв}}) e^{-\frac{\psi}{2\pi}}, \quad (3.82)$$

где $\omega_{\text{дв}}^0 = kM$ — установившаяся скорость, $\omega'_{\text{дв}}$ — скорость выбега двигателя при разомкнутых контактах.

Значение угла ψ_2 определяется равенством

$$\psi_2 = \pi - \arcsin \frac{b}{A}. \quad (3.83)$$

Абсолютное значение скорости выбега двигателя определится из (3.82), если вместо ψ подставить его значение для участка 1—2 функции $\omega_{\text{дв}}(A \sin \psi)$:

$$\psi_{1-2} = \pi - 2\psi_1. \quad (3.84)$$

Разрешая (3.82) относительно $\omega'_{\text{дв}}$, с учетом (3.83) получим:

$$\omega'_{\text{дв}} = \frac{1-y}{1+y} \omega_{\text{дв}}^0, \quad (3.85)$$

где

$$y = e^{-\frac{\pi - 2\psi_1}{2\pi}}. \quad (3.86)$$

Определим значения коэффициентов гармонической линеаризации $q(A)$ и $q'(A)$ для релейного исполнительного механизма.

На основании формулы (3.3), в соответствии с видом периодической функции $\omega_{дв}(A \sin \psi)$ (рис. 3.22, в) для $q(A)$ получим:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \omega_{дв}(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left\{ \int_0^{\psi_1} (-\omega'_{дв} \sin \psi) d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left[\omega_{дв}^0 - (\omega_{дв}^0 + \omega'_{дв}) e^{-\frac{\psi}{2\pi}} \right] \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi} \omega'_{дв} \sin \psi d\psi \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi A} \left\{ \omega'_{дв} (\cos \psi_2 + \cos \psi_1) + \omega_{дв}^0 (\cos \psi_1 - \cos \psi_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi^2}{1+4\pi^2} (\omega_{дв}^0 + \omega'_{дв}) \left[e^{-\frac{\psi_2}{2\pi}} \left(\frac{1}{2\pi} \sin \psi_2 + \cos \psi_2 \right) - e^{-\frac{\psi_1}{2\pi}} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{2\pi} \sin \psi_1 + \cos \psi_1 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Так как из (3.81), (3.83) и рис. 3.22 имеем:

$$\cos \psi_2 = -\cos \psi_1, \quad \sin \psi_2 = \sin \psi_1,$$

то с учетом значений $\omega_{дв}^0$ и $\omega'_{дв}$ окончательно получим:

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{4kM}{\pi A} \left\{ \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \frac{4\pi^2}{(1+4\pi^2)(1+y)} \left[e^{-\frac{\psi_2}{2\pi}} \left(\frac{b}{2\pi A} - \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-\frac{\psi_1}{2\pi}} \left(\frac{b}{2\pi A} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) \right] \right\}, \quad (3.87) \end{aligned}$$

где y определяется по формуле (3.86), а ψ_1 и ψ_2 — по формулам (3.81) и (3.83).

Для коэффициента $q'(A)$ получим:

$$\begin{aligned} q'(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \omega_{дв}(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left\{ \int_0^{\psi_1} (-\omega'_{дв} \cos \psi) d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left[\omega_{дв}^0 - (\omega_{дв}^0 + \omega'_{дв}) e^{-\frac{\psi}{2\pi}} \right] \cos \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi} \omega'_{дв} \cos \psi d\psi \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi A} \left\{ -\omega'_{дв} \sin \psi_1 - \omega'_{дв} \sin \psi_2 - \frac{4\pi^2}{1+4\pi^2} (\omega_{дв}^0 + \omega'_{дв}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[e^{-\frac{\psi_2}{2\pi}} \left(-\frac{1}{2\pi} \cos \psi_2 + \sin \psi_2 \right) - e^{-\frac{\psi_1}{2\pi}} \left(-\frac{1}{2\pi} \cos \psi_1 + \sin \psi_1 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $\omega_{дв}^0$ и $\omega_{дв}'$, окончательно получим:

$$q'(A) = -\frac{4kM}{\pi A(1+y)} \left\{ \frac{b(1-y)}{A} + \frac{4\pi^2}{1+4\pi^2} \left[e^{-\frac{\psi_2}{2\pi}} \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1-\frac{b^2}{A^2}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{b}{A} \right) + e^{-\frac{\psi_1}{2\pi}} \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1-\frac{b^2}{A^2}} - \frac{b}{A} \right) \right] \right\}, \quad (3.88)$$

где y определяется по формуле (3.86), а ψ_1 и ψ_2 — по формулам (3.81) и (3.83).

Аналогично можно выполнить линеаризацию нелинейностей и в другом подобном случае, например при учете гистерезисных петель в релейной характеристике, когда реле имеет малый коэффициент возврата.

Выше в § 2.1. был дан общий прием выполнения гармонической линеаризации в том случае, когда нелинейность выражается в виде изменения структуры дифференциальных уравнений или передаточных функций автоматической системы.

Г Л А В А IV

СИММЕТРИЧНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 4.1. Требования, предъявляемые к автоколебательным системам

Нелинейные замкнутые автоматические системы часто в установившемся режиме имеют автоколебания. Для одних систем автоколебательный режим является неизбежным при всех значениях параметров. Для других нелинейных систем в зависимости от значений параметров возможен как автоколебательный установившийся режим, так и устойчивый режим без автоколебаний. В первом случае область изменения параметров будем называть областью автоколебаний, во втором — областью устойчивости равновесия. Кроме указанных областей для нелинейных систем возможны и другие области, в частности также и области неустойчивости. Нелинейные системы, в отличие от линейных, могут иметь несколько состояний устойчивого и неустойчивого равновесия, причем области устойчивости их ограничиваются не только определенными значениями параметров системы, но также и определенными соотношениями начальных условий.

В зависимости от типа автоматической системы и условий ее работы можно определить, является ли для данной системы режим автоколебаний приемлемым или недопустимым. Так, например, для счетно-решающих устройств, выполненных в виде следящих систем с малыми подвижными массами, автоколебательный режим часто будет полезен, так как при этом уменьшится зона нечувствительности такого устройства, обусловленная сухим трением. Автоколебательный режим бывает полезен как средство вибрационного сглаживания нелинейных статических характеристик (в частности, релейных). В системе же с большими подвижными массами, как, например, самолетные стрелковые установки, автоколебательный режим будет недопустим, так как наличие такого режима приведет к снижению точности стрельбы, возникновению больших перегрузок в подвижной части системы и преждевременному износу кинематической передачи к управляемому объекту.

При анализе автоколебательных систем, т. е. систем, для которых возможен автоколебательный режим работы, практически представляет интерес определить: при каких значениях параметров в системе возможен автоколебательный режим; как каждый из параметров системы влияет на автоколебания; какими средствами можно изменить амплитуду и частоту автоколебаний или подавить автоколебания, если это требуется.

Амплитуда автоколебаний почти во всех случаях должна быть по возможности меньшей, так как этим определяется точность системы в установившемся режиме при симметричных колебаниях. Лишь иногда необходимо бывает вызывать автоколебания заданной (небольшой) амплитуды (см. § 4.16). При наличии внешнего воздействия, постоянной или медленно меняющейся величины, автоколебания деформируются, так как смещается центр колебаний. В этом случае ошибки в системе будут определяться величиной смещения центра колебаний, а оно обычно будет тем меньшим, чем меньше амплитуда колебаний.

В данной главе будут производиться исследования только симметричных автоколебаний и устойчивости нелинейных систем при отсутствии внешнего воздействия. Исследование автоколебательных режимов при постоянном и переменном внешнем воздействии будет рассмотрено ниже в главах V и VI.

Частота автоколебаний в большинстве случаев должна быть по возможности высокой, хотя иногда она задается исходя из других требований. При этом ограничивающим фактором может быть увеличение перегрузок в механических элементах с увеличением частоты. Требование же высокой частоты обусловлено тем, что в системах, воспроизводящих задающее воздействие, частота автоколебаний должна быть, по крайней мере, на порядок выше частоты воспроизводимого воздействия. В противном случае нельзя добиться достаточной точности работы такой системы. С другой стороны, при наличии высоких частот автоколебаний можно достаточно просто за счет инерционных свойств звеньев получать выходную величину замкнутой автоколебательной системы практически без заметных амплитуд колебаний. Изменение частоты автоколебаний часто бывает необходимым для тех автоколебательных систем, которые работают в условиях вибраций, чтобы избавиться от погрешностей системы за счет вынужденных вибраций.

Для каждой конкретной системы в зависимости от условий ее работы могут быть выдвинуты и другие требования к установившемуся колебательному режиму.

В любом случае важно знать влияние параметров системы на вид ее установившегося режима. Если установившийся режим является автоколебательным, то важно знать зависимость частоты и амплитуды автоколебаний от каждого параметра системы.

Часто в определении этих зависимостей не требуется высокой точности, а достаточно иметь лишь рекомендации о том, в какую

сторону следует изменять тот или иной параметр, чтобы уменьшить амплитуду и увеличить частоту автоколебаний. Поэтому для инженерных целей при исследовании автоколебательных режимов возможно применение приближенных методов, отвечающих на поставленные вопросы. Наиболее целесообразным во многих случаях практики является исследование автоколебаний на основе метода гармонической линеаризации. Используя этот метод, можно получать аналитические выражения для амплитуды и частоты через параметры системы в явном виде. Если получение таких зависимостей в явном виде затруднительно, то могут быть использованы различные графические приемы решения получаемых уравнений (см. § 2.3).

Рассмотрим ряд примеров построения таких зависимостей для автоколебательных систем.

При выявлении областей автоколебаний необходимо оценивать устойчивость периодических решений. Это будет выполняться при помощи приближенных критериев устойчивости периодических решений, описанных в § 2.4.

Наконец, в данной главе будут определяться также области устойчивости равновесного состояния системы приближенными приемами, указанными в §§ 2.7 и 2.9.

Исследование будет выполняться на конкретных примерах автоматических систем различных типов с доведением результата до численных значений с тем, чтобы проиллюстрировать возможно полное применение методов в инженерной практике.

§ 4.2. Система стабилизации гиromаятника

Проведем исследование автоколебаний на примере системы стабилизации гироскопа [129]. На рис. 4.1 представлена принципиальная схема неуравновешенного относительно оси внутренней рамки z трехстепенного гироскопа (гиромаятника). Если в направлении, параллельном оси внешней рамки x , приложить к гироскопу силу f , то гироскоп будет прецессировать относительно этой оси. Скорость прецессии будет пропорциональна величине силы f . Вследствие наличия сил трения в осях подвеса при движении гироскопа относительно оси внешней рамки возникнет момент. Кроме того, момент относительно оси внешней рамки может быть обусловлен не точной балансировкой относительно оси x системы, состоящей из гироскопа, внутренней рамки и внешней рамки. Под действием момента, приложенного к гироскопу относительно оси x , последний начнет прецессировать относительно оси внутренней рамки z . Так как неуравновешенный гироскоп применяется как измеритель силы f , то для сохранения постоянной величины плеча l_0 приложения измеряемой силы необходимо заставить движение гироскопа относительно оси x в плоскости $yO'z$. Момент, возникающий относительно оси x , есть случайная функция времени, и поэтому точная компенсация

Проведем исследование автоколебаний системы стабилизации гироскопа (без учета момента сухого трения и момента несбалансированности) методом гармонической линеаризации.

Уравнения движения гироскопа при принятом направлении осей (рис. 4.1) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} A_0 \ddot{\alpha} + n_\alpha \dot{\alpha} - H \dot{\beta} &= M_{с.д}(\beta), \\ B_0 \ddot{\beta} + n_\beta \dot{\beta} + H \dot{\alpha} &= \mu_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где α — угол поворота гироскопа относительно оси внешней рамки; β — угол поворота гироскопа относительно оси внутренней рамки; $A_0 [г \cdot см \cdot сек^2]$ — момент инерции относительно оси x системы, состоящей из гироскопа, внутренней рамки и внешней рамки; $B_0 [г \cdot см \cdot сек^2]$ — момент инерции относительно оси z — системы, состоящей из гироскопа и внутренней рамки; $H [г \cdot см \cdot сек]$ — кинетический момент гироскопа; $n_\alpha, n_\beta [г \cdot см \cdot сек]$ — коэффициенты вязкого трения; $M_{с.д} [г \cdot см]$ — момент стабилизирующего двигателя; $\mu_0 [г \cdot см]$ — внешний момент, приложенный к гироскопу за счет измеряемой силы f .

Приведем уравнения (4.1) к одному уравнению с переменной β . Определяя из второго уравнения $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$ и подставляя в первое уравнение (4.1), получаем:

$$A_0 B_0 \ddot{\beta} + (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) \dot{\beta} + (n_\alpha n_\beta + H^2) \beta = -H M_{с.д}(\beta) + n_\alpha \mu_0.$$

Обычно величина $n_\alpha n_\beta \ll H^2$; тогда, пренебрегая $n_\alpha n_\beta$ по сравнению с H^2 и вводя знак оператора $p = \frac{d}{dt}$, получим:

$$[A_0 B_0 p^3 + (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) p^2 + H^2 p] \beta = -H M_{с.д}(\beta) + n_\alpha \mu_0. \quad (4.2)$$

Будем исследовать колебания гироскопа при подключенном стабилизирующем двигателе и отсутствии внешнего момента, т. е. $\mu_0 = 0$. Тогда уравнение (4.2) запишется в виде

$$[A_0 B_0 p^3 + (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) p^2 + H^2 p] \beta = -H M_{с.д}(\beta). \quad (4.3)$$

Момент стабилизирующего двигателя $M_{с.д}(\beta)$ есть нелинейная функция от β . Примем данную нелинейную функцию в виде идеальной релейной характеристики (рис. 4.2). Такая характеристика практически обеспечивается, если в качестве стабилизирующего двигателя применяется двухфазный индукционный двигатель. Так как двигатель практически работает в тормозном режиме, то его момент будет постоянным. Питание двигателя переменным током частоты порядка 400 гц обеспечивает безынерционность появления момента от управляющего напряжения. Момент двухфазного индукционного двигателя

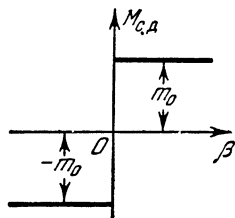


Рис. 4.2.

определяется вынужденной составляющей тока, а последняя безынерционна по отношению к приложенному напряжению.

Наличие симметричной нелинейной характеристики при отсутствии внешнего воздействия позволяет выполнить гармоническую линеаризацию из условия симметричности ожидаемого периодического движения в системе.

Периодическое решение ищем в синусоидальном виде

$$\beta = A \sin \Omega t.$$

Тогда, учитывая значения коэффициентов гармонической линеаризации для идеальной релейной характеристики (3.14), нелинейно изменяющийся момент $M_{с.д}$ от β заменим соотношением

$$M_{с.д} = q(A) \beta = \frac{4m_0}{\pi A} \beta.$$

Подставляя значение $M_{с.д}$ в (4.3), получим гармонически линеаризованное уравнение системы:

$$\left[A_0 B_0 p^3 + (A_0 n_\beta + B_0 n_a) p^2 + H^2 p + \frac{4m_0 H}{\pi A} \right] \beta = 0. \quad (4.4)$$

Согласно первому способу отыскания автоколебаний (§ 2.3) подставим сюда $p = j\Omega$ и, выделив вещественную и мнимую части, получим два уравнения для определения периодического решения (для переменной β):

$$\left. \begin{aligned} \frac{4m_0 H}{\pi A} - (A_0 n_\beta + B_0 n_a) \Omega^2 &= 0, \\ H^2 - A_0 B_0 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Устойчивость периодического решения оценим по приближенному аналитическому критерию (2.125), т. е. определим, удовлетворяется ли условие

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* > 0. \quad (4.6)$$

Звездочка при производных означает, что в производные подставлены значения амплитуды и частоты исследуемого периодического решения $a = A$ и $\omega = \Omega$.

Для определения соответствующих производных запишем на основании (4.4) формулы для вещественной и мнимой частей выражения кривой Михайлова:

$$\begin{aligned} X(a, \omega) &= \frac{4m_0 H}{\pi a} - (A_0 n_\beta + B_0 n_a) \omega^2, \\ Y(a, \omega) &= H^2 \omega - A_0 B_0 \omega^3. \end{aligned}$$

Обозначение амплитуды и частоты здесь и в дальнейшем малыми буквами a и ω соответствует тому, что критерий устойчивости периоди-

ческого решения получен в § 2.4 из рассмотрения системы с измененным значением амплитуды по сравнению с ее значением в периодическом решении, т. е. из рассмотрения кривой Михайлова, смещенной от начала координат.

Определяя соответствующие производные, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* &= -\frac{4m_0 H}{\pi A^2} < 0, & \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= 0, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -2(A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) \Omega < 0, & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* &= H^2 - 3A_0 B_0 \Omega^2. \end{aligned}$$

Так как из второго уравнения (4.5)

$$\Omega^2 = \frac{H^2}{A_0 B_0},$$

то

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = -2H^2 < 0.$$

Как видно из знаков всех производных, критерий устойчивости (4.6) для периодического решения выполняется. Таким образом, подтверждаются соображения об автоколебательном режиме работы системы стабилизации гироскопа.

В данном случае можно было и не проводить исследования устойчивости периодического решения, так как в рассматриваемом примере оно единственное и из принципа работы системы стабилизации очевидно, что оно соответствует автоколебаниям.

Из второго уравнения (4.5) получим формулу для определения частоты автоколебаний через параметры системы:

$$\Omega = \frac{H}{\sqrt{A_0 B_0}}. \quad (4.7)$$

Подставляя значение Ω в первое уравнение (4.5), получим формулу для определения амплитуды автоколебаний:

$$A = \frac{4m_0 A_0 B_0}{\pi H (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha)}. \quad (4.8)$$

Как видно из (4.7), частота автоколебаний определяется кинетическим моментом гироскопа и моментами инерции гироскопа и рамок подвеса. Она равна частоте так называемых нутационных колебаний. Роль стабилизирующего двигателя сводится к поддержанию нутационных колебаний, которые заглуши бы при отключенном стабилизирующем двигателе из-за трения в осях рамок подвеса гироскопа.

Задаваясь значениями параметров в (4.7) и (4.8) и изменяя поочередно каждый из них в практически интересующих пределах, можно построить графики изменения частоты и амплитуды автоколебаний по каждому параметру. На рис. 4.3 представлены такие графики для случая постоянных значений других параметров: $H = 400 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$,

$A_0 = 2 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$, $B_0 = 2 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$, $n_a = 2 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$, $n_\beta = 1 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$, $m_0 = 30 \text{ г} \cdot \text{см}$.

Для качественной оценки полученных результатов был проведен эксперимент с неуравновешенным относительно оси внутренней рамки

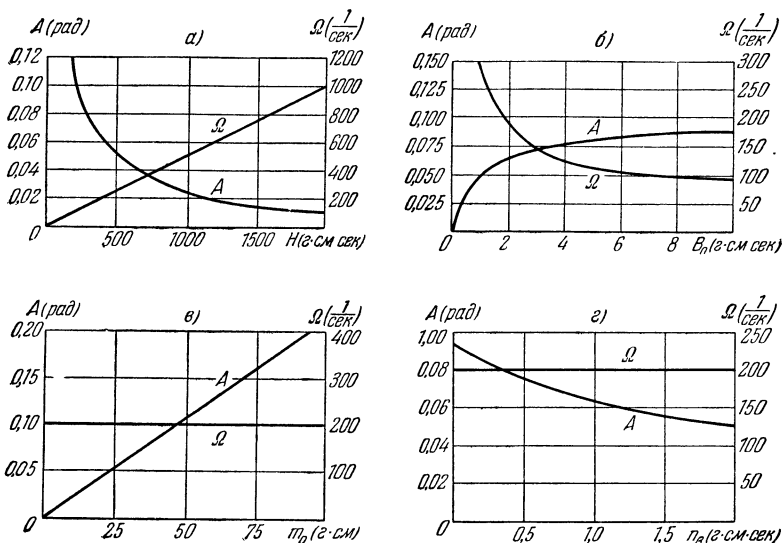


Рис. 4.3.

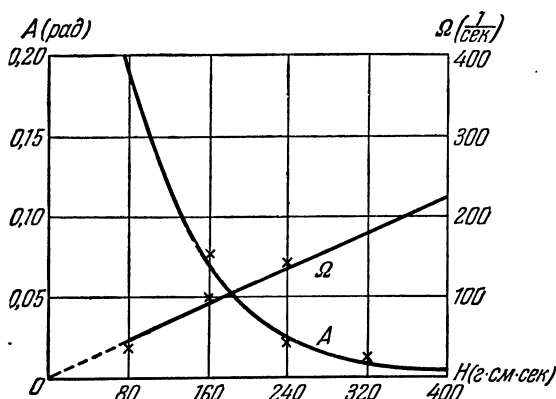


Рис. 4.4.

гироскопом, имеющим полярный момент инерции $J = 0,153 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$. Путем изменения скорости вращения изменялся кинетический момент H гироскопа и были получены экспериментально зависимости $A(H)$ и $\Omega(H)$ (рис. 4.4).

Полученные экспериментальные кривые качественно подтверждают аналитические зависимости $A(H)$ и $\Omega(H)$.

Графики изменения амплитуды и частоты автоколебаний гиросмаятника от параметров системы позволяют дать рекомендации для конструирования подобных приборов. Из графиков следует, что для получения большой частоты и малой амплитуды автоколебаний гироскопа желательно увеличивать кинетический момент гироскопа, уменьшать момент инерции рамок подвеса гироскопа, увеличивать демпфирование движения гироскопа относительно осей подвеса и по возможности уменьшать момент стабилизирующего двигателя. Уменьшение момента стабилизирующего двигателя ограничено величиной момента трения и неточностью балансировки гироскопа относительно оси внешней рамки. Следовательно, необходимо добиваться малых трений в осях подвеса и тщательной балансировки гироскопа с его рамками относительно оси внешней рамки.

§ 4.3. Следящая система с нелинейным усилителем

Рассмотрим следящую систему, выполняющую задачу дистанционной передачи угловых положений задатчика к управляемому объекту (рис. 4.5). Система работает на постоянном токе. Датчиком рассогласований является реостатная пара. Усилительными устройствами являются электронный усилитель и генератор-двигатель.

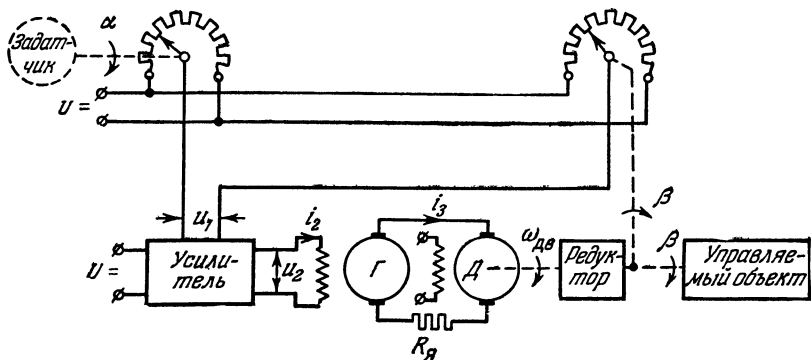


Рис. 4.5.

сований является реостатная пара. Усилительными устройствами являются электронный усилитель и генератор-двигатель.

Положим, что входное напряжение u_1 электронного усилителя может достигать таких значений, при которых на выходе электронного усилителя имеется ограничение для выходного напряжения u_2 , т. е. будем учитывать нелинейность типа насыщения или ограничения (рис. 4.6).

Составим уравнения для линейных звеньев системы.

1. Уравнение датчика рассогласований:

$$u_1 = k_1 \vartheta, \quad \vartheta = \alpha - \beta, \quad (4.9)$$

где ϑ — угол рассогласования; $u_1[\vartheta]$ — напряжение на входе электронного усилителя; $k_1[\vartheta]$ — передаточное число датчика рассогласований.

2. Уравнение цепи возбуждения генератора

$$(T_1 p + 1) i_2 = k_2 u_2, \quad (4.10)$$

где $T_1 [\text{сек}]$ — электрическая постоянная времени цепи возбуждения; $k_2 \left[\frac{a}{\vartheta} \right]$ — коэффициент усиления цепи возбуждения; $u_2[\vartheta]$ — напряжение

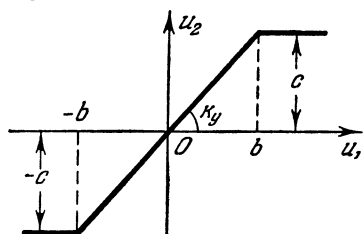


Рис. 4.6.

на выходе усилителя при подключенной нагрузке; $i_2[a]$ — ток цепи возбуждения.

3. Уравнение цепи якоря генератор-двигатель при пренебрежении их индуктивностью будет

$$R_{\text{я}} i_3 = e_{\text{г}} - e_{\text{дв}},$$

где $e_{\text{г}} = k_{\text{г}} i_2$, $e_{\text{дв}} = k_{\text{дв}} p \beta$. Здесь $k_{\text{г}}$ и $k_{\text{дв}}$ — коэффициенты усиления.

После приведения уравнения к стандартному виду получим:

$$i_3 = k_3 i_2 - k_4 p \beta, \quad (4.11)$$

где

$$k_3 = \frac{k_{\text{г}}}{R_{\text{я}}}, \quad k_4 = \frac{k_{\text{дв}}}{R_{\text{я}}} \left[\frac{\vartheta \cdot \text{сек}}{\text{ом}} \right].$$

4. Уравнение движения якоря двигателя, редуктора и объекта при учете трения, пропорционального первой степени скорости, и без учета внешнего возмущения будет

$$J p^2 \beta + k_{\beta} p \beta = M_{\text{дв}},$$

где $J [\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2]$ — момент инерции всех вращающихся от двигателя элементов, приведенный к выходному валу редуктора; $k_{\beta} [\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}]$ — коэффициент вязкого трения. При независимом возбуждении момент двигателя

$$M_{\text{дв}} = k_i i_3.$$

Тогда предыдущее уравнение переписывается в виде

$$(T_2' p + 1) p \beta = k_5 i_3, \quad (4.12)$$

где $T_2' = \frac{J}{k_{\beta}} [\text{сек}]$ — механическая постоянная времени; $k_5 = \frac{k_i}{k_{\beta}} [a/\text{сек}]$ — передаточное число.

Объединяя уравнения (4.11) и (4.12), получим:

$$(T_2' p + 1 + k_4 k_5) p \beta = k_3 k_5 i_2,$$

или

$$(T_2 p + 1) p \beta = \frac{k_3 k_5}{1 + k_4 k_5} i_2, \quad (4.13)$$

где $T_2 = \frac{T'_2}{1 + k_4 k_5}$ [сек] — электромеханическая постоянная времени двигателя.

Из уравнений (4.9), (4.10) и (4.13) при $\alpha = 0$ получим уравнение линейной части системы

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p u_1 = -k_n u_2, \quad (4.14)$$

где $k_n = \frac{k_1 k_2 k_3 k_5}{1 + k_4 k_5}$ [1/сек] — коэффициент усиления линейной части следящей системы.

По методу гармонической линеаризации при симметричных колебаниях характеристика с насыщением заменяется соотношением

$$u_2 = q(A) u_1.$$

В соответствии с (3.19) для нелинейности вида рис. 4.6 получаем:

$$q(A) = k_y \quad \text{при} \quad A \leq b,$$

$$q(A) = \frac{2k_y}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) \quad \text{при} \quad A \geq b.$$

Подставляя значение u_2 в (4.14), получим:

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p + k_n q(A)] u_1 = 0. \quad (4.15)$$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы запишется в виде

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_n q(A) = 0. \quad (4.16)$$

Подставив $p = j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части

$$X(A, \Omega) = 0 \quad \text{и} \quad Y(A, \Omega) = 0, \quad (4.17)$$

получим два уравнения для определения периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} k_n q(A) - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Из второго уравнения (4.18) находим формулу для определения частоты периодического решения через параметры системы:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (4.19)$$

Подставляя значение Ω и $q(A)$ в первое уравнение (4.18), получим формулу, связывающую амплитуду периодического решения с параметрами системы:

$$\frac{2k_n k_y}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}. \quad (4.20)$$

Для исследования устойчивости периодического решения применим приближенный критерий (4.6). В соответствии с (4.16) получаем:

$$X(a, \omega) = k_a q(a) - (T_1 + T_2) \omega^2,$$

$$Y(a, \omega) = \omega - T_1 T_2 \omega^3.$$

Вычисляя частные производные с учетом знака $\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^*$, определяемого из графика (рис. 3.7), получим:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* = k_a \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^* < 0 \quad \text{при } A > b, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* = 0,$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* = -2(T_1 + T_2)\Omega < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = 1 - 3T_1 T_2 \Omega^2.$$

На основании (4.19) имеем:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = -2 < 0.$$

Применяя критерий (4.6), получим:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* = -2k_a \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^* > 0 \quad \text{при } A > b.$$

Следовательно, в системе будут возникать автоколебания при условии $A > b$. При значениях $A < b$ получается $q = \text{const} = k_y$ независимо от A , вследствие чего автоколебания отсутствуют.

По формулам (4.19) и (4.20) построим кривые изменения амплитуды и частоты автоколебаний при изменении каждого из параметров системы.

Из (4.19) видно, что частота автоколебаний зависит только от постоянных времени T_1 и T_2 . Каждая из постоянных времени одинаково влияет на изменение частоты и амплитуды автоколебаний. Поэтому искомые кривые построим в зависимости от параметров $k = k_a k_y$, T_2 и b .

Так как уравнение (4.20) трансцендентно относительно амплитуды, то целесообразно находить выражения для параметров в явном виде в зависимости от амплитуды.

Для определения влияния коэффициента усиления следящей системы на амплитуду автоколебаний из (4.20) получаем формулу

$$k = \frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T_1 T_2 \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right)}. \quad (4.21)$$

Из (4.21) видно, что при значении $A = b$ коэффициент усиления

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}, \quad (4.22)$$

т. е. автоколебания возникают в системе только во вполне определенной области значений коэффициента усиления $k \geq k_{кр}$. При значе-

нии $A \leq b$ следящая система может рассматриваться как линейная с коэффициентом усиления $k = k_d k_y$. В соответствии с (4.18), считая $q(A) = k_y$, получим условие границы устойчивости линейной системы

$$\begin{aligned} k_{гр} - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$k_{гр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}. \quad (4.23)$$

Сравнивая (4.22) и (4.23), получаем $k_{гр} = k_{кр}$. Следовательно, при $k < k_{кр} = k_{гр}$ следящая система является устойчивой как в линейной части характеристики ($u_1 < b$), так и в нелинейной ($u_1 > b$, рис. 4.6). При $k \geq k_{кр}$ в силу наличия насыщения в характеристике усилителя следящая система работает как нелинейная в автоколебательном режиме с определенной амплитудой, в то время как при отсутствии насыщения линейная система при $k > k_{кр}$ имела бы расходящийся колебательный процесс.

Указанное поведение следящих систем наблюдается на практике. Линейные следящие системы часто имеют звенья с ограниченными участками линейности, переходящими в участок насыщения. Поэтому при увеличении коэффициента усиления следящей системы до некоторой величины вместо неустойчивости, которая следует из линейной теории, обычно возникают автоколебания.

Для построения кривых изменения частоты автоколебаний зададимся следующими значениями параметров:

$$k = 20 \text{ 1/сек}, \quad T_1 = 0,1 \text{ сек}, \quad T_2 = 1 \text{ сек}, \quad b = 1 \text{ в.}$$

Подставляя в (4.19) и (4.20) значения всех параметров, кроме одного, который изменяем в интересующих пределах, и выполняя расчет для каждого параметра, получаем кривые зависимости амплитуды и частоты от каждого параметра.

Формулы (4.19) и (4.20) были получены при определении периодического решения для входной величины нелинейного звена, т. е. для входного напряжения усилителя. Представляет интерес получить такое решение для величины угла β на выходе следящей системы.

Частота периодического решения будет одинаковой для любой переменной системы. Значение амплитуды входного напряжения усилителя легко пересчитать в амплитуду угла β по уравнению датчика рассогласования

$$u_1 = k_1 \beta.$$

Следовательно,

$$A = k_1 A_\beta,$$

где A_β — амплитуда колебаний выходного вала редуктора следящей системы.

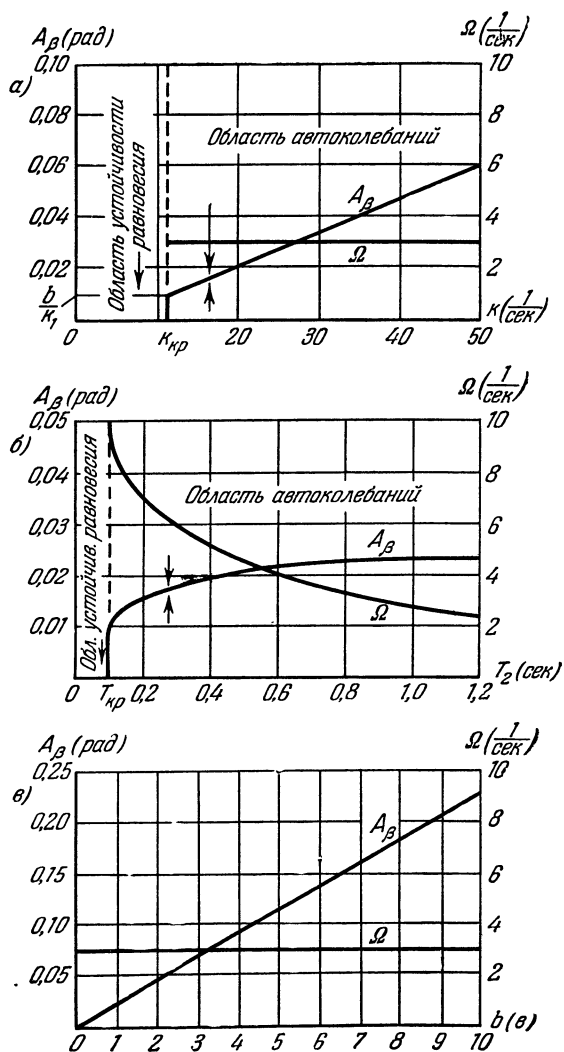


Рис. 4.7.

Выполненные расчеты при $k_1 = 100$ в/рад и выбранных значениях других параметров представлены в виде графиков на рис. 4.7, а, б, в. Графики дают наглядную картину влияния каждого параметра на амплитуду и частоту автоколебаний.

Как видно из выполненных построений, в зависимости от значения параметров возможна работа системы как с автоколебательным установившимся режимом, так и с устойчивым режимом без автоколебаний.

Уменьшение амплитуды автоколебаний возможно за счет уменьшения коэффициента усиления системы k , уменьшения постоянных времени T_1 и T_2 и уменьшения линейной части характеристики усилителя, т. е. величины b .

Увеличение частоты автоколебаний возможно только за счет уменьшения постоянных времени T_1 и T_2 .

Подавление автоколебаний возможно за счет уменьшения коэффициента усиления и уменьшения постоянных времени.

При выбранных для построения значениях параметров частота автоколебаний $\Omega = 3,16$ 1/сек, амплитуда $A_0 = 0,022$ рад.

Теперь учтем в той же следящей системе кроме насыщения еще и зону нечувствительности усилителя (рис. 4.8). Это соответствует усилителю, собранному на лампах, имеющих сеточные характеристики с начальным пологим участком.

В этом случае для отыскания периодического решения будут справедливы уравнения (4.18), но с другими значениями $q(A)$.

При значениях амплитуды $b_1 \leq A \leq b_2$ в соответствии с формулой гармонической линеаризации характеристики с зоной нечувствительности (3.18) будет

$$q(A) = k_y - \frac{2k_y}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right).$$

Для оценки устойчивости периодического решения с учетом графика $q(A)$ (рис. 3.7) получим:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* = k_{\lambda} \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right)^* > 0 \quad \text{при} \quad b_1 \leq A \leq b_2$$

и прежних значениях

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^*, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^*, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^*.$$

Следовательно, периодическое решение для $b_1 \leq A \leq b_2$ неустойчиво и наличие только зоны нечувствительности в усилителе не может вызвать автоколебаний в данной системе.

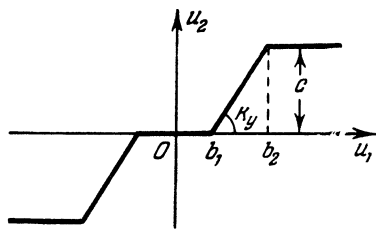


Рис. 4.8.

При значениях амплитуды $A \geq b_2$ в соответствии с формулой гармонической линеаризации для характеристики с зоной нечувствительности и насыщением (3.17) получим:

$$q(A) = \frac{2k_y}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{A} - \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_2}{A} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{A^2}} - \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right).$$

Для определения устойчивости периодического решения получаем в соответствии с графиком $q(A)$ (рис. 3.7)

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* = k_n \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right)^* < 0 \quad \text{при } A \geq b_2.$$

Остальные производные будут иметь прежние знаки.

Следовательно, при значениях $A \geq b_2$ периодическое решение устойчиво.

Выполним расчет кривых изменения амплитуды и частоты автоколебаний при прежних значениях параметров и $b_1 = 0,2$ в, $b_2 = b = 1$ в. Частота Ω периодического решения будет зависеть только от постоянных времени T_1 и T_2 и определится по формуле (4.19). Зависимости амплитуды от параметров системы в соответствии с (4.20) определятся по соотношениям:

1) для случая неустойчивого периодического решения

$$k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \quad (4.24)$$

при $b_1 \leq A \leq b_2$;

2) для устойчивого периодического решения (автоколебаний)

$$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{A} - \arcsin \frac{b_1}{A} + \frac{b_2}{A} \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{A^2}} - \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} \right) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \quad (4.25)$$

при $A \geq b_2$.

Зависимости амплитуды $A_\beta = \frac{A}{k_1}$ и частоты Ω автоколебаний от параметров системы, найденные по формулам (4.19), (4.24) и (4.25), представлены в виде графиков на рис. 4.9, а, б, в.

Как видно из графиков, в случае наличия нелинейности с зоной нечувствительности и насыщением также возможны две области установившихся режимов в нелинейной системе: область автоколебаний и область устойчивости, причем в области автоколебаний для амплитуды периодических решений имеется два значения. Ветвь с большими амплитудами, как было показано, соответствует устойчивому периодическому решению — автоколебаниям, что отмечается стрелками, сходящимися сверху и снизу к данной ветви. Ветвь с меньшими амплитудами отвечает неустойчивому периодическому решению, что показано стрелками, расходящимися от данной ветви.

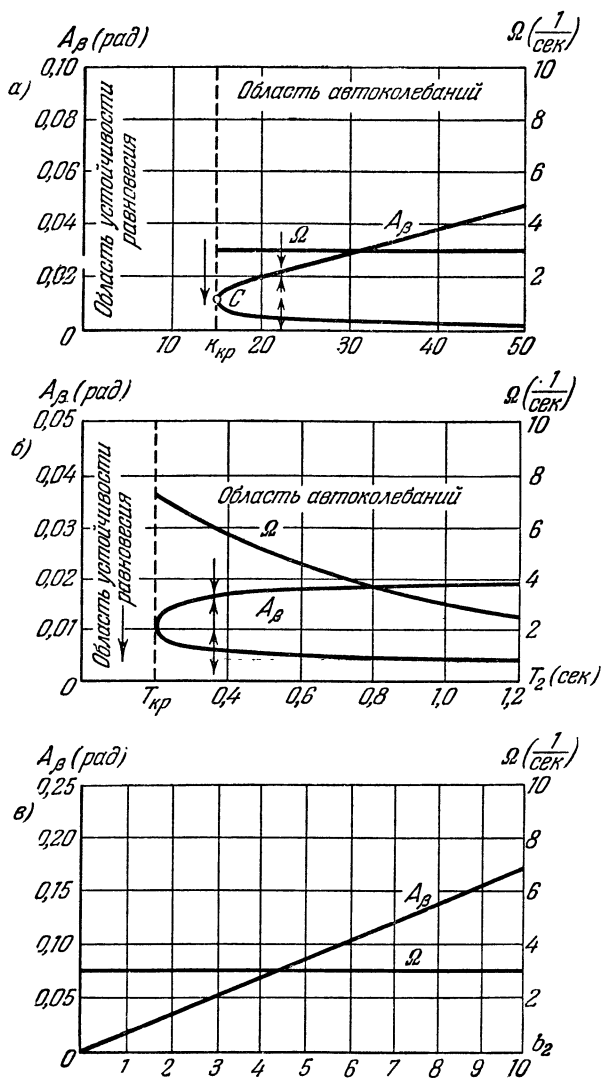


Рис. 4.9.

Следовательно, в области автоколебаний система устойчива «в малом» и обладает устойчивым автоколебательным режимом «в большом».

При значениях $k < k_{кр}$ и $T_2 < T_{кр}$ периодического решения нет. Система в этом случае остается нелинейной. Чтобы судить об устойчивости нелинейной системы вне области автоколебаний распространним полученный результат исследования устойчивости автоколебаний в критической точке C (рис. 4.9) на область, где нет периодического решения. Действительно, в точке C остается устойчивость «в малом» и затухающий процесс «в большом», т. е. данная система при $k < k_{кр}$ и $T_2 < T_{кр}$ устойчива при любых начальных условиях (имеется в виду, что $k > 0$ и $T_2 > 0$). Этот результат легко подтвердить методом, изложенным в § 2.7.

Уменьшение амплитуды автоколебаний, увеличение частоты автоколебаний и подавление автоколебаний, как видно, возможны теми же средствами, что и в случае наличия одного насыщения. Кроме того, наличие зоны нечувствительности, как видно, сужает область автоколебаний и является поэтому тоже одним из средств подавления автоколебаний.

§ 4.4. Следящая система с нелинейным приводом

В рассмотренных в §§ 4.2 и 4.3 примерах области устойчивости и автоколебаний выделялись по каждому из параметров системы. Если не выполнять построения кривых изменения амплитуды и частоты автоколебаний для каждого параметра, а интересоваться поведением

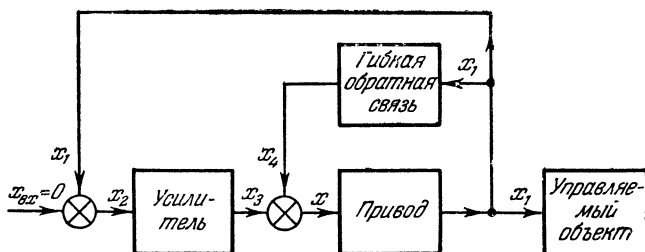


Рис. 4.10.

нелинейной системы с точки зрения ее устойчивости и установившихся режимов, то построение областей возможных установившихся режимов и выделение области устойчивости удобно выполнить на плоскости некоторых (наиболее важных) двух параметров [64].

Произведем такое построение на примере следящей системы, структурная схема которой представлена на рис. 4.10. Здесь учитывается нелинейность типа насыщения без зоны нечувствительности (рис. 4.11) в приводе объекта следящей системы. Такая нелинейность имеет место в гидравлических и пневматических сервоприводах,

управляемых золотниками. При изменении перемещения золотника скорость сервопривода вначале нарастает по линейному закону в зависимости от перемещения золотника, а при полностью открытых окнах золотника достигает максимального значения и далее остается постоянной. Кроме того, в приведенном примере учитываются инерционность усилителя и дополнительная гибкая обратная связь, охватывающая привод.

Звенья системы описываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) p x_1 &= F(x), \\ x_2 &= x_{вх} - x_1, \\ (T_2 p + 1) x_3 &= k_2 x_2, \\ x &= x_3 - x_4, \quad x_4 = k_{о.с} p x_1, \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

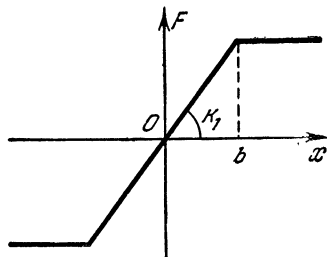


Рис. 4.11.

первое из которых есть уравнение привода с учетом нагрузки, создаваемой объектом, второе — уравнение датчика рассогласований, третье — уравнение усилителя и четвертое — уравнение обратной связи.

Считая $x_{вх} = 0$, будем искать решение для x в синусоидальном виде

$$x = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t.$$

Гармоническая линеаризация нелинейности дает

$$F(x) = q(A) x, \quad (4.27)$$

где в соответствии с (3.19)

$$q(A) = \frac{2k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению, получаемому из (4.26) и (4.27), будет

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + [(T_2 p + 1)k_{о.с}p + k_2]q(A) = 0,$$

или после раскрытия скобок

$$T_1 T_2 p^3 + [T_1 + T_2 + T_2 k_{о.с} q(A)] p^2 + [1 + k_{о.с} q(A)] p + k_2 q(A) = 0. \quad (4.28)$$

Построим области установившихся режимов автоколебаний и устойчивого равновесного состояния на плоскости параметров k_2 и $k_{о.с}$.

Сначала определим область устойчивости для чисто линейной системы, заменяя нелинейную функцию $F(x)$ линейной $k_1 x$. Характеристическое уравнение данной системы при этом, согласно (4.28), будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 + T_2 k_1 k_{о.с}) p^2 + (1 + k_1 k_{о.с}) p + k_1 k_2 = 0. \quad (4.29)$$

Условие устойчивости имеет вид

$$(T_1 + T_2 + T_2 k_1 k_{o.c.})(1 + k_1 k_{o.c.}) - T_1 T_2 k_1 k_2 > 0. \quad (4.30)$$

Соответствующая граница устойчивости изображается на плоскости параметров k_2 , $k_{o.c.}$ в виде параболы ABC (рис. 4.12, а). Во всей

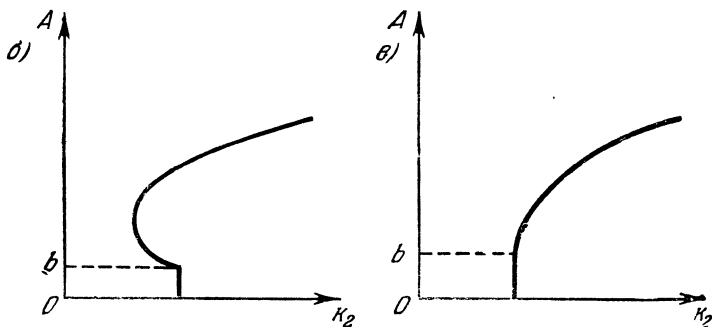
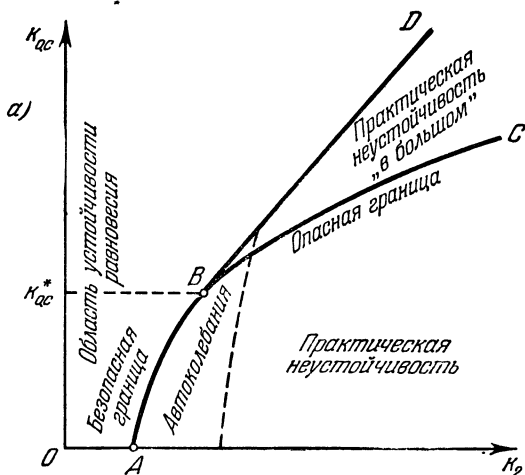


Рис. 4.12.

области, лежащей выше этой параболы, данная линейная система будет устойчивой.

Определим, как повлияет нелинейность $F(x)$ (рис. 4.11) на границу области устойчивости этой системы. Наличие синусоидального периодического решения в гармонически линеаризованной системе ($H_{n-1} = 0$), согласно (4.28), можно определить равенством

$$[T_1 + T_2 + T_2 k_{o.c.} q(A)][1 + k_{o.c.} q(A)] - T_1 T_2 k_2 q(A) = 0,$$

откуда

$$k_2 = \left[\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 q(A)} + \frac{k_{o.c}}{T_1} \right] [1 + k_{o.c} q(A)]. \quad (4.31)$$

Это равенство определяет условие возникновения автоколебаний и зависимость амплитуды от параметров системы.

Частота автоколебаний определяется здесь тем же методом, что и в предыдущих примерах. Если в характеристическом уравнении (4.28) заменить p на $j\Omega$ и мнимую часть приравнять нулю, то

$$\Omega^2 = \frac{1 + k_{o.c} q(A)}{T_1 T_2}.$$

В формуле (4.31) надо полагать $A \geq b$, так как только при этом условии вступает в работу нелинейная часть характеристики. При $A \geq b$ величина $q(A)$ убывает с увеличением A (см. график на рис. 3.7), т. е.

$$k_1 \geq q(A) \geq 0 \quad \text{при} \quad b \leq A \leq \infty. \quad (4.32)$$

Ясно, что равенство (4.31) выполняется при достаточно больших значениях k_2 , причем $k_2 = \infty$ при $q = 0$. Нижний предел значения k_2 не обязательно соответствует значению $q_{\max} = k_1$ (вследствие наличия $q(A)$ во второй скобке формулы (4.31)), т. е. возможно изменение амплитуды периодического решения в зависимости от параметра k_2 с минимумом для k_2 (рис. 4.12, б).

Для определения области автоколебаний надо найти минимум k_2 , при котором еще возможно равенство (4.31). Минимум k_2 определяется из условия равенства нулю производной $\frac{dk_2}{dA}$. Так как производную от k_2 по A можно представить в виде

$$\frac{dk_2}{dA} = \frac{dk_2}{dq} \cdot \frac{dq}{dA},$$

причем $\frac{dq}{dA}$ нигде не обращается в нуль на нелинейном участке статической характеристики с насыщением (рис. 3.7), то для определения области автоколебаний достаточно приравнять нулю производную $\frac{dk_2}{dq}$. В результате из (4.31) получим значение $k_{o.c}$, которое соответствует минимуму k_2 :

$$k'_{o.c} = \frac{1}{q(A)} \sqrt{1 + \frac{T_1}{T_2}}.$$

Поскольку

$$0 \leq q \leq k_1,$$

то

$$\infty \geq k'_{o.c} \geq \frac{1}{k_1} \sqrt{1 + \frac{T_1}{T_2}}.$$

Следовательно, если параметры системы таковы, что

$$k_{o.c} < \frac{1}{k_1} \sqrt{1 + \frac{T_1}{T_2}},$$

то минимума k_2 не существует. Отсюда критическое значение $k_{o.c}^*$ будет

$$k_{o.c}^* = \frac{1}{k_1} \sqrt{1 + \frac{T_1}{T_2}}. \quad (4.33)$$

При $k_{o.c} < k_{o.c}^*$ математического минимума k_2 не существует и, следовательно, область автоколебаний согласно (4.31) и (4.32) будет определяться условием

$$k_2 \geq \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 k_1} + \frac{k_{o.c}}{T_1} \right) (1 + k_{o.c} k_1) \quad \text{при} \quad k_{o.c} < k_{o.c}^*. \quad (4.34)$$

При $k_{o.c} \geq k_{o.c}^*$ минимум k_2 имеет место:

$$k_{2\min} = \frac{k_{o.c}}{T_1} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T_1}{T_2}} \right)^2,$$

и, следовательно, область автоколебаний при этом будет

$$k_2 \geq \frac{k_{o.c}}{T_1} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T_1}{T_2}} \right)^2 \quad \text{при} \quad k_{o.c} \geq k_{o.c}^*. \quad (4.35)$$

Из полученных соотношений (4.34) и (4.35) следует, что граница области автоколебаний при $k_{o.c} \leq k_{o.c}^*$, определяемая формулой (4.34), совпадает с границей устойчивости данной системы как чисто линейной (формула 4.30). На рис. 4.12, а это будет участок AB . Граница же области автоколебаний при $k_{o.c} > k_{o.c}^*$ не совпадает с линейной границей устойчивости. Она, согласно формуле (4.35), имеет вид прямой BD . Следовательно, в данном примере наличие нелинейности типа насыщения сужает область устойчивости системы. Физически это можно объяснить срезанием сигнала обратной связи при больших значениях x_1 , которое вызывается характером нелинейности типа насыщения.

Физические соображения (сравнение с соответствующей линейной системой) говорят о том, что для данной нелинейной системы левее линии ABD будет область устойчивости (при любых начальных условиях). Но нетрудно сделать и приближенную проверку этого факта.

Применение критерия устойчивости Гурвица к уравнению (4.28) дает условие

$$[T_1 + T_2 + T_2 k_{o.c} q(A)][1 + k_{o.c} q(A)] - T_1 T_2 k_2 q(A) > 0.$$

Оно выполняется при любом значении $q(A)$, определяемом неравенством (4.32), т. е. при любом A (любых начальных условиях) здесь имеют место неравенства, обратные формулам (4.34) и (4.35), чем и доказывается устойчивость в области левее ABD .

Поведение системы внутри области автоколебаний исследуется тем же методом, что и в предыдущих примерах. Оно показывает, что в области *CBD* система будет устойчива «в малом» и неустойчива «в большом», а именно: при начальных отклонениях, не выходящих за пределы линейной части характеристики (рис. 4.11) или лишь немного за них выходящих (до определенной границы), в системе будет затухающий переходный процесс, возвращающий ее в состояние равновесия; при больших же начальных отклонениях система приходит к автоколебаниям (жесткое возбуждение) с настолько большой амплитудой, что практически это может означать неустойчивость.

Правее же линии *AB* амплитуда автоколебаний плавно нарастает, начиная с величины $A=b$ (мягкое возбуждение). Она становится слишком большой только правее некоторой пунктирной кривой (рис. 4.12, *a*), за которой систему следует считать практически неустойчивой.

В связи с этим граница устойчивости данной системы, вычисленная для линейного случая, разбивается на два участка: *AB* — безопасная граница, так как даже при переходе через нее система сильно не раскачивается; *BC* — опасная граница, так как, даже не доходя до нее, система может оказаться практически неустойчивой. Для этой части плоскости параметров, т. е. при достаточно больших коэффициентах обратной связи, нельзя пользоваться линейной теорией.

§ 4.5. Система регулирования температуры с балансным реле

Пусть имеется релейная система регулирования температуры, представленная на рис. 4.13 [108]. Поясним принцип ее работы. При изменении регулируемой величины — температуры ϑ регулируемого объекта 1 — изгибается биметаллическая пластина 2. В зависимости от знака отклонения конца биметаллической пластины подключается одна из двух обмоток балансного реле 3. Якорь реле имеет три положения. При подключении одной из обмоток реле двигатель 4 включается на прямое вращение, при включении второй обмотки и выключенной первой — на обратное вращение. При обесточенных обмотках реле якорь занимает нейтральное положение и якорь двигателя замыкается накоротко. При непрерывном изменении x напряжение u на двигателе 4 меняется скачкообразно. Двигатель через редуктор 5 приводит в движение регулирующий орган 6, и последний за счет изменения своего положения ξ воздействует на регулируемый объект. В системе может быть подключена жесткая дополнительная обратная связь 7, обеспечивающая перемещение панели с ламелями. Тогда перемещение конца биметаллической пластины относительно ламелей будет описываться уравнениями:

$$s = x - x_{0.c}, \quad x_{0.c} = k_{0.c}\xi.$$

Выполним исследование приведенной системы вначале при отключенной обратной связи, а затем при наличии обратной связи без учета и при учете временного запаздывания в реле. При исследовании

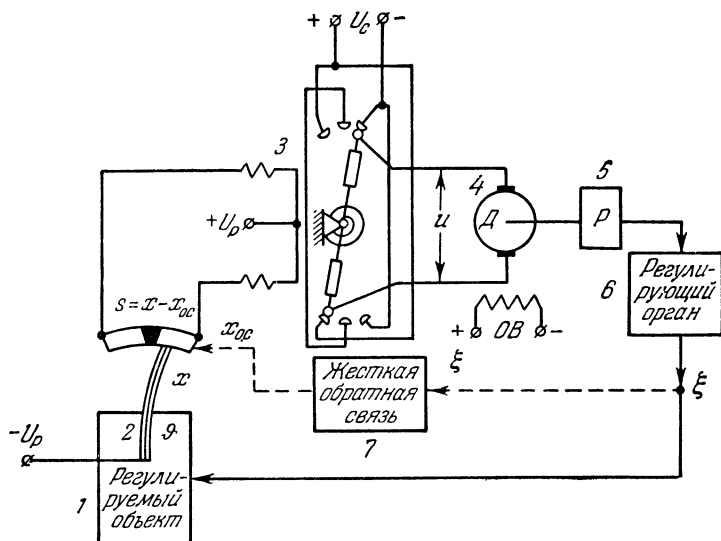


Рис. 4.13.

будем учитывать инерционность регулируемого объекта и электрического привода.

Запишем уравнения звеньев системы.

1. Уравнение регулируемого объекта

$$(T_1 p + 1) \vartheta = -k_1 \xi, \quad (4.36)$$

где T_1 [сек] — постоянная времени объекта, k_1 [град] — передаточное число объекта.

2. Уравнение биметаллической пластины

$$x = k_2 \vartheta, \quad (4.37)$$

где $k_2 \left[\frac{1}{\text{град}} \right]$ — передаточное число биметаллической пластины.

3. Уравнение привода с регулирующим органом

$$(T_2 p + 1) p \xi = k_3 u, \quad (4.38)$$

где T_2 [сек] — электромеханическая постоянная привода, $k_3 \left[\frac{1}{\text{сек} \cdot \text{в}} \right]$ — передаточное число привода.

4. Контактное устройство вместе с балансным реле является нелинейным звеном.

Напряжение u , подаваемое на двигатель, будет нелинейной функцией от перемещения x конца биметаллической пластины относительно панели с ламелями. Эта функция изображена на рис. 4.14.

Объединяя уравнения (4.36) — (4.38), получим уравнение линейной части системы:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x = -k_1 k_2 k_3 u. \quad (4.39)$$

Для нелинейного звена в соответствии с формулой (3.13) для коэффициента гармонической линеаризации напомним следующее выражение:

$$u = F(x) = q(A) x, \quad (4.40)$$

где

$$q(A) = \frac{4U_c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \quad \text{при} \quad A \geq b.$$

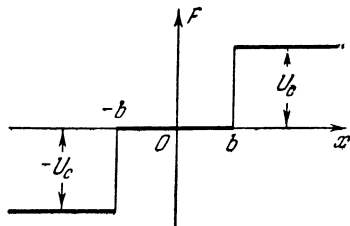


Рис. 4.14.

Подставляя значение u из (4.40) в (4.39)

и обозначая через $k_n = k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{\text{в} \cdot \text{сек}} \right]$

коэффициент усиления линейной части

системы, получим линеаризованное уравнение, описывающее собственное движение системы:

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_n q(A)] x = 0. \quad (4.41)$$

Подставив $p = j\Omega$, из (4.41) получим уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$k_n q(A) - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \quad (4.42)$$

$$1 - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \quad (4.43)$$

Из (4.43) получаем формулу для определения частоты периодического решения:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (4.44)$$

Заменив в (4.42) Ω на ее значение, получим формулу для вычисления значения амплитуды периодического решения в зависимости от параметров системы:

$$k_n q(A) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}. \quad (4.45)$$

Из (4.45) с учетом значения $q(A)$ видно, что периодическое решение возможно при $A \geq b$. Постоянные времени регулируемого объекта T_1 и привода регулирующего органа T_2 одинаково влияют на частоту и амплитуду периодического решения.

При исследовании системы представляет интерес получить решение для регулируемой величины (в данном случае температуры ϑ). Уравнения же составляются для выходной величины линейной части (в данном случае для перемещения x конца биметаллического

чувствительного элемента). Значение частоты периодического решения будет одинаково для любой переменной в замкнутой цепи. Амплитуда интересующей переменной может быть получена путем пересчета амплитуды выходной величины линейной части через передаточную функцию линейных звеньев, разделяющих данные переменные. Для данного случая переход от амплитуды колебаний конца биметаллической пластины A к амплитуде колебаний температуры A_θ в соответствии с формулой (4.37) будет выполняться по соотношению $A = k_2 A_\theta$. Для расчета примем, что $k_2 = 0,01 \text{ рад/град}$ и, следовательно, $A_\theta [град] = 100 A$.

Найдем зависимости амплитуды и частоты периодического решения от параметров k_λ , T_2 , b . Заметим, что U_c и k_λ одинаково влияют на периодическое решение, так как значение U_c определяет усиление нелинейного звена. При изменении каждого параметра будем принимать следующие значения других параметров: $k_\lambda = 0,01 \text{ 1/сек} \cdot \text{в}$, $T_1 = 10 \text{ сек}$, $T_2 = 0,1 \text{ сек}$, $U_c = 25 \text{ в}$, $b = 0,01 \text{ рад}$.

Так как формула (4.45) легче разрешается относительно параметров, чем относительно амплитуды, то целесообразно задавать значения амплитуды и вычислять значения параметров.

Для определения зависимости $A(k_\lambda)$ из (4.45) получим формулу

$$k_\lambda = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 q(A)}. \quad (4.46)$$

Выполняя вычисления по (4.46) при принятых значениях параметров, получим две ветви для амплитуды периодического решения (рис. 4.15, а).

Периодическое решение возможно при значении $k_{\lambda, \text{кр}} \leq k_\lambda \leq \infty$. Из условия равенства нулю производной от k_λ по A получаем:

$$k_{\lambda, \text{кр}} = \frac{\pi b (T_1 + T_2)}{2 U_c T_1 T_2} \quad \text{при} \quad A = \sqrt{2} b, \quad (4.47)$$

что для принятых значений параметров дает $k_{\lambda, \text{кр}} = 0,0063 \text{ [1/в} \cdot \text{сек]}$. При $A \gg b$ $A(k_\lambda)$ изменяется по линейному закону и при $k \rightarrow \infty$ $A \rightarrow \infty$. Ветвь больших амплитуд принадлежит устойчивому периодическому решению, т. е. соответствует автоколебаниям в системе, а ветвь малых амплитуд является границей устойчивости системы «в малом», что условно показано стрелками. Это подтверждается аналитическим критерием устойчивости (4.6). В соответствии с (4.41) имеем:

$$\begin{aligned} X(a, \omega) &= k_\lambda q(a) - (T_1 + T_2) \omega^3, \\ Y(a, \omega) &= \omega - T_1 T_2 \omega^3. \end{aligned}$$

Определяя соответствующие производные с учетом графика (рис. 3.4), получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* &= k_\lambda \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right)^* \begin{cases} > 0 & \text{при } A < \sqrt{2} b, \\ < 0 & \text{при } A > \sqrt{2} b, \end{cases} \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* = 0; \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* &= -2(T_1 + T_2) \Omega < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* = 1 - 3 T_1 T_2 \Omega^2; \end{aligned}$$

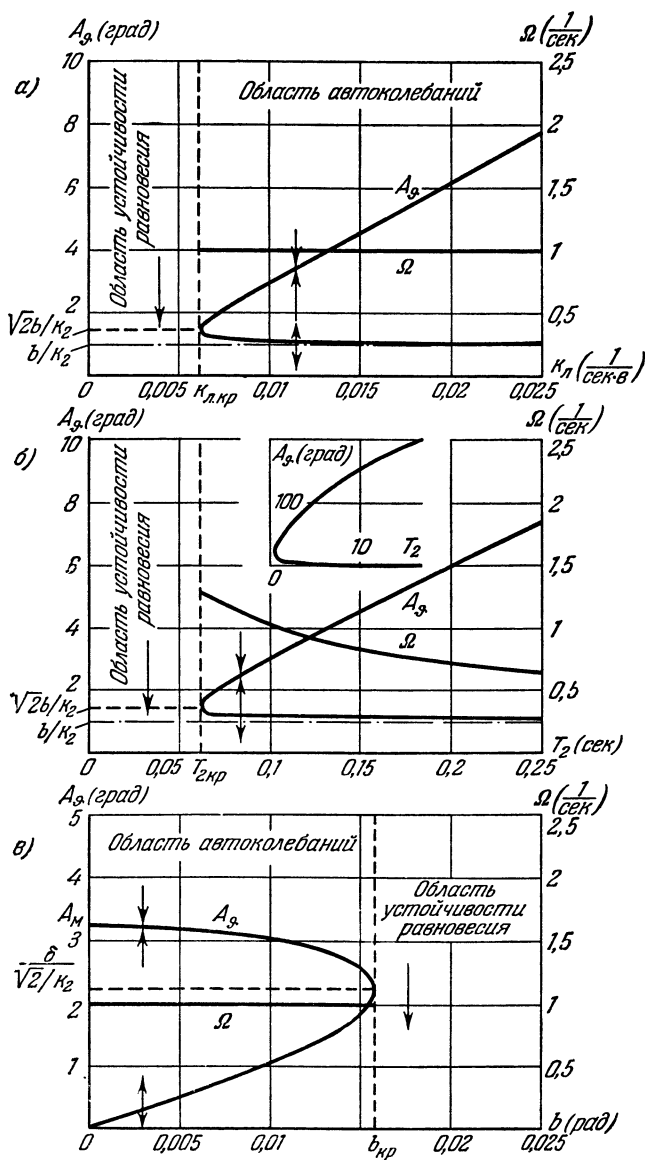


Рис. 4.15.

так как из (4.43) следует, что $\Omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$, то $\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = -2 < 0$. Следовательно, в соответствии с критерием (4.6) имеем:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \begin{cases} > 0 \text{ при } A > \sqrt{2} b, \\ < 0 \text{ при } A < \sqrt{2} b. \end{cases}$$

Переносим полученные результаты поведения системы в области автоколебаний на область меньших значений коэффициента усиления линейной части $0 \leq k_{\text{л}} < k_{\text{л.кр}}$, видим, что движение системы в области отсутствия периодического решения будет устойчивым.

Сравним полученный результат с первым примером исследования системы стабилизации гиromаятника, где роль усиливающего элемента выполнял стабилизирующий двигатель (параметр m_0). Как видно, зона нечувствительности имеет стабилизирующее значение для релейной системы, так как при наличии характеристики с зоной нечувствительности появляется область устойчивости без автоколебаний, причем ширина области устойчивости $0 \leq k_{\text{л}} < k_{\text{л.кр}}$, согласно (4.47), пропорциональна ширине зоны нечувствительности $2b$. Появляющаяся же внутри области автоколебаний область устойчивости «в малом» не имеет практического значения, так как соответствует слишком малым размерам отклонений.

Для определения зависимости $A(T_2)$ из (4.45) получим формулу

$$T_2 = \frac{T_1}{k_{\text{л}} T_1 q(A) - 1}. \quad (4.48)$$

По формулам (4.48) и (4.44) было выполнено построение кривых $A_9(T_2)$ и $\Omega(T_2)$ (рис. 4.15, б). В зависимости от значения параметра T_2 опять имеются две области: область автоколебаний при $T_{2\text{кр}} \leq T_2 \leq \infty$ и область устойчивости при $0 \leq T_2 < T_{2\text{кр}}$. В области автоколебаний имеем две ветви для значений амплитуд периодического решения.

Ветвь с большими амплитудами соответствует автоколебаниям, а ветвь с меньшими амплитудами — границе устойчивости «в малом». При неограниченном возрастании T_2 амплитуда автоколебаний в этом случае стремится к значению

$$A_{\text{м}} = \frac{4k_{\text{л}} U_{\text{с}} T_1}{\pi}.$$

Значение $T_{2\text{кр}}$ определяется из условия равенства нулю производной от T_2 по A :

$$T_{2\text{кр}} = \frac{\pi T_1 b}{2k_{\text{л}} U T_1 - \pi b} \quad \text{при } A = \sqrt{2} b$$

и при принятых значениях параметров составляет $T_{2\text{кр}} = 0,063 \text{ сек.}$

Для построения кривой зависимости амплитуды периодического решения от изменения зоны нечувствительности из (4.45) получим формулу

$$b = \frac{A}{\delta} \sqrt{\delta^2 - A^2}, \quad (4.49)$$

где

$$\delta = \frac{4k_d U_c T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)}.$$

Кривая $A_\delta(b)$ представлена на рис. 4.15, *в*. Ветвь с большими значениями амплитуд соответствует автоколебаниям, а ветвь с меньшими значениями амплитуд является границей устойчивости «в малом». Из (4.49) при условии $b=0$ получим максимальное значение амплитуды автоколебаний $A_m = \delta$ (для данного примера $A_m = 3,16^\circ\text{C}$). Из условия равенства нулю производной от b по A получим

$$b_{\text{кр}} = \frac{\delta}{2}.$$

Полученные кривые изменения частоты и амплитуды автоколебаний от параметров системы позволяют выбирать параметры системы из условия получения желаемого установившегося режима.

Из проделанного исследования видно, что уменьшение амплитуды автоколебаний и подавление автоколебаний возможны за счет уменьшения коэффициента усиления системы, уменьшения постоянных времени объекта и привода регулирующего органа, а также за счет увеличения зоны нечувствительности релейного элемента. Повышение частоты автоколебаний возможно только за счет уменьшения постоянных времени объекта и привода регулирующего органа.

Отметим, что учет инерционности регулятора в данном случае имеет принципиальное значение. Хотя постоянная времени объекта T_1 больше постоянной времени привода T_2 в сто раз ($T_1 = 10 \text{ сек}$, $T_2 = 0,1 \text{ сек}$), пренебречь T_2 по сравнению с T_1 нельзя. Такое пренебрежение свелось бы к исследованию системы по уравнению второго порядка, что внесло бы принципиальные качественные отличия по сравнению с исследованием по уравнению третьего порядка. Действительно, при $T_2 = 0$ условие $Y(A, \Omega) = 0$ запишется в виде $\Omega = 0$, т. е. в этом случае исключается возможность периодического решения при любых параметрах системы. В действительности же, как видно из проведенного исследования, область автоколебаний превалирует над областью устойчивости без автоколебаний.

Для принятых при исследовании значений параметров получаем, что система будет работать с автоколебательным установившимся режимом при частоте $\Omega = 1 \text{ сек}^{-1}$ и амплитуде колебаний температуры $A_\delta = 3^\circ\text{C}$. Такой режим для многих тепловых объектов оказался бы приемлемым. Однако следует иметь в виду, что он получен за счет малого коэффициента усиления. Уменьшение коэффициента усиления снижает быстродействие системы и увеличивает установив-

шую ошибку. Такая система неспособна будет работать при больших скоростях изменения возмущающего воздействия. Для увеличения быстродействия системы необходимо увеличить коэффициент усиления, а это вызовет увеличение амплитуды колебаний температуры, что во многих случаях недопустимо.

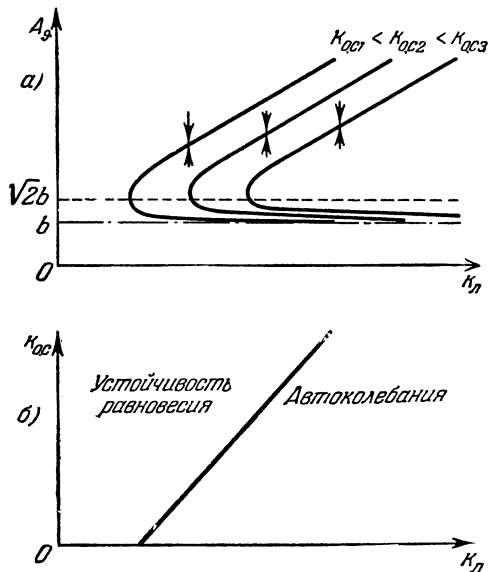


Рис. 4.16.

Для того чтобы добиться приемлемого автоколебательного режима при большом коэффициенте усиления, в подобных системах применяется жесткая обратная связь.

Выполним анализ установившихся режимов в системе при наличии жесткой обратной связи. Уравнение системы в этом случае для переменной s (перемещение биметаллической пластины относительно ламелей) запишется в виде

$$\{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + [1 + k_3 k_{o.c} T_1 q(A)] p + (k_a + k_3 k_{o.c}) q(A)\} s = 0, \quad (4.50)$$

где $k_{o.c}$ — передаточное число звена обратной связи. Обозначения других параметров оставлены прежними.

В соответствии с (4.50) после подстановки $p = j\Omega$ получим два уравнения для нахождения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\begin{aligned} (k_a + k_3 k_{o.c}) q(A) - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 + k_3 k_{o.c} T_1 q(A) - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned}$$

Разрешая второе уравнение относительно Ω^2 , получим:

$$\Omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} + \frac{k_3 k_{o.c} q(A)}{T_2}.$$

Как видно, дополнительная обратная связь увеличивает частоту периодического решения (без обратной связи $\Omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$). Подставив значение Ω^2 в первое уравнение, получим соотношение для определения амплитуды периодического решения в зависимости от параметров системы:

$$\left[k_a + k_3 k_{o.c} \left(1 - \frac{T_1 + T_2}{T_2} \right) \right] q(A) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Построим кривые $A_\Phi = A_\Phi(k_d)$ и $\Omega = \Omega(k_d)$ при наличии обратной связи. Разрешая последнее уравнение относительно k_d , получим:

$$k_d = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 q(A)} + k_3 k_{o.c} \frac{T_1}{T_2}.$$

Сравнивая полученный результат с (4.46), видим, что k_d , в отличие от случая отсутствия обратной связи, увеличивается на не зависящую от амплитуды величину

$$k'_d = k_3 k_{o.c} \frac{T_1}{T_2}$$

и, следовательно, кривая амплитуд периодического решения $A_\Phi(k_d)$ будет смещаться вправо на величину k'_d (рис. 4.16, а). Таким образом, обратная связь расширяет область устойчивости за счет смещения области автоколебаний пропорционально коэффициенту обратной связи $k_{o.c}$ (рис. 4.16, б), причем эффект воздействия обратной связи в зависимости от соотношения постоянных будет тем большим, чем больше постоянная объекта по сравнению с постоянной привода регулирующего органа.

§ 4.6. Система регулирования температуры с поляризованным реле

Рассмотрим релейную систему регулирования температуры с поляризованным реле. Принципиальная схема системы изображена на рис. 4.17. Отклонение регулируемой величины Φ измеряется с помощью

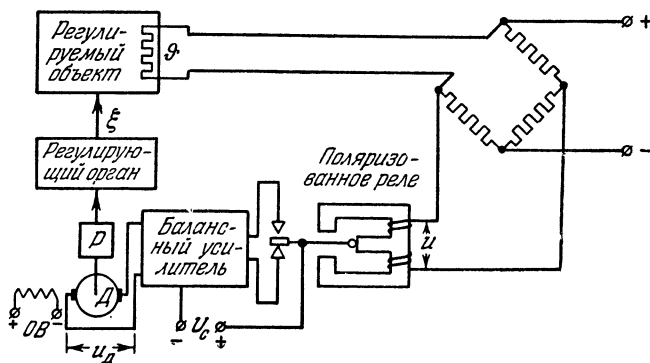


Рис. 4.17.

термометра сопротивления, включенного в мостовую схему. Напряжение u с диагонали моста подается на управляющую обмотку двухпозиционного поляризованного реле. Реле через балансный усилитель управляет двигателем $Д$, который через редуктор $Р$ приводит в

движение регулирующий орган. Регулирующий орган воздействует на объект за счет изменения величины регулирующего воздействия ξ .

Запишем уравнения звеньев в отклонениях.

1. Уравнение регулируемого объекта:

$$(T_1 p + 1) \vartheta = -k_1 \xi,$$

где T_1 [сек] — постоянная времени объекта, k_1 — передаточное число объекта.

2. Уравнение чувствительного элемента — моста с термометром сопротивления:

$$u = k_2 \vartheta,$$

где k_2 [в/град] — передаточное число чувствительного элемента.

3. Уравнение привода вместе с регулирующим органом:

$$(T_2 p + 1) p \xi = k_3 u_d,$$

где T_2 [сек] — электрохимическая постоянная времени привода, $k_3 \left[\frac{1}{\text{в} \cdot \text{сек}} \right]$ — передаточное число привода, u_d [в] — напряжение, прикладываемое к якорию двигателя.

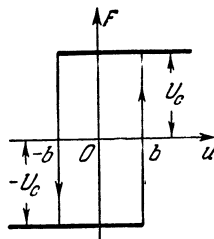


Рис. 4.18.

4. Поляризованное реле совместно с усилителем является нелинейным звеном с входной величиной u и выходной u_d , зависящей нелинейным образом от управляющего напряжения реле:

$$u_d = F(u).$$

Для двухпозиционного поляризованного реле нелинейная функция $F(u)$ изображается в виде релейной гистерезисной статической характеристики (рис. 4.18).

Объединяя уравнения первых трех звеньев, получим уравнение линейной части системы:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p u = -k_d u_d,$$

где

$$k_d = k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{\text{сек}} \right].$$

Для нелинейного звена запишем гармонически линеаризованное выражение

$$u_d = F(u) = \left[q(A) + \frac{q'(A)}{\Omega} p \right] u,$$

где в соответствии с формулами (3.9) и (3.10) коэффициенты гармонической линеаризации имеют значения:

$$q(a) = \frac{4U_c}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2}, \quad q'(A) = -\frac{4U_c b}{\pi A^2} \quad \text{при} \quad A \geq b.$$

Объединяя уравнение линейной части системы и формулы для гармонически линеаризованного нелинейного звена, получим линеаризованное уравнение, описывающее собственное движение системы:

$$\{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + [1 + \frac{k_n q'(A)}{\Omega}] p + k_n q(A)\} u = 0. \quad (4.51)$$

Подставив в (4.51) $p = j\Omega$, запишем два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\frac{4k_n U_c}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2} - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \quad (4.52)$$

$$\Omega - \frac{4k_n U_c b}{\pi A^2} - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \quad (4.53)$$

По уравнениям (4.52) и (4.53) построим кривые зависимости амплитуды и частоты колебаний температуры от параметра k_n . Исключая

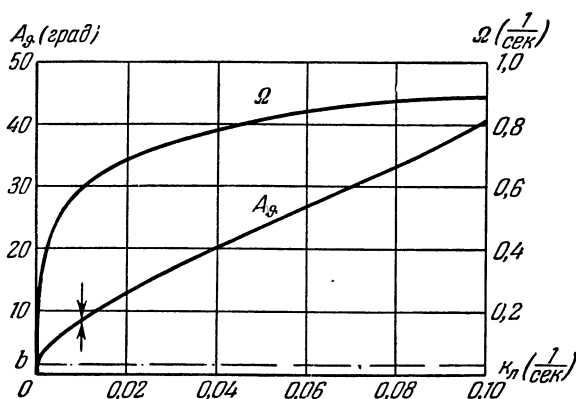


Рис. 4.19.

из (4.52) и (4.53) k_n , получим формулу для определения амплитуды периодического решения по заданным параметрам системы и частоте периодического решения:

$$A^2 = \frac{(1 + T_1^2 \Omega^2)(1 + T_2^2 \Omega^2)}{(1 - T_1 T_2 \Omega^2)^2} b^2. \quad (4.54)$$

Исключая из тех же уравнений A^2 , получим формулу для определения k_n через параметры и частоту периодического решения:

$$k_n = \frac{\pi b \Omega (1 + T_1^2 \Omega^2)(1 + T_2^2 \Omega^2)}{4 U_c (1 - T_1 T_2 \Omega^2)}. \quad (4.55)$$

Построенные по формулам (4.54) и (4.55) зависимости $A_0 = A_\phi(k_n)$ и $\Omega = \Omega(k_n)$ представлены на рис. 4.19. При построении принимались постоянные значения параметров:

$$T_1 = 10 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,1 \text{ сек}, \quad U_c = 25 \text{ в}, \quad b = 0,01 \text{ в}.$$

Значения амплитуд колебания напряжения на обмотке реле пересчитывались в амплитуды колебаний температуры при $k_2 = 0,01$ в/град, т. е. $A_0 = 100A$. Из (4.54) и (4.55) видно, что при $k_n = 0$ $A = b$, $\Omega = 0$ и при $k_n = \infty$ $A = \infty$, $\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$.

Проверку на устойчивость периодического решения выполним в данном примере методом осреднения периодических коэффициентов (см. § 2.4).

При исследовании устойчивости методом осреднения периодических коэффициентов рассматривают дифференциальное уравнение системы в малых отклонениях от искомого периодического решения. Уравнение нелинейного звена в этом случае представляет линейную зависимость выходной величины от входной с периодически меняющимися коэффициентами при входной величине и скорости входной величины нелинейного звена. В простейшем случае, когда нелинейная функция зависит только от входной величины, как в настоящем примере $u_n = F(u)$, будем иметь в малых отклонениях зависимость

$$\Delta F(u) = \left(\frac{dF}{du} \right)^* \Delta u,$$

где $\left(\frac{dF}{du} \right)^*$ и будет периодически меняющимся коэффициентом. Осреднение этого коэффициента выполняется за период по формуле

$$\kappa(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dF}{du} \right)^* d\psi, \quad \psi = \Omega t. \quad (4.56)$$

Звездочка после скобок означает, что после взятия производной подставляется значение u в периодическом виде:

$$u = A \sin \Omega t.$$

После осреднения периодически меняющихся коэффициентов нелинейной функции полное уравнение системы в отклонениях от установившегося колебательного режима будет линейным с постоянными коэффициентами. К нему можно применить любой обычный линейный критерий устойчивости, выполнение которого и будет определять устойчивость периодического решения.

Для вычисления коэффициента $\kappa(A)$, согласно (4.56), нужно знать производную от $F(u)$ по u , которая в нашем случае обращается в бесконечность при $u = b$, когда $\frac{du}{dt} > 0$, и при $u = -b$, когда $\frac{du}{dt} < 0$. Чтобы избежать этого, заменим заданную характеристику (рис. 4.18) новой (рис. 4.20, а), из которой заданная получается предельным переходом $h \rightarrow 0^1$.

¹⁾ Другой способ был указан в § 2.4.

Для характеристики рис. 4.20, а при изменении величины u по закону $u = A \sin \Omega t$ (рис. 4.20, б) производная $\frac{dF(u)}{du}$ принимает значения, показанные на рис. 4.20, в, где

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{b+h}{A}.$$

Осредненное ее значение согласно рис. 4.20, в при предельном переходе к заданной характеристике ($h \rightarrow 0$) будет

$$\begin{aligned} \kappa(A) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \frac{2U_c}{h} (\psi_2 - \psi_1)}{2\pi} = \\ &= \lim_{\psi_2 \rightarrow \psi_1} \frac{2U_c (\psi_2 - \psi_1)}{\pi A (\sin \psi_2 - \sin \psi_1)}, \end{aligned}$$

так как $h = A \sin \psi_2 - A \sin \psi_1$.

Обозначив $\psi_2 = \psi_1 + \Delta\psi$ и взяв для раскрытия неопределенности производные от числителя и знаменателя по $\Delta\psi$, получим:

$$\begin{aligned} \kappa(A) &= \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{2U_c}{\pi A \cos(\psi_1 + \Delta\psi)} = \\ &= \frac{2U_c}{\pi \sqrt{A^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, нелинейную функцию в отклонениях от установившегося состояния при осреднении периодических коэффициентов можно записать в виде

$$\Delta u_d = \Delta F(u) = \kappa(A) \Delta n = \frac{2U_c}{\pi \sqrt{A^2 - b^2}} \Delta u. \quad (4.57)$$

Тогда с учетом (4.57) и уравнения линейной части (4.39) характеристическое уравнение для определения устойчивости периодического решения запишем в виде

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + \frac{2U_c k_n}{\pi \sqrt{A^2 - b^2}} = 0. \quad (4.58)$$

В соответствии с критерием устойчивости Гурвица из (4.58) следует, что для устойчивости полученного периодического решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$T_1 + T_2 > \frac{2U_c k_n T_1 T_2}{\pi \sqrt{A^2 - b^2}}. \quad (4.59)$$

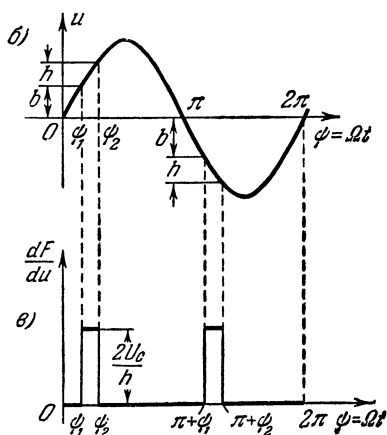
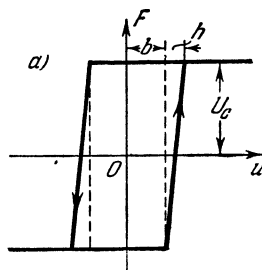


Рис. 4.20.

Подставляя в (4.59) значения A^2 и k_d из (4.54) и (4.55) получим:

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} > \frac{(1 + T_1^2 \Omega^2)(1 + T_2^2 \Omega^2)}{2(T_1 + T_2)}. \quad (4.60)$$

Как было показано, частота периодического решения изменяется в пределах

$$0 < \Omega < \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

при $0 < k_d < \infty$. Подставив в (4.60) максимальное возможное значение частоты, убеждаемся, что даже в этом случае неравенство (4.60) выполняется. Следовательно, полученное периодическое решение устойчиво. Система будет работать с автоколебательным установившимся режимом при любом значении k_d .

В данном примере построены только кривые $A_\Phi(k_d)$ и $\Omega(k_d)$ (рис. 4.19). Такие же кривые для параметров T_2 и b могут быть построены аналогично тому, как это делалось в предыдущих примерах.

§ 4.7. Учет временного запаздывания в релейной системе

В рассмотренных примерах систем регулирования температуры в нелинейных элементах учитывалось координатное запаздывание, обусловленное зоной нечувствительности и наличием петли гистерезиса в релейных характеристиках. В системах с релейными элементами, кроме координатного запаздывания, имеется и чисто временное запаздывание. Когда конец биметаллической пластины (рис. 4.13) попадает на соответствующую ламель, то ток в управляющей цепи реле нарастает не мгновенно, а по экспоненте (рис. 4.21, а)

$$i_p = \frac{U_p}{R} (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad T = \frac{L}{R},$$

где U_p — напряжение источника, питающего обмотки реле, L , R — индуктивность и сопротивление управляющей обмотки реле. Запаздывание в этом случае будет определяться, во-первых, временем нарастания тока в управляющей обмотке реле до тока срабатывания:

$$\tau'_1 = T \ln \frac{U_p}{U_p - R I_{cp}}, \quad \text{где } I_{cp} \text{ — ток срабатывания реле.}$$

Во-вторых, к запаздыванию τ'_1 добавится запаздывание, равное времени движения якоря реле τ''_1 . Полное запаздывание при срабатывании будет

$$\tau_1 = \tau'_1 + \tau''_1.$$

При обратном движении конца биметаллической пластины реле выключится также не мгновенно, а через промежуток времени τ_2 ,

когда рабочий ток реле уменьшится до тока отпускания. При этом ток i_p в управляющей цепи падает по экспоненте (рис. 4.21, б)

$$i_p = \frac{U_p}{R} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Отсюда получаем:

$$\tau_2 = T \ln \frac{U_p}{I_{\text{отп}} R},$$

где $I_{\text{отп}}$ — ток отпускания реле.

Величины запаздывания в срабатывании и отпускании реле τ_1 и τ_2 являются вполне определенными и неизменными в процессе работы

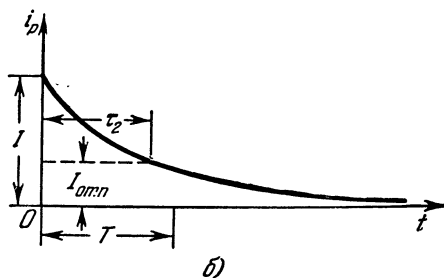
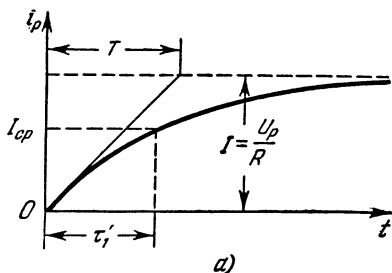


Рис. 4.21.

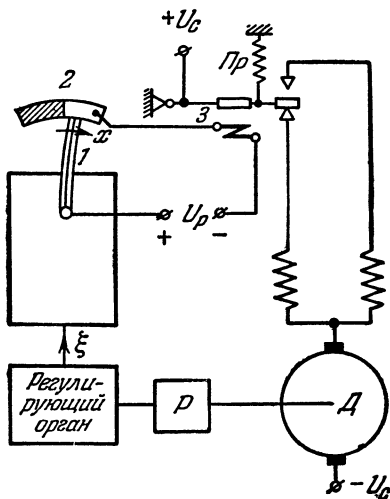


Рис. 4.22.

данной системы. Запаздывания же, обусловленные зоной нечувствительности и петлей гистерезиса, связаны с значением входной величины — координаты. Они будут вызывать временное запаздывание, зависящее от скорости протекания процесса в системе. Поэтому запаздывания τ_1 и τ_2 часто называют чисто временными, подчеркивая тем самым независимость их от скорости протекания процесса, а запаздывание, обусловленное зоной нечувствительности и петлей гистерезиса, называют координатным.

Координатное запаздывание, обусловленное зоной нечувствительности, в системе регулирования температуры с биметаллической пластиной можно устранить, если применить схему, приведенную на рис. 4.22. В этом случае система настраивается так, чтобы конец

биметаллической пластины 1 при номинальной температуре был на границе между изоляционной частью и проводящей частью пластины 2. При малейшем перемещении конца биметаллической пластины в сторону изоляционной части пластины 2 реле 3 обесточивается и средний контакт под действием пружины замыкается с верхним и подклю-

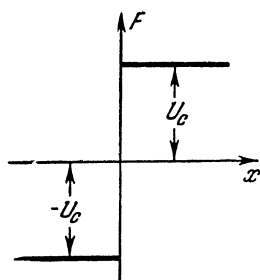


Рис. 4.23.

чает двигатель на вращение в требуемую сторону. При переходе биметаллической пластины на проводящую часть средний контакт реле замыкается с нижним и двигатель переключается на вращение в обратную сторону. Из физических соображений очевидно, что система будет работать в режиме автоколебаний.

В рассматриваемом случае статическая характеристика нелинейного звена $u_d = F(x)$ будет идеальной релейной (рис. 4.23).

Если не учитывать чисто временного запаздывания, то в соответствии с уравнениями (4.52) и (4.53) при $b = 0$ получим уравнения для определения амплитуды и частоты автоколебаний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4k_d U_c}{\pi A} - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

Из второго уравнения (4.61) получим формулу для определения частоты автоколебаний:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad (4.62)$$

а из первого с учетом (4.62) — формулу для определения амплитуды автоколебаний через параметры системы:

$$A = \frac{4k_d U_c T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)}. \quad (4.63)$$

Как видно из (4.62) и (4.63) при изменении k_d частота автоколебаний остается постоянной, а амплитуда меняется пропорционально коэффициенту усиления. Это изображено на графиках рис. 4.24, а для случая ранее принятых значений параметров и $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Амплитуда колебаний конца биметаллической пластины пересчитана в амплитуды колебаний температуры A_θ .

Учтем в данной системе постоянное по времени запаздывание τ . Тогда приближенное уравнение нелинейного звена после гармонической линеаризации и учета запаздывания запишется в виде

$$u_d = \frac{4U_c}{\pi A} e^{-\tau p} x. \quad (4.64)$$

Характеристическое уравнение в соответствии с (4.51) и с учетом (4.64) будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + \frac{4U_c k_L}{\pi A} e^{-\tau p} = 0. \quad (4.65)$$

Подставив сюда $p = j\Omega$ и учитывая, что

$$e^{-j\tau\Omega} = \cos \tau\Omega - j \sin \tau\Omega,$$

получим уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4U_c k_L}{\pi A} \cos \tau\Omega - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ -\frac{4U_c k_L}{\pi A} \sin \tau\Omega + \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

Из уравнений (4.66) после исключения $\frac{4U_c k_L}{\pi A}$ получим формулу, связывающую частоту периодического решения с параметрами системы и запаздыванием:

$$(T_1 + T_2) \Omega \operatorname{tg} \tau\Omega = 1 - T_1 T_2 \Omega^2. \quad (4.67)$$

Учитывая, что $\sin^2 \tau\Omega + \cos^2 \tau\Omega = 1$, из тех же уравнений получим формулу для вычисления амплитуды периодического решения:

$$A = \frac{4U_c k_L}{\pi \Omega \sqrt{1 + (T_1^2 + T_2^2) \Omega^2 + T_1^2 T_2^2 \Omega^4}}. \quad (4.68)$$

Уравнение (4.67) трансцендентно относительно Ω . Поэтому значение Ω можно определить лишь графическим решением. Однако так как временное запаздывание практически мало (сотые доли секунды) и ожидаемая частота Ω также мала (единицы 1/сек), то $\operatorname{tg} \tau\Omega \approx \tau\Omega$. Тогда из (4.67) получим приближенную формулу для определения частоты при малых значениях $\tau\Omega$:

$$\Omega \approx \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 + \tau(T_1 + T_2)}}. \quad (4.69)$$

Как видно, наличие временного запаздывания вызывает уменьшение частоты периодического решения.

Подставляя значение Ω из (4.69) в (4.68) и пренебрегая после ряда преобразований величиной τ^2 по сравнению с $T_1 T_2 + \tau(T_1 + T_2)$, получим приближенную формулу для определения амплитуды периодического решения:

$$A = \frac{4U_c k_L}{\pi} \left(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} + \tau \right). \quad (4.70)$$

Из (4.70) видно, что временное запаздывание увеличивает амплитуду периодического решения. Графики $A_\Phi(k_\lambda)$ и $\Omega(k_\lambda)$ при различных τ

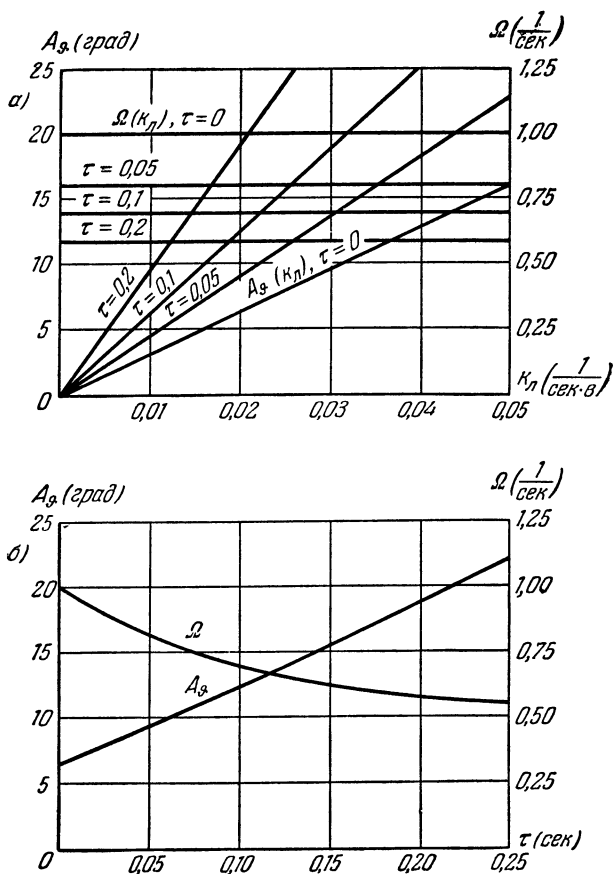


Рис. 4.24.

и $A_\Phi(\tau)$, $\Omega(\tau)$ представлены на рис. 4.24, а и б. При построении графиков принимались прежние значения параметров и $k_\lambda = 0,02 \left[\frac{1}{\text{сек} \cdot \text{в}} \right]$.

§ 4.8. Следящая система второго порядка с сухим трением и люфтом

Учет сухого трения и люфта представляет практический интерес, так как такого вида нелинейности часто встречаются в автоматических системах с механическими и электромеханическими звеньями.

Если в качестве обрабатывающего звена следящей системы применяется электрический двигатель, то при точном исследовании необходимо учитывать сухое трение и вязкое трение. Сухое трение можно считать не зависящим от величины скорости и изменяющим направление с изменением направления скорости. Вязкое трение в общем случае нелинейно зависит от скорости. При малых скоростях вязкое трение принимают пропорциональным первой степени скорости. С увеличением скорости вязкое трение из линейного переходит в трение, пропорциональное высшим степеням скорости.

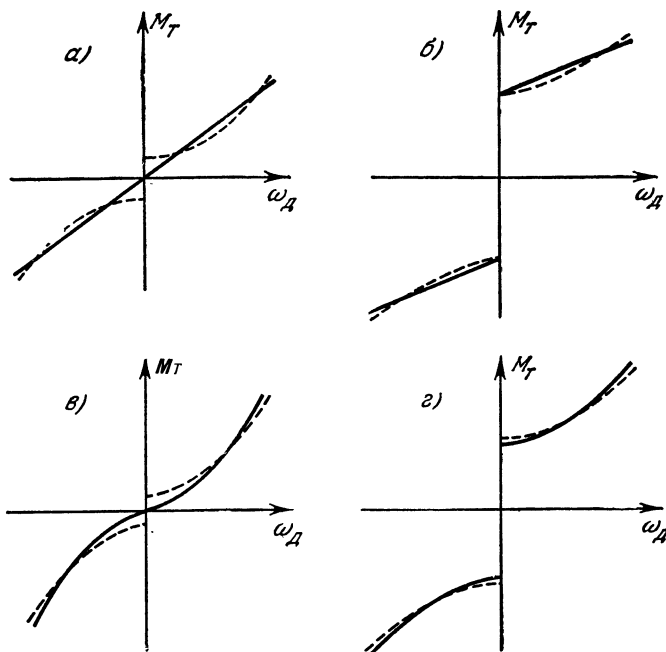


Рис. 4.25.

Для того чтобы правильно решить, по какой зависимости от скорости учитывать трение, необходимо для данного звена экспериментально снять характеристику зависимости момента или сил трения от скорости при изменении скорости в пределах, которые ожидаются при работе системы. Если сухое трение мало, а характеристика момента от сил вязкого трения незначительно отличается от линейной, то можно приближенно все суммарное трение учитывать как линейное (рис. 4.25, а).

Если сухое трение имеет значительные величины, а вязкое трение изменяется по зависимости, близкой к линейной, то следует в дополнение к линейному трению учитывать сухое трение (рис. 4.25, б).

Система в этом случае исследуется как нелинейная. Также возможен учет только квадратичного трения (рис. 4.25, в) и сухого и квадратичного трения одновременно (рис. 4.45, з), а также другие случаи.

Передача движения от обрабатывающего двигателя к объекту и обратной связи в следящих системах угловых положений производится,

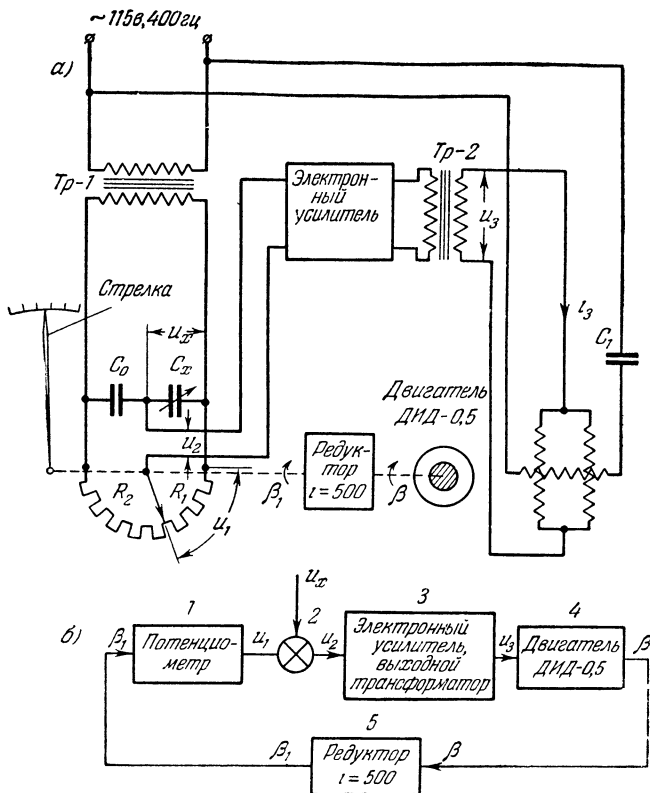


Рис. 4.26.

как правило, через редуктор. Шестеренчатый или червячный редуктор имеет люфт. Люфт достигает особенно больших величин в обычном шестеренчатом редукторе при большом коэффициенте редукции (несколько пар шестерен). Поэтому исследование следящей системы как нелинейной с учетом люфта дает более полный результат.

Возьмем в качестве примера следящую систему топливомера [121].

Топливомер предназначен для непрерывного измерения объема жидкого топлива в баках, питающих тепловой двигатель.

Принципиальная схема топливомера представлена на рис. 4.26, а. Датчиком топливомера является конденсатор C_x , выполненный в виде

коаксиальных металлических цилиндров, которые помещаются внутрь бака с топливом. Диэлектрическая проницаемость топлива отлична от проницаемости воздуха. Поэтому в процессе выработки топлива в зависимости от его уровня будет изменяться и величина емкости C_x датчика.

Емкость C_x включается в мостовую схему переменного тока. Другими плечами моста являются постоянная емкость C_0 и потенциометр с сопротивлениями плеч R_1 и R_2 , изменяющимися при перемещении ползунка. Ползунок перемещается отработывающим двигателем через редуктор. На одной оси с ползунком крепится стрелка топливомера. Мост питается переменным напряжением 115 в, $f = 400$ гц через трансформатор $Tr-1$.

При изменении уровня топлива будет изменяться величина емкости C_x и нарушаться равновесие моста. Снимаемое напряжение u_2 с диагонали моста подается в электронный усилитель. Напряжение u_3 , снимаемое с выхода электронного усилителя, подается через трансформатор $Tr-2$ на управляющую обмотку двухфазного индукционного двигателя ДИД-0,5. Вторая обмотка двигателя через фазосдвигающую емкость C_1 питается от сети. Таким образом, при наличии напряжения u_3 на управляющей обмотке двигателя последний приходит во вращение и через редуктор передает движение на ползунок потенциометра и стрелку указателя топливомера. Двигатель вращается до тех пор, пока ползунок не переместится на угол, при котором мост уравнивается и снимаемое напряжение с диагонали моста u_2 станет равным нулю. Таким образом, топливомер работает по принципу следящей системы с задаваемой величиной u_x и отработываемой величиной β_1 .

При эксплуатации топливомеров было замечено, что стрелка указателя в некоторых случаях приходит в колебания со значительной амплитудой (единицы градусов), что затрудняет отсчет показаний. Возникновение автоколебаний в системе свидетельствует о существенном влиянии нелинейностей.

Автоколебательный режим работы подобных приборов не является вредным. При работе таких устройств в режиме автоколебаний значительно уменьшается сухое трение и, следовательно, повышается точность работы прибора, так как зона нечувствительности уменьшается. Однако автоколебательный режим работы будет приемлем только тогда, когда амплитуда колебаний будет малой, почти незаметной на глаз (доли градуса).

Следовательно, над данной системой необходимо провести исследование при учете нелинейностей с тем, чтобы выявить возможности получения автоколебательного режима с приемлемыми амплитудой и частотой. Если указанный режим работы невозможен, то необходимо дать рекомендации для устранения автоколебаний, т. е. для перевода работы прибора в устойчивый режим без наличия автоколебаний. Проведение такого анализа представляет интерес и потому, что аналогично работают и другие дистанционные приборы.

В данной системе необходимо учесть две нелинейности: 1) сухое трение в отрабатывающем двигателе и редукторе; 2) люфт, обусловленный наличием шестеренчатого редуктора.

Влияние нелинейности, связанной с насыщением усилителя, практически исключается, так как работа системы происходит при малых сигналах на входе усилителя.

Пользуясь приближенным методом гармонической линеаризации нелинейностей, будем определять области изменения параметров, внутри которых возникают автоколебания и области устойчивости без автоколебаний, а также будем определять влияние каждого параметра на изменение амплитуды и частоты автоколебаний.

В процессе исследования будем полагать, что изменение емкости C_x и напряжения u_x при выработке горючего происходит несравнимо медленнее, чем протекает процесс отработки в следящей системе. При работе моста во всем диапазоне изменения сопротивлений R_1 и R_2 не будем считаться с изменением его чувствительности и, следовательно, изменением коэффициента усиления, а учтем это в дальнейшем при определении влияния коэффициента усиления на частоту и амплитуду автоколебаний системы, т. е. будем исследовать следящую систему при постоянном значении задающего воздействия как систему регулирования положения выходного вала редуктора.

Структурная схема следящей системы представлена на рис. 4.26, б. Звенья 1, 2, 3, 4 являются линейными. Звено 5 является нелинейным, так как к редуктору можно отнести как люфт, так и сухое трение.

Электронный усилитель вместе с выходным трансформатором $Tp-2$ можно рассматривать как идеальное звено. При изменении величины переменного напряжения u_3 на входе электронного усилителя выходное напряжение u_3 в переходном режиме будет иметь две составляющие: вынужденную и свободную. Вынужденная составляющая напряжения u_3 передается практически безынерционно при изменении входного напряжения и, следовательно, не будет запаздывания переменной составляющей тока управляющей цепи двигателя; также безынерционно будет возникать момент на роторе двигателя. Свободная же составляющая напряжения u_3 и тока i_3 не может существенно повлиять на момент двигателя.

Составим уравнения для линейных звеньев системы, а нелинейные статические зависимости введем как некоторые нелинейные функции.

1. Уравнение потенциометра:

$$u_1 = k_1 \beta_1, \quad (4.71)$$

где u_1 [в] — напряжение, снимаемое с сопротивления R_1 , β_1 — угол поворота ползунка потенциометра, k_1 [в] — передаточное число первого звена.

2. Уравнение датчика рассогласований (моста):

$$u_2 = k_2 (u_x - u_1). \quad (4.72)$$

При исследовании собственного движения системы ($u_x = \text{const}$) уравнение (4.72) примет вид

$$u_2 = -k_2 u_1, \quad (4.73)$$

где $u_2 [\text{в}]$ — напряжение, подаваемое на вход электронного усилителя, k_2 — передаточное число моста.

3. Уравнение электронного усилителя вместе с выходным трансформатором:

$$u_3 = k_3 u_2, \quad (4.74)$$

где $u_3 [\text{в}]$ — напряжение, приложенное к управляющей обмотке двигателя, k_3 — коэффициент усиления электронного усилителя и трансформатора.

4. Уравнение движения ротора двигателя при учете сухого трения и трения, пропорционального первой степени скорости, будет

$$J p^2 \beta = M_{\text{д}} - k_{\beta} p \beta - M_{\text{т}}, \quad (4.75)$$

где β — угол поворота ротора двигателя, $J [\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2]$ — момент инерции всех вращающихся от двигателя элементов, приведенный к валу двигателя, $M_{\text{д}} [\text{г} \cdot \text{см}]$ — момент, развиваемый двигателем, $M_{\text{т}} [\text{г} \cdot \text{см}]$ — момент сухого трения, $k_{\beta} [\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}]$ — коэффициент демпфирования.

В двухфазных индукционных двигателях момент прямо пропорционален напряжению, приложенному к управляющей обмотке. При работе двигателя момент изменяется в зависимости от скорости вращения. Механические характеристики двухфазного индукционного двигателя можно приближенно представить в виде прямых (рис. 4.27). В соответствии с

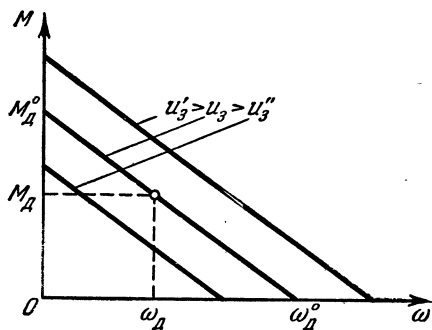


Рис. 4.27.

рис. 4.27 момент двигателя выразим через управляющее напряжение u_3 , номинальный момент в тормозном режиме M_d^0 и номинальную скорость холостого хода ω_d^0 :

$$M_{\text{д}} = k'_d u_3 - k''_d \omega_{\text{д}}, \quad (4.76)$$

где $M_{\text{д}} [\text{г} \cdot \text{см}]$ — момент, развиваемый двигателем при данном управляющем напряжении u_3 и угловой скорости $\omega_{\text{д}}$, $k'_d [\text{г} \cdot \text{см} / \text{в}]$ — коэффициент изменения момента двигателя от управляющего напряжения,

$k''_d = \frac{M_d^0}{\omega_d^0} [\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}]$ — коэффициент изменения момента двигателя от угловой скорости.

Момент от сил сухого трения учтем в виде нелинейной функции от скорости вращения:

$$M_{\tau} = F_1(p\beta). \quad (4.77)$$

С учетом (4.76) и (4.77) уравнение (4.75) переписывается в виде

$$Jp^2\beta + k_d'p\beta + k_\beta p\beta = k_d'u_3 - F_1(p\beta). \quad (4.78)$$

После приведения к стандартному виду уравнение (4.78) будет

$$(Tp + 1)p\beta = k_4 u_3 - \frac{F_1(p\beta)}{n}, \quad (4.79)$$

где $T = \frac{J}{n}$ [сек] — электромеханическая постоянная времени двигателя, $k_4 = \frac{k_d'}{n} \left[\frac{1}{\text{в} \cdot \text{сек}} \right]$ — передаточное число двигателя,

$n = k_d'' + k_\beta [2 \cdot \text{см} \cdot \text{сек}]$ — полный коэффициент демпфирования.

5. Уравнение редуктора без учета люфта запишется в виде

$$\beta_1 = k_8 \beta,$$

где β_1 — угол поворота выходного вала редуктора, k_8 — передаточное число редуктора.

При учете люфта в редукторе β_1 будет нелинейной функцией от β

$$\beta_1 = F_2(\beta). \quad (4.80)$$

Приводя уравнения (4.71), (4.73), (4.74), (4.79) и (4.80) к одному с переменной β , получим:

$$(Tp + 1)p\beta = -k_n F_2(\beta) - \frac{F_1(p\beta)}{n}, \quad (4.81)$$

где $k_n = k_1 k_2 k_3 k_4$ [1/сек] — передаточное число линейной части системы.

Нелинейная статическая характеристика $F_1(p\beta)$ представлена на рис. 4.28, а. Аналитически функция $F_1(p\beta)$ может быть записана в виде

$$F_1(p\beta) = c \operatorname{sign} p\beta \begin{cases} p\beta \neq 0, \\ p\beta = 0 \text{ при } Jp^2\beta + np\beta - k_d'u_3 \geq c \end{cases} \quad (4.82)$$

— случай, когда нет остановок двигателя, или же в виде

$$-c < F_1(p\beta) < c, \quad \beta = \text{const} \quad \text{при} \quad k_d'u_3 < C$$

— случай наличия остановок двигателя.

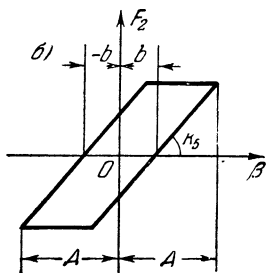
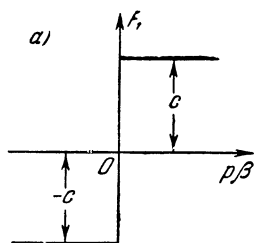


Рис. 4.28.

При определении автоколебаний ограничимся условием (4.82).

Статическая характеристика функции $F_2(\beta)$ представлена на рис. 4.28, б.

Будем искать решение для угла поворота вала двигателя β в виде

$$\beta = A \sin \Omega t, \quad \Omega t = \phi,$$

а для скорости — в виде

$$p\beta = A\Omega \cos \Omega t.$$

Выполняя гармоническую линеаризацию нелинейностей в соответствии с формулами (3.53), (3.28), (3.29) и (3.52), получим:

$$F_1(p\beta) = \frac{q'_1(A)}{\Omega} p\beta, \quad (4.83)$$

$$F_2(\beta) = \left[q_2(A) + \frac{q'_2(A)}{\Omega} p \right] \beta, \quad (4.84)$$

где

$$q'_1(A) = \frac{4c}{\pi A}, \quad (4.85)$$

$$q_2(A) = \frac{k_b}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right] \text{ при } A \geq b,$$

$$q'_2(A) = -\frac{4k_b b}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) \text{ при } A \geq b. \quad (4.86)$$

С учетом (4.81), (4.83) и (4.84) получим линеаризованное уравнение, описывающее собственное движение следующей системы:

$$\left\{ Tp^2 + \left[1 + \frac{k_n}{\Omega} q'_2(A) + \frac{q'_1(A)}{n\Omega} \right] p + k_n q_2(A) \right\} \beta = 0. \quad (4.87)$$

В соответствии с дифференциальным уравнением (4.87) напомним характеристические уравнения для случаев:

а) когда учитывается только сухое трение и не учитывается люфт в редукторе [$q_2(A) = k_b$, $q'_2(A) = 0$]:

$$Tp^2 + \left[1 + \frac{q'_1(A)}{n\Omega} \right] p + k_n k_b = 0; \quad (4.88)$$

б) когда учитывается только люфт в редукторе [$q'_1(A) = 0$]:

$$Tp^2 + \left[1 + \frac{k_n q'_2(A)}{\Omega} \right] p + k_n q_2(A) = 0; \quad (4.89)$$

в) когда учитывается сухое трение и люфт одновременно:

$$Tp^2 + \left[1 + \frac{k_n q'_2(A)}{\Omega} + \frac{q'_1(A)}{n\Omega} \right] p + k_n q_2(A) = 0. \quad (4.90)$$

Будем анализировать полученные уравнения (4.88) — (4.90).

Для получения периодического решения в системе, описываемой уравнением второго порядка, вида

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x = 0$$

нужно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$a_1 = 0, \text{ т. е. } a_0 p^2 + a_2 = 0. \quad (4.91)$$

По аналогии со случаями исследования нелинейных систем, описываемых уравнениями любого порядка, будем и здесь применять подстановку $p = j\Omega$, откуда получается условие $X(A, \Omega) = 0$ и $Y(A, \Omega) = 0$, равносильное условию (4.91).

Из уравнений (4.88) и (4.85) видно, что условие

$$Y(A, \Omega) = \Omega + \frac{4c}{\pi n A} = 0$$

не может быть удовлетворено ни при каких положительных значениях c, n, Ω, A . Следовательно, сухое трение без люфта не может вызвать автоколебаний в данной системе.

Уравнение же (4.89) может удовлетворить условиям $X(A, \Omega) = 0$, $Y(A, \Omega) = 0$ при положительных значениях амплитуды, частоты и входящих в уравнение параметров. Следовательно, люфт обуславливает автоколебания в данной системе.

Проведем анализ уравнения (4.89). Подставив $p = j\Omega$, получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$k_n q_2(A) - T\Omega^2 = 0, \quad (4.92)$$

$$\Omega + k_n q_2'(A) = 0. \quad (4.93)$$

Построим кривые изменения амплитуды и частоты периодического решения в зависимости от параметров системы. Из (4.93) с учетом значения $q_2'(A)$ получим:

$$\Omega = \frac{4k_n k_b b}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A}\right). \quad (4.94)$$

Из (4.94) видно, что периодическое решение возможно только при $A \geq b$, т. е. при амплитуде, большей половины ширины люфта. Подставляя (4.94) в (4.92) и учитывая значение $q_2(A)$, получим:

$$\frac{16k_n k_b T b^2}{\pi A^2} \left(1 - \frac{b}{A}\right)^2 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2b}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{A}\right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A}\right)}. \quad (4.95)$$

По соотношению (4.95), задаваясь значениями амплитуды и параметрами системы, кроме одного, получим зависимости амплитуды от каждого параметра. По соотношению (4.94) при тех же значениях параметров и соответствующих значениях амплитуды определим частоту автоколебаний.

Значения параметров, определенные экспериментально на одном комплекте топливомера, равны:

- 1) электромеханическая постоянная времени двигателя $T=0,115$ сек;
- 2) общий коэффициент усиления системы $k=k_n k_b=35,2$ 1/сек;
- 3) передаточное число редуктора $k_b=\frac{\beta_1}{\beta}=\frac{1}{500}$; 4) люфт в редукторе $2b=16$ рад.

По формулам (4.94) и (4.95) был выполнен расчет и построены кривые изменения частоты и амплитуды периодического решения от параметров $k=k_n k_b$, T и b (рис. 4.29). Амплитуды колебаний выходного вала редуктора определены по амплитудам колебаний вала двигателя через передаточное число редуктора:

$$A_{\beta_1}=0,002A.$$

Как видно из полученных графиков, в зависимости от значений параметров k и T возможна работа системы с устойчивым режимом без автоколебаний и возможна работа с автоколебательным установившимся режимом.

Внутри области автоколебаний имеются две ветви значений амплитуд и частот, удовлетворяющих периодическому решению. Верхние ветви соответствуют автоколебаниям. Нижние ветви есть границы устойчивости «в малом». Это условно показывается стрелками.

Для подтверждения устойчивости периодического решения, соответствующего ветвям амплитуд с большими значениями, применим приближенный аналитический критерий (4.6).

Из характеристического уравнения (4.89) следует, что

$$\begin{aligned} X(a, \omega) &= k_n q_2(a) - T\omega^2, \\ Y(a, \omega) &= \left(1 + \frac{k_n q'_2(a)}{\Omega}\right)\omega. \end{aligned}$$

Вычисляя соответствующие производные с учетом графиков $q_2(a)$ и $q'_2(a)$ (рис. 3.9), получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* &= k_n \left(\frac{\partial q_2}{\partial a}\right)^* > 0 \text{ при любых значениях амплитуды } a=A, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= k_n \left(\frac{\partial q'_2}{\partial a}\right)^* \begin{cases} < 0 & \text{при } A < 2b, \\ > 0 & \text{при } A > 2b, \end{cases} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -2T\Omega < 0 \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = 1 + \frac{k_n q'_2(A)}{\Omega}. \end{aligned}$$

Так как из (4.93) следует:

$$q'_2(A) = -\frac{\Omega}{k_n},$$

то

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = 0.$$

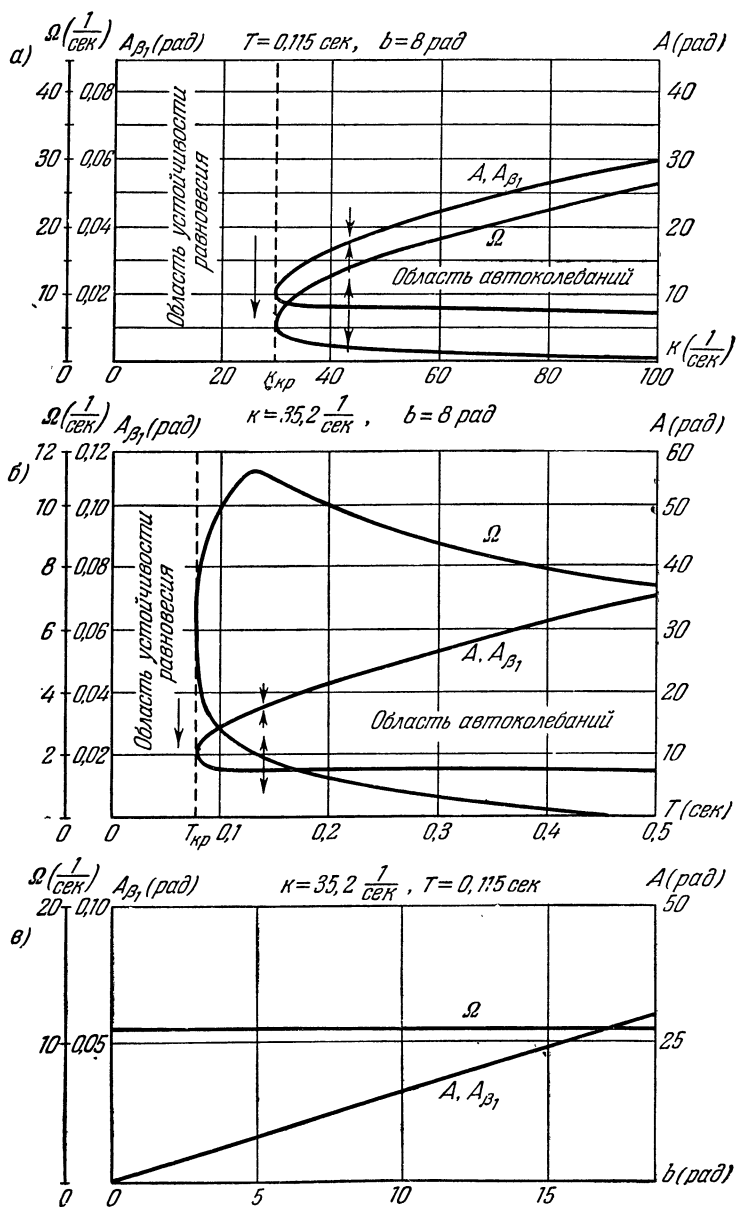


Рис. 4.29.

Учитывая полученные знаки частных производных, убеждаемся, что критерий устойчивости при $A > 2b$ выполняется и при $A < 2b$ не выполняется. Следовательно, ветвь с большими амплитудами принадлежит устойчивому периодическому решению.

Утверждение об устойчивости периодического решения по всей ветви больших амплитуд вытекает из непрерывности автоколебательных установившихся режимов при изменении параметров системы. Несовпадение в данном случае значения амплитуды, разделяющей решение на две ветви, с значением ее, полученным из исследования устойчивости, можно объяснить приближенностью критерия устойчивости (неучет изменения частоты вблизи периодического решения). Принадлежность ветви с малыми амплитудами к неустойчивому периодическому решению очевидна из того, что ниже этой ветви лежит зона люфта, внутри которой нет периодического решения.

Распространение результатов, полученных для области автоколебаний на область, где нет периодического решения, позволяет сделать вывод об устойчивости системы при значениях параметров, меньших критических.

При действительных значениях параметров, замеренных на макете, из выполненных построений получаем: $A = 13,8 \text{ рад}$, $A_{\beta 1} = 0,002A = 0,0275 \text{ рад}$, $\Omega = 10,8 \text{ 1/сек}$, $f = 1,72 \text{ гц}$.

Построенные графики позволяют выбирать параметры из условия уменьшения амплитуды и увеличения частоты автоколебаний или подавления автоколебаний для подобных систем, где сухое трение пренебрежимо. Если же сухим трением пренебречь нельзя, то его следует учитывать как вторую нелинейность в системе в дополнение к люфту.

Проведем исследование следящей системы при учете люфта в редукторе и трения одновременно. Из (4.90) получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$k_n q_2(A) - T\Omega^2 = 0, \quad (4.96)$$

$$\Omega + k_n q'_2(A) + \frac{q'_1(A)}{n} = 0. \quad (4.97)$$

Из (4.96), с учетом значений коэффициентов гармонической линеаризации получим:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_n k_s}{\pi T} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right]}, \quad (4.98)$$

а из (4.97)

$$c = nk_b \left(1 - \frac{b}{A} \right) - \frac{\pi n A \Omega}{4}. \quad (4.99)$$

Для определения влияния сухого трения на автоколебания определим зависимости $A(c)$ и $\Omega(c)$ при постоянных других параметрах.

Для этого в (4.98) будем задавать значения A и вычислять Ω и при тех же A и полученных значениях Ω по (4.99) будем определять c . Так как при принятых значениях параметров система находится вблизи границы, разделяющей область устойчивости от области автоколебаний, то для наглядности построения кривые $A(c)$ и $\Omega(c)$ (рис. 4.30, *a*) были построены при увеличенной в четыре раза постоянной T . Из выполненного построения видно, что сухое трение приводит к сужению области автоколебаний.

Такое же построение было выполнено и для параметра n , являющегося полным коэффициентом демпфирования (рис. 4.30, *б*). Как видно, демпфирование также сужает область автоколебаний.

Построение кривых изменения амплитуды и частоты автоколебаний для параметров T , k , b в данном случае не приводилось, так как качественно они остаются такими же, как и для случая, когда сухое трение не учитывалось. При этом за счет сухого трения лишь немного сужается область автоколебаний.

Выполненное построение переходного процесса графоаналитическим методом Башкирова подтвердило полученный результат приближенного метода гармонической линеаризации. Экспериментальные измерения, выполненные на одном комплекте топливомера, также хорошо совпадают с теоретическим результатом. Наблюдаемые автоколебания при работе топливомера на различных участках шкалы имели частоту $f = 1.5 \div 2$ гц и амплитуду $A_{\beta 1} = 1 \div 2^\circ$. Кроме того, наблюдались на некоторых участках срывы автоколебаний. Это объясняется тем, что при действительных значениях параметров система работает вблизи границы областей устойчивости и автоколебаний.

Результаты исследования могут быть использованы при выборе параметров существующей конструкции топливомера или для улучшения последней.

Получение устойчивого режима без автоколебаний или подавление автоколебаний, как видно из анализа, возможно за счет уменьшения постоянной времени, уменьшения коэффициента усиления системы, увеличения сухого трения и увеличения полного коэффициента демпфирования. Однако рациональными средствами следует лишь считать уменьшение коэффициента усиления и увеличение демпфирования, так как увеличение сухого трения увеличит зону нечувствительности прибора, а изменение постоянной времени за счет изменения момента инерции практически может быть очень незначительным. Увеличение полного коэффициента демпфирования предпочтительнее, чем уменьшение коэффициента усиления, так как уменьшение коэффициента усиления приведет к уменьшению быстродействия системы и увеличению ошибок прибора. Увеличение полного коэффициента демпфирования конструктивно возможно как за счет установки дополнительного магнитного или воздушного демпфера k_β , так и за счет применения двигателя с более жесткими механическими характеристиками k_d'' . Кроме того, можно рекомендовать как средство подавления

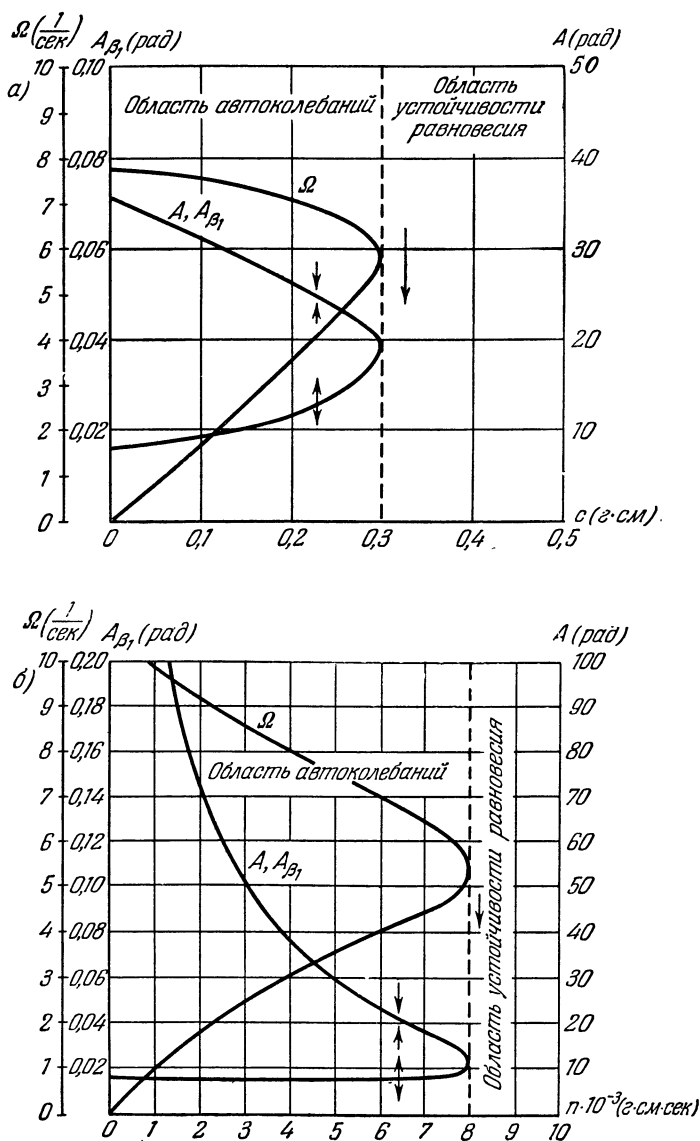


Рис. 4.30.

автоколебаний дополнительную отрицательную обратную связь. Для этого представляется возможным выполнить в двигателе тахогенераторную обмотку и снимаемое с нее напряжение подавать на вход усилителя, т. е. применить жесткую отрицательную обратную связь по скорости двигателя. Применение такой связи уменьшит постоянную времени и коэффициент усиления. Последний при необходимости можно снова повысить.

Практически представляется возможной работа прибора и с автоколебательным режимом. При этом значительно уменьшится зона нечувствительности прибора. Получение же приемлемой амплитуды автоколебаний (десятые доли градуса) потребует существенного уменьшения люфта редуктора. Это возможно при замене обычного шестеренчатого редуктора дифференциально-планетарным редуктором.

§ 4.9. Следящая система третьего порядка с нелинейным трением и люфтом

Исследуем следящую систему, рассмотренную в § 4.3 (рис. 4.5). Будем полагать, что при рабочих значениях входного напряжения электронный усилитель имеет линейную статическую характеристику. В обрабатываемом двигателе будем учитывать сухое или квадратичное трение и люфт в редукторе.

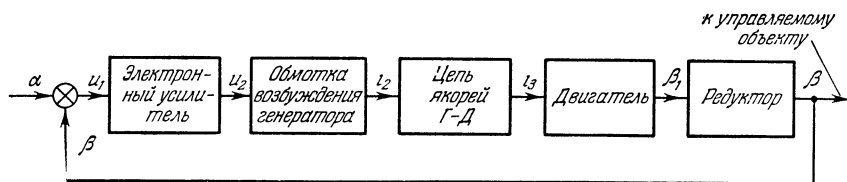


Рис. 4.31.

Следящая система представлена структурной схемой (рис. 4.31) при сохранении прежних обозначений переменных.

Запишем уравнения звеньев системы для случая исследования собственного движения системы при учете указанных нелинейностей.

1. Уравнение датчика рассогласований:

$$u_1 = k_1(\alpha - \beta), \quad u_1 = -k_1\beta \quad \text{при} \quad \alpha = 0. \quad (4.100)$$

2. Уравнение электронного усилителя:

$$u_2 = k_y u_1. \quad (4.101)$$

3. Уравнение обмотки возбуждения генератора:

$$(T_1 p + 1) i_2 = k_2 u_2. \quad (4.102)$$

4. Уравнение цепи якорей генератора и двигателя при пренебрежении индуктивностью:

$$i_3 = k_3 i_2 - k_4 p \beta_1. \quad (4.103)$$

5. Уравнение движения якоря двигателя с управляемым объектом запишем для переменной β_1 — угла поворота вала двигателя. Нелинейное трение учтем в виде нелинейной функции

$$M_T = F_1(p \beta_1).$$

В соответствии с (4.12) при учете нелинейного трения уравнение движения ротора двигателя будет

$$(T_2 p) p \beta_1 = k_3 i_3 - \frac{F_1(p \beta_1)}{k_\beta}. \quad (4.104)$$

Объединяя (4.104) с уравнением (4.103), получим:

$$(T_2 p + 1) p \beta_1 = \frac{k_3 k_5}{1 + k_4 k_5} i_2 - \frac{F_1(p \beta_1)}{k_\beta (1 + k_4 k_5)}, \quad (4.105)$$

где

$$T_2 = \frac{T_2'}{1 + k_4 k_5}.$$

6. Уравнение редуктора при учете люфта запишется в виде нелинейной функции:

$$\beta = F_2(\beta_1). \quad (4.106)$$

Будем искать решение для переменной β_1 в гармоническом виде

$$\beta_1 = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t.$$

Тогда по формулам гармонической линеаризации сухого и квадратичного трения (3.53) и (3.64) соответственно получим линейные соотношения:

$$F_1(\beta_1) = \frac{q'_1(A)}{\Omega} p \beta_1, \quad F_1(\beta_1) = q'_{1*}(A) \Omega p \beta_1, \quad (4.107)$$

где $q'_1 = \frac{4c}{\pi A}$ при учете сухого трения; $q'_{1*} = \frac{8k_* A}{3\pi}$ при учете квадратичного трения; c — постоянное значение момента от сил сухого трения.

Первое из соотношений (4.107) соответствует характеристике сухого трения, когда значения момента трения при скорости, равной нулю, не учитываются. Для выделения областей периодического решения такой учет сухого трения практически приемлем.

Для нелинейной характеристики, обусловленной люфтом в редукторе, в соответствии с формулами для коэффициентов гармонической

линеаризации (3.28) и (3.29) имеем соотношение

$$\beta = F_2(\beta_1) = \left[q_2(A) + \frac{q'_2(A)}{\Omega} p \right] \beta_1, \quad (4.108)$$

где

$$q_2(A) = \frac{k_6}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right] \text{ при } A \geq b,$$

$$q'_2(A) = -\frac{4k_6b}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) \text{ при } A \geq b,$$

b — половина ширины люфта, k_6 — передаточное число редуктора.

Подставляя (4.107) в (4.105), получим соответственно уравнения для случая учета сухого трения и для случая учета квадратичного трения:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[T_2 p + 1 + \frac{q'_1(A)}{k_{\dot{\beta}}(1 + k_4 k_5) \Omega} \right] p \beta_1 &= \frac{k_5 k_5}{1 + k_4 k_5} i_2, \\ \left[T_2 p + 1 + \frac{q'_{1*}(A) \Omega}{k_{\dot{\beta}}(1 + k_4 k_5)} \right] p \beta_1 &= \frac{k_5 k_5}{1 + k_4 k_5} i_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

Объединяя уравнения (4.100), (4.101), (4.102) с (4.109), получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} (T_1 p + 1) \left[T_2 p + 1 + \frac{q'_1(A)}{k_{\dot{\beta}}(1 + k_4 k_5) \Omega} \right] p \beta_1 &= -\frac{k_1 k_y k_2 k_3 k_5}{1 + k_4 k_5} \beta, \\ (T_1 p + 1) \left[T_2 p + 1 + \frac{q'_{1*}(A) \Omega}{k_{\dot{\beta}}(1 + k_4 k_5)} \right] p \beta_1 &= -\frac{k_1 k_y k_2 k_3 k_5}{1 + k_4 k_5} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

Заменяя в (4.110) β на ее значение (4.108) и вводя обозначения: $k_n = \frac{k_1 k_y k_2 k_3 k_5}{1 + k_4 k_5} \left[\frac{1}{\text{сек}} \right]$ — коэффициент усиления линейной части системы, $k' = \frac{1}{k_{\dot{\beta}}(1 + k_4 k_5)} \left[\frac{1}{\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}} \right]$, получим общие уравнения системы:

$$\left\{ \begin{aligned} &T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + \\ &\quad + \left[1 + \frac{k' q'_1(A)}{\Omega} + \frac{k_n q'_2(A)}{\Omega} \right] p + k_n q_2(A) \} \beta_1 = 0, \\ &T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + \\ &\quad + \left[1 + k' q'_{1*}(A) \Omega + \frac{k_n q'_2(A)}{\Omega} \right] p + k_n q_2(A) \} \beta_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

По уравнениям (4.111) запишем характеристические уравнения для различных случаев:

а) когда система рассматривается линейной без учета нелинейного трения и люфта:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k = 0, \quad (4.112)$$

где $k = k_\lambda k_6 \left[\frac{1}{сек} \right]$ — общий коэффициент усиления системы;

б) когда в качестве нелинейности учитывается сухое трение:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + \left[1 + \frac{k' q'_1(A)}{\Omega} \right] p + k = 0; \quad (4.113)$$

в) когда в качестве нелинейности учитывается квадратичное трение:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + [1 + k' q_{1*}(A) \Omega] p + k = 0; \quad (4.114)$$

г) когда в качестве нелинейности учитывается люфт в редукторе:

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + \left[1 + \frac{k_\lambda q'_2(A)}{\Omega} \right] p + k_\lambda q_2(A) = 0. \quad (4.115)$$

Уравнение (4.112) позволяет оценить устойчивость линейной системы в случае, когда нелинейности несущественны. Как видно, для устойчивости линейной системы необходимо, чтобы при положительных значениях параметров выполнялось условие

$$T_1 + T_2 > k T_1 T_2.$$

Значение коэффициента усиления, при котором система находится на границе устойчивости, т. е.

$$k_{гр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2},$$

назовем граничным.

При $k < k_{гр}$ система будет устойчивой, а при $k > k_{гр}$ система будет неустойчивой.

При принятых ранее значениях постоянных времени $T_1 = 0,1 \text{ сек}$ и $T_2 = 1 \text{ сек}$ получим, что линейная система будет устойчивой при значении общего коэффициента усиления $k < 11 \text{ 1/сек}$, т. е. $k_{гр} = 11 \text{ 1/сек}$.

Рассмотрим уравнение (4.113). Подстановка в него $p = j\Omega$ дает два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$k - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \quad (4.116)$$

$$\Omega + k' q'_1(A) - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \quad (4.117)$$

Исследуем устойчивость периодического решения, определяемого уравнениями (4.116) и (4.117) по аналитическому критерию

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* > 0.$$

В соответствии с уравнением (4.113) получим:

$$\begin{aligned} X(a, \omega) &= k - (T_1 + T_2) \omega^2, \\ Y(a, \omega) &= \omega + k' \frac{q'_1(a)}{\omega} \omega - T_1 T_2 \omega^3. \end{aligned}$$

Вычисляя соответствующие производные, находим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* &= 0, & \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* &= k' \left(\frac{\partial q'_1}{\partial a} \right) = - \frac{4k'c}{\pi A^2} < 0, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* &= -2(T_1 + T_2) \Omega < 0, & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* &= 1 + k' \frac{q'_1(A)}{\Omega} - 3T_1 T_2 \Omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.118)$$

Заменяя в (4.118) $q'_1(A)$ его значением из уравнения (4.117), получим:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* = -2T_1 T_2 \Omega^2 < 0. \quad (4.119)$$

Из полученных значений производных видно, что критерий устойчивости не выполняется. Периодическое решение, соответствующее уравнениям (4.116) и (4.117), определяет лишь границу устойчивости «в малом».

Частота периодического решения определится из уравнения (4.116):

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{T_1 + T_2}}.$$

Подставляя значение Ω и значение $q'_1(A)$ в уравнение (4.117), получим формулу для определения амплитуды:

$$A = \frac{4k'c}{\pi \sqrt{\frac{k}{T_1 + T_2} \left(\frac{T_1 T_2 k}{T_1 + T_2} - 1 \right)}}. \quad (4.120)$$

Как видно из (4.120), периодическое решение возможно только при условии

$$T_1 T_2 k > T_1 + T_2, \quad (4.121)$$

причем значение коэффициента усиления, разделяющего область наличия периодического решения от области, где нет периодического решения, определится из соотношения (4.121) при замене знака неравенства знаком равенства:

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Полученное значение коэффициента $k_{кр}$ совпадает со значением $k_{гр}$ линейной системы.

Из (4.120) следует, что при $k = k_{кр}$ $A \rightarrow \infty$ и при $k \rightarrow \infty$ $A \rightarrow 0$. Поэтому изменение амплитуды периодического решения в зависимости от k можно изобразить в виде кривой (рис. 4.32). Стрелки, расходящиеся от кривой, условно показывают неустойчивость периодического решения.

Устойчивость нелинейной системы в области, где нет периодического решения, можно усмотреть на основании перенесения результатов исследования устойчивости из области периодического решения, что также условно показано стрелкой. Этот результат легко подтверждается методом § 2.7.

Следовательно, как и в случае рассмотрения следящей системы, описываемой уравнением второго порядка, сухое трение в данной системе не является причиной возбуждения автоколебаний. Оно, напротив, демпфирует движение в системе. К области устойчивости системы, рассматриваемой как ли-

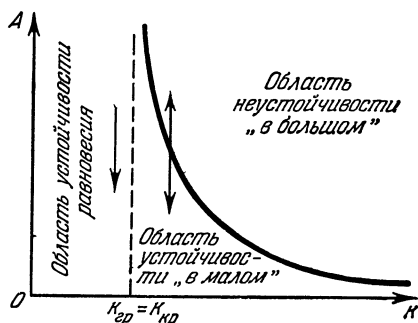


Рис. 4.32.

нейной, при учете трения добавляется область устойчивости «в малом».

Рассмотрим поведение системы в случае, когда к линейному трению добавляется квадратичное трение. Из уравнения (4.114) получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} k - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 + k' q'_{1*}(A) \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.122)$$

Выражения $X(a, \omega)$ и $Y(a, \omega)$ для определения устойчивости периодического решения будут:

$$\begin{aligned} X(a, \omega) &= k - (T_1 + T_2) \omega^2, \\ Y(a, \omega) &= \omega + [1 + k' q'_{1*}(A) \Omega] \omega - T_1 T_2 \omega^3. \end{aligned}$$

Теперь, в отличие от случая сухого трения, производная будет

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* = k' \left[\frac{\partial q'_{1*}(a)}{\partial a} \right]^* \Omega^2 = \frac{8k' k_*}{3\pi} \Omega^2 > 0$$

и, следовательно, периодическое решение устойчиво.

Частота периодического решения определится из первого уравнения (4.22):

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{T_1 + T_2}}.$$

Амплитуда периодического решения определится из второго уравнения (4.122) при подстановке значения Ω :

$$A = \frac{3\pi}{8k_0} \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{k}} \left(\frac{kT_1T_2}{T_1 + T_2} - 1 \right), \quad (4.123)$$

где $k_0 = k'k_*$.

В соответствии с (4.123) положительные значения амплитуды возможны только при

$$k > \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}$$

и, следовательно, критическое значение коэффициента усиления, разделяющего область устойчивости равновесия и область автоколебаний, будет

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}.$$

Оно совпадает с граничным значением $k_{гр}$ линейной системы.

Следовательно, квадратичное трение приводит к автоколебаниям в той области параметров, где линейная система без этого добавочного трения была бы неустойчивой. Это объясняется усилением демпфирующего действия квадратичного трения при увеличении амплитуды (а следовательно, и скорости) колебаний, что препятствует неограниченному раскачиванию системы. Переход закона сопротивления движению объекта от линейного к квадратичному, как указывалось ранее, при больших скоростях является вполне реальным.

На рис. 4.33 представлены кривые изменения амплитуды колебаний выходного вала редуктора и частоты от каждого параметра. При изменении одного параметра принимались постоянные значения других параметров: $T_1 = 0,1$ сек, $T_2 = 1$ сек, $k = 20$ 1/сек, $k_0 = 1$ сек и передаточное число редуктора $k_8 = 0,01$. Полученные кривые позволяют выбрать параметры в зависимости от предъявленных требований к системе. Подавление автоколебаний в системе, как видно из графиков, возможно за счет уменьшения коэффициента усиления и постоянных времени двигателя и цепи возбуждения генератора (T_1 и T_2 оказывают одинаковое влияние). Если желательно сохранить автоколебательный режим в подобной системе, то подбором параметров можно на основании полученных зависимостей добиться уменьшения амплитуды и повышения частоты автоколебаний.

Одновременное уменьшение амплитуды и повышение частоты автоколебаний возможно за счет подбора постоянных времени и коэффициента усиления.

При заданных значениях k , T_1 и T_2 за счет увеличения параметра k_0 можно добиваться уменьшения амплитуды, не изменяя частоты автоколебаний. Это подтверждается и физическими соображениями,

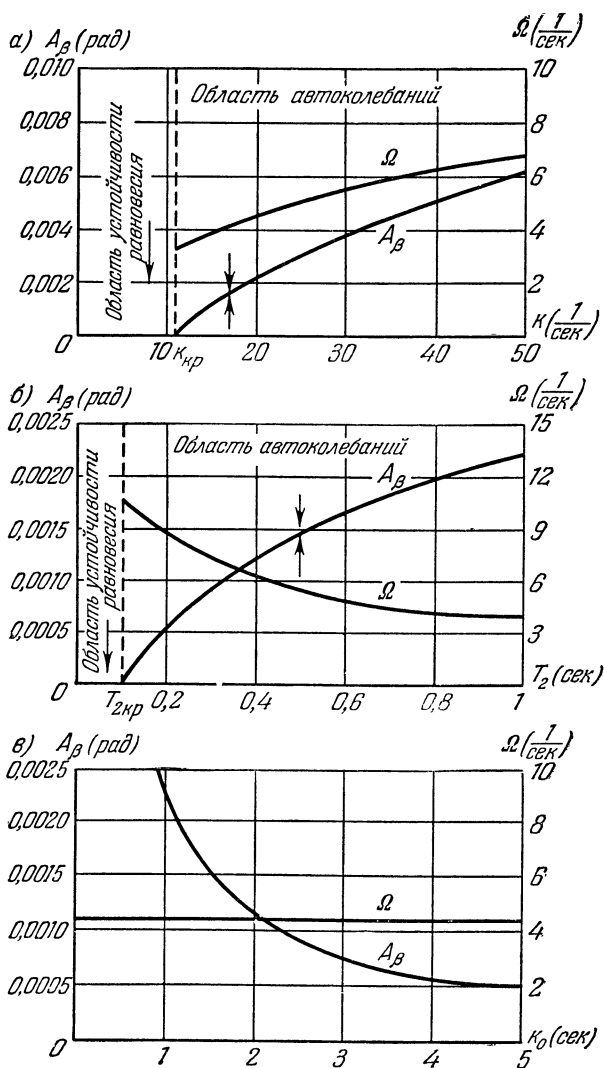


Рис. 4.33.

так как k_0 определяет соотношение между квадратичным трением и линейным трением

$$k_0 = \frac{k_*}{k_\beta (1 + k_4 k_5)}.$$

Чем больше будет преобладать в системе квадратичное трение над линейным, тем на меньшие амплитуды будет раскачиваться система в области автоколебаний.

В общем из сопоставления формул гармонической линеаризации для подобных систем можно заключить, что за областью устойчивости будет лежать область автоколебаний, если нелинейное трение имеет степень выше первой по скорости, и область неустойчивости, если нелинейное трение аппроксимируется степенной характеристикой степени ниже первой (дробной), в том числе как предельный случай характеристикой сухого трения.

Выполним анализ движения данной системы при учете нелинейности в виде люфта в редукторе. По уравнению (4.115) получим уравнение для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$k_n q_2(A) - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \quad (4.124)$$

$$\Omega + k_n q_2'(A) - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \quad (4.125)$$

Уравнение (4.124) не может удовлетвориться вещественными значениями амплитуды $A < b$, значит, периодическое решение возможно только при $A \geq b$. Это следует из физических соображений, так как при уменьшении амплитуды колебаний вала двигателя до значений, меньших половины люфта, прекратится передача движения на последующие звенья.

Для построения кривых изменения амплитуды и частоты периодического решения от параметров системы необходимо решить уравнения (4.124) и (4.125) относительно A и Ω и получить формулы, связывающие амплитуду и частоту с каждым параметром при постоянных других параметрах.

Уравнения (4.124) и (4.125) относительно A и Ω трансцендентны, но разрешимы относительно параметров $k = k_n k_6$, T_1 , T_2 . Поэтому, выразив, например, параметр k из первого и второго уравнений при учете значений $q_2(A)$ и $q_2'(A)$, получим:

$$k = \frac{\pi (T_1 + T_2) \Omega^2}{\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)}}, \quad (4.126)$$

$$k = \frac{\pi (\Omega - T_1 T_2 \Omega^3)}{4 \frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)}. \quad (4.127)$$

Задавая одинаковыми значениями Ω в (4.126) и (4.127) и изменяя значения амплитуды, получим два семейства кривых $k = k(A)$.

Точки пересечения кривых (рис. 4.34, а) с одинаковыми значениями Ω будут графическим решением уравнений $A=A(k)$ и $\Omega=\Omega(k)$.

На рис. 4.34, б представлен результат решения для A_0 при значениях параметров $T_1=0,1$ сек, $T_2=0,1$ сек и $b=1$ рад.

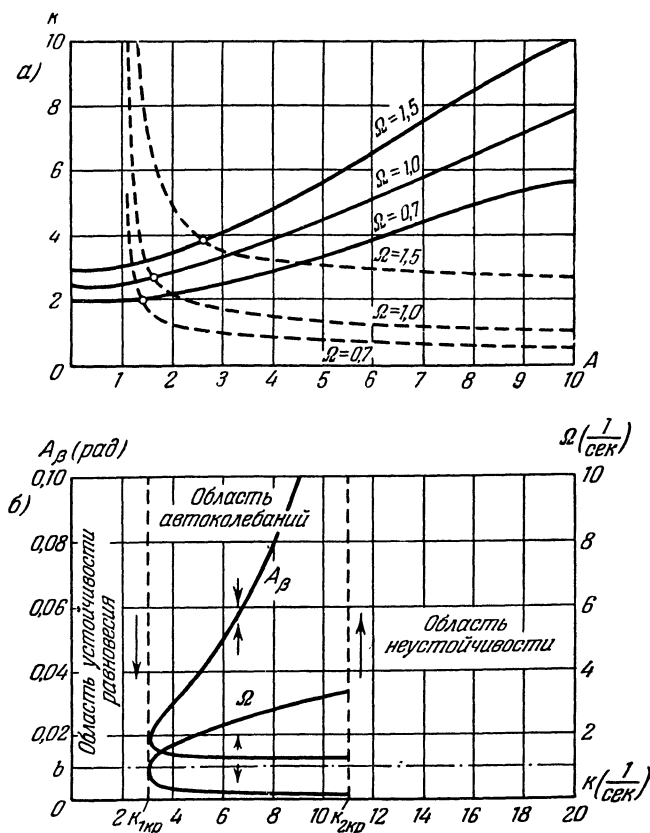


Рис. 4.34.

Из полученного решения видно, что для данной системы в зависимости от значения общего коэффициента усиления имеются три области. При малом коэффициенте усиления, т. е. при значениях $0 < k < k_{1\text{кр}}$, получается область устойчивости. Значение $k_{1\text{кр}}$ можно вычислить, если в уравнениях (4.126) и (4.127), исключив Ω , получить выражение $k=k(A)$ и приравнять производную $\frac{dk}{dA}$ нулю. Если такое исследование является громоздким, то к нему можно и

не прибегать, так как в процессе выполненного графического решения приближенно выявляется значение $k_{1\text{кр}}$.

Область автоколебаний соответствует средним значениям общего коэффициента усиления $k_{1\text{кр}} \leq k \leq k_{2\text{кр}}$. Значение $k_{2\text{кр}}$ равняется значению коэффициента усиления на границе устойчивости той же системы, рассматриваемой как линейная, без учета люфта в редукторе:

$$k_{2\text{кр}} = k_{\text{гр}} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Это можно усмотреть из соотношений (4.126) и (4.127). Числитель в (4.127) обращается в нуль при $\Omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$, причем амплитуда при конечном k неограниченно возрастает. Подстановка $A = \infty$ и $\Omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$ в (4.126) и дает приведенное выше значение $k_{2\text{кр}}$. Следовательно, при $k_{2\text{кр}}$

$$A = \infty, \quad \Omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (4.128)$$

За областью автоколебаний лежит область неустойчивости при значении $k > k_{2\text{кр}}$. Следовательно, область автоколебаний занимает часть области устойчивости линейной системы без учета люфта.

Из приведенного примера видно, что исследование данной системы как линейной далеко не отражает действительную картину протекающих процессов и дает ошибочное представление об области устойчивости, так как внутри области устойчивости возможны установившиеся автоколебательные режимы с практически неприемлемыми амплитудами.

В области автоколебаний имеется две ветви для амплитуды и частоты периодического решения. Верхние ветви принадлежат устойчивому периодическому решению — автоколебаниям, нижние — неустойчивому периодическому решению, т. е. являются границей устойчивости системы «в малом». Это подтверждается на основании критерия устойчивости для периодических решений

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0.$$

В соответствии с (4.115) получаем:

$$X(a, \omega) = k_a q_2(a) - (T_1 + T_2) \omega^2,$$

$$Y(a, \omega) = \omega + \frac{k_a q_2'(a)}{\Omega} \omega - T_1 T_2 \omega^3.$$

Вычисляя соответствующие производные и учитывая знаки производных коэффициентов гармонической линеаризации, очевидные из графиков рис. 3.9, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* &= k_n \left(\frac{\partial q_2}{\partial a}\right)^* > 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= k_n \left(\frac{\partial q'_2}{\partial a}\right)^* \quad \begin{cases} < 0 & \text{при } b < A < 2b, \\ > 0 & \text{при } A > 2b, \end{cases} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -2(T_1 + T_2)\Omega < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = 1 + \frac{k_n q'_2(A)}{\Omega} - 3T_1 T_2 \Omega. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Из уравнения (4.125) имеем:

$$1 + \frac{k_n q'_2(A)}{\Omega} = T_1 T_2 \Omega^2.$$

Поэтому из (4.129) найдем значение производной

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = -2T_1 T_2 \Omega^2 < 0.$$

Подставляя полученные значения производных в неравенство критерия устойчивости, получим:

$$(T_1 + T_2) \left(\frac{\partial q'_2}{\partial a}\right)^* > T_1 T_2 \Omega \left(\frac{\partial q_2}{\partial a}\right)^*. \quad (4.130)$$

Из графиков $q_2(A)$ и $q'_2(A)$ (рис. 3.9), видно, что для ветви с большими амплитудами при $A \rightarrow \infty$ коэффициенты $q'_2(A)$ и $q_2(A)$ одинаково стремятся к постоянным значениям и, следовательно, можно считать, что их производные по a для больших амплитуд приблизительно равны друг к другу. Тогда неравенство (4.130) можно переписать, введя максимальное значение Ω_m , в виде

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} > \Omega_m.$$

Учитывая значение $k_{2\text{кр}} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$, условие устойчивости периодического решения запишем в виде

$$k_{2\text{кр}} > \Omega_m \quad (4.131)$$

или, учитывая значение $\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$, — в виде

$$T_1 + T_2 > \sqrt{T_1 T_2}. \quad (4.132)$$

Следовательно, для верхней ветви критерий устойчивости выполняется (рис. 4.34).

Для нижней ветви в соответствии со знаками производных для $A < 2b$ критерий устойчивости не выполняется и, следовательно,

нижняя ветвь принадлежит неустойчивому периодическому решению, т. е. является границей устойчивости системы «в малом».

Устойчивость и неустойчивость периодического решения для соответствующих ветвей указаны сходящимися и расходящимися стрелками. Сходящиеся стрелки к верхней ветви частот условно показывают, что данная ветвь принадлежит ветви амплитуд устойчивого периодического решения.

Переноса полученные результаты в области автоколебаний на области $0 \leq k \leq k_{1\text{кр}}$ и $k \geq k_{2\text{кр}}$, убеждаемся, что первая из них есть область устойчивости, а вторая — область неустойчивости для нелинейной системы.

Заметим, что подобное решение можно получить также и частотным методом (третий способ, § 2.3). Разомкнув систему и составив уравнение линейной части, в данном случае получим выражение для частотной характеристики линейной части системы в виде

$$W_n(j\omega) = \frac{k}{[1 - T_1 T_2 \omega^2 + (T_1 + T_2) j\omega] j\omega} \quad (4.133)$$

и соответствующую характеристику нелинейного звена

$$\begin{aligned} -\frac{1}{W_n(a)} &= \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{a} \right)} - j \frac{4b}{\pi a} \left(1 - \frac{b}{a} \right) \right]} \end{aligned} \quad (4.134)$$

Так как характеристика $-\frac{1}{W_n(a)}$ не зависит от параметра k , то достаточно построить одну характеристику по (4.134) и семейство характеристик по (4.133) при различных значениях k . Точки пересечения кривой $-\frac{1}{W_n(a)}$ с семейством кривых $W_n(j\omega)$ и будут искомым решением, позволяющим построить графики $A=A(k)$ и $\Omega=\Omega(k)$. Однако целесообразность применения того или иного критерия определяется и точностью графического решения. Так, например, в данном случае кривые (4.133) пересекаются с кривой (4.134) под слишком малыми углами, что затрудняет определение точек решения.

§ 4.10. Система регулирования курса самолета

Выше проводилось исследование нелинейных систем, описываемых уравнениями не выше третьего порядка. Методы исследования остаются теми же и при исследовании нелинейных систем, описываемых уравнениями более высокого порядка. Возьмем, например, систему автоматического регулирования курса самолета. Принципиальная схема системы представлена на рис. 4.35.

Регулируемым объектом является самолет, регулятором — курсовой автопилот, условно вынесенный на рисунке из корпуса самолета, а регулируемой величиной — угол ψ поворота оси самолета, отсчитываемый от заданного направления курса.

Чувствительными элементами курсового автопилота служат установленные на самолете 1 свободный гироскоп 2, измеряющий угол поворота ψ , и демпфирующий гироскоп 3, измеряющий первую $\dot{\psi}$ и вторую $\ddot{\psi}$ производные по времени от угла поворота ψ (т. е. угловую скорость и угловое ускорение вращения самолета вокруг вертикальной оси).

От чувствительных элементов через потенциометры 4, 5, 6 поступает ток в управляющие обмотки двухтактного магнитного усилителя 7. В магнитном усилителе происходят суммирование и усиление

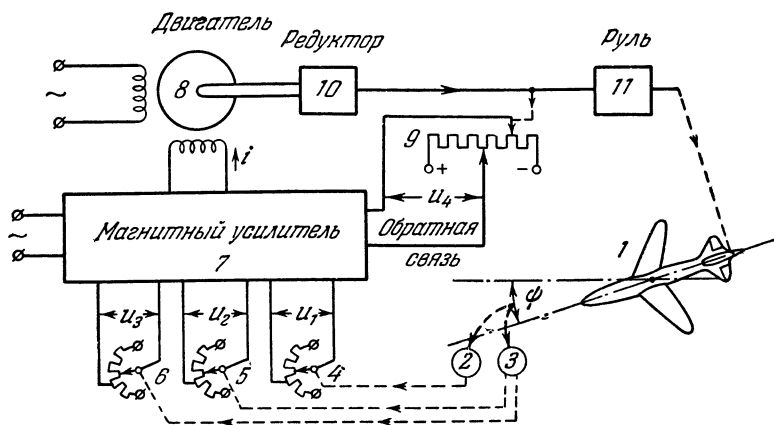


Рис. 4.35.

этих трех сигналов. Результирующий переменный ток подается на одну из обмоток реверсивного электродвигателя переменного тока 8, который через редуктор 10 вращает руль направления 11 (регулирующий орган). Руль воздействует на самолет, замыкая тем самым цепь регулирования.

Может иметься также дополнительная отрицательная обратная связь 9, в которой ползунок реостата перемещается вместе с поворотом руля, а снимаемое с реостата напряжение поступает в четвертую управляющую обмотку магнитного усилителя.

Уравнение самолета в движении по курсу с учетом скольжения будет [49]:

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_2 T_2] p \psi = -k_1 (T_2 p + 1) \delta, \quad (4.135)$$

где ψ — отклонение самолета от курса, δ — отклонение руля напра-

вления, $T_1 = \frac{J}{M_c^{\dot{\psi}}} [\text{сек}]$ — инерционная постоянная времени самолета,

$$T_2 = \frac{mv}{Z^{\beta}} [\text{сек}], \quad k_1 = \frac{M_p^{\delta}}{M_c^{\dot{\psi}}} \left[\frac{1}{\text{сек}} \right], \quad k_2 = \frac{M_c^{\beta}}{M_c^{\dot{\psi}}} \left[\frac{1}{\text{сек}} \right].$$

J — момент инерции самолета при вращении его вокруг вертикальной оси, $M_c^{\dot{\psi}}$ — крутизна (тангенс угла наклона) аэродинамической характеристики самолета, выражающей зависимость момента сопротивления воздуха от величины угловой скорости вращения самолета вокруг вертикальной оси, m — масса самолета, v — скорость, Z^{β} — крутизна аэродинамической характеристики самолета, выражающей зависимость боковой силы от величины угла скольжения β , $M_p^{\delta} = \left(\frac{\partial M_p}{\partial \delta} \right)^0$, где M_p — момент, создаваемый рулем, $M_c^{\beta} = \left(\frac{\partial M_c}{\partial \beta} \right)^0$, где M_c — момент аэродинамического сопротивления вращения самолета.

Автопилот с обратной связью и введением двух производных описывается уравнениями:

а) линейным уравнением чувствительных элементов и магнитного усилителя

$$(T_3 p + 1) i = (k_3 k_4 + k'_3 k_5 p + k''_3 k_6 p^2) \psi - k_7 k_9 \delta, \quad (4.136)$$

где $i[a]$ — ток в цепи управления электродвигателя рулевой машинки, $T_3 [\text{сек}]$ — постоянная времени магнитного усилителя, k_3, k'_3, k''_3 — передаточные числа соответствующих чувствительных элементов, k_4, k_5, k_6 — коэффициенты усиления магнитного усилителя для составляющих напряжения, полученных с чувствительных элементов, $k_7 k_9$ — соответственно передаточное число потенциометра обратной связи и магнитного усилителя для сигнала обратной связи;

б) нелинейным уравнением рулевой машинки

$$p\delta = F(i). \quad (4.137)$$

Нелинейная функция $F(i)$ может иметь различный вид в зависимости от конструкции рулевой машинки. Положим, что в некоторой рулевой машинке скорость перекладки руля пропорциональна току i до значения $-b \leq i \leq b$ и постоянна при $i \leq -b$ и $i \geq b$, т. е. имеется нелинейная характеристика типа насыщения (рис. 3.5, δ). В этом случае при отыскании периодического решения для переменной i (ток в цепи управления рулевой машинки), производя гармоническую линеаризацию, нелинейное уравнение (4.137) заменим соотношением

$$p\delta = q(A) i. \quad (4.138)$$

Коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$, согласно (3.19), равен

$$q(A) = \frac{2k_{p.m.}}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right),$$

где $k_{p.m} \left[\frac{1}{a \cdot \text{сек}} \right]$ — коэффициент усиления рулевой машинки на линейном участке статической характеристики.

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению системы для тока i , согласно (4.135), (4.136) и (4.138), будет

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_2 T_2] [(T_3 p + 1) p + k_7 k_9 q(A)] p + \\ + k_1 (T_2 p + 1) (k_3 k_4 + k'_3 k_8 p + k'_3 k_6 p^2) q(A) = 0.$$

Рассмотрим несколько упрощенный вариант системы. Если автопилот не имеет дополнительной обратной связи ($k_9 = 0$) и не вводится вторая производная ($k'_3 = 0$), то характеристическое уравнение после преобразований примет вид

$$T_1 T_2 T_3 p^5 + [T_1 T_2 + (T_1 + T_2) T_3] p^4 + [T_1 + T_2 + (1 + k_2 T_2) T_3] p^3 + \\ + [1 + k_2 T_2 + k_1 k'_3 k_8 T_2 q(A)] p^2 + k_1 (k_3 k_4 T_2 + k'_3 k_8) q(A) p + \\ + k_1 k_3 k_4 q(A) = 0. \quad (4.139)$$

Подставив $p = j\Omega$, получим уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения (для переменной i — тока электродвигателя рулевой машинки):

$$k_1 k_3 k_4 q(A) - [1 + k_2 T_2 + k_1 k'_3 k_8 T_2 q(A)] \Omega^2 + \\ + [T_1 T_2 + (T_1 + T_2) T_3] \Omega^4 = 0, \quad (4.140)$$

$$k_1 (k_3 k_4 T_2 + k'_3 k_8) q(A) - [T_1 + T_2 + (1 + k_2 T_2) T_3] \Omega^2 + \\ + T_1 T_2 T_3 \Omega^4 = 0. \quad (4.141)$$

Уравнения (4.140) и (4.141) позволяют найти зависимости амплитуды и частоты периодического решения от каждого параметра системы при постоянных значениях других параметров.

Пусть требуется найти зависимости изменения амплитуды и частоты от передаточного числа автопилота по углу отклонения от курса, т. е. от параметра k_3 . Разрешая уравнения (4.140) и (4.141) относительно k_3 , получим:

$$k_3 = \frac{[1 + k_2 T_2 + k_1 k'_3 k_8 T_2 q(A)] \Omega^2 - [T_1 T_2 + (T_1 + T_2) T_3] \Omega^4}{k_1 k_4 q(A)}, \quad (4.142)$$

$$k_3 = - \frac{k'_3 k_8 q(A)}{k_4 T_2} + \frac{[T_1 + T_2 + (1 + k_2 T_2) T_3] \Omega^2 - T_1 T_2 T_3 \Omega^4}{k_1 k_4 T_2}. \quad (4.143)$$

Построив семейства кривых $k_3(A)$ по (4.142) и (4.143) при одинаковых значениях Ω , получим значения $A(k_3)$ и $\Omega(k_3)$ по точкам пересечения кривых с равными значениями Ω . Результат такого решения для значений параметров: $T_1 = 1 \text{ сек}$, $T_2 = 1 \text{ сек}$, $T_3 = 0,01 \text{ сек}$, $k_1 = 1 \text{ 1/сек}$, $k_2 = 1 \text{ 1/сек}$, $k'_3 = 1 \text{ в/сек}$, $k_4 = 0,1 \text{ а/в}$, $k_8 = 0,1 \text{ а/в}$, $k_{p.m} = 1 \text{ 1/сек}$, $b = 1 \text{ а}$ представлен на рис. 4.36.

Из графиков рис. 4.36 следует, что в зависимости от значений передаточного числа k_3 возможны три области: при малых значениях k_3 — область устойчивости, при средних значениях k_3 — область автоколебаний и при больших значениях k_3 — область неустойчивости.

В силу приближенности графического решения область неустойчивости здесь выделяется без строгого доказательства того, что при $k_{2\text{кр}}$ амплитуда A стремится к бесконечности. Из решения получается, что амплитуда возрастает до больших величин, что практически можно считать неустойчивым состоянием системы.

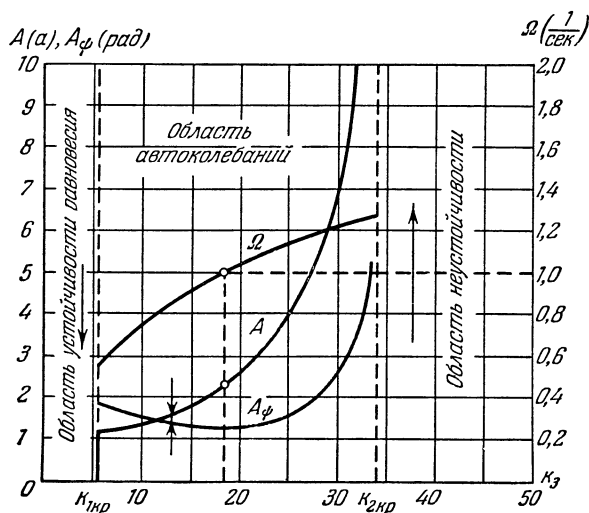


Рис. 4.36

Приведенное разделение значений k_3 на области справедливо при условии, что полученное периодическое решение при $k_{1\text{кр}} \leq k_3 \leq k_{2\text{кр}}$ устойчиво. Устойчивость периодического решения оценим на основании приближенного критерия

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0.$$

Из (4.139) следует, что

$$\begin{aligned} X(a, \omega) = & k_1 k_3 k_4 q(A) - [1 + k_2 T_2 + k_1 k'_3 k_5 T_2 q(A)] \omega^2 + \\ & + [T_1 T_2 + (T_1 + T_2) T_3] \omega^4, \\ Y(a, \omega) = & k_1 (k_3 k_4 T_2 + k'_3 k_5) q(A) \omega - [T_1 + T_2 + (1 - k_2 T_2) T_3] \omega^3 + \\ & + T_1 T_2 T_3 \omega^5. \end{aligned}$$

Вычисляя соответствующие производные, получим:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* &= k_1(k_3k_4 - k'_3k_5T_2\Omega^2)\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^*, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* &= k_1(k_3k_4T_2 + k'_3k_5)q(A) - 3[T_1 + T_2 + (1 + k_2T_2)T_3]\Omega^2 + \\ &\quad + 5T_1T_2T_3\Omega^4, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -2[1 + k_2T_2 + k_1k'_3k_5T_2q(A)]\Omega + 4[T_1T_2 + (T_1 + T_2)T_3]\Omega^3, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= k_1(k_3k_4T_2 + k'_3k_5)\Omega\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^*.\end{aligned}$$

Подстановка в полученные производные численных значений параметров и соответствующих значений $q(A)$ и $\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^*$ для одного режима автоколебаний $A = 2,3a$, $\Omega = 1\left[\frac{1}{сек}\right]$ при $k_3 = 18$ дает результат, удовлетворяющий критерию устойчивости. Следовательно, при значении $k_3 = 18$ (рис. 4.36) имеем автоколебания. Это значит, что при всех значениях $k_{1кр} \leq k_3 \leq k_{2кр}$ будет устойчивое периодическое решение — автоколебания, так как кривые $A(k_3)$ и $\Omega(k_3)$ непрерывны и однозначны.

Практически представляет интерес определение амплитуды колебаний самолета по курсу. Для пересчета амплитуд A автоколебаний тока в цепи управления двигателя рулевой машинки в амплитуды A_ψ колебаний самолета по курсу воспользуемся уравнением (4.136) без учета обратной связи ($k_9 = 0$) и второй производной ($k''_3 = 0$). Передаточная функция от угла отклонения ψ к тому i управлению двигателем рулевой машинки будет

$$W(p) = \frac{k_3k_4 + k'_3k_5p}{T_3p + 1}.$$

Для пересчета амплитуд получим формулу

$$A_\psi = \sqrt{\frac{T_3^2\Omega^2 + 1}{(k'_3)^2 k_3^2\Omega^2 + k_3^2k_4^2}} A.$$

Вычисленные по полученной формуле значения A_ψ представлены графиком на рис. 4.36.

Из графика $A_\psi(k_3)$ видно, что при принятой для исследования схеме и значениях параметров амплитуды колебаний самолета по курсу недопустимо велики. Следовательно, передаточное число необходимо выбирать $k_3 < k_{1кр}$ с тем, чтобы система самолет-автопилот работала в области устойчивых процессов без автоколебаний. Такой результат получен при отсутствии обратной связи и второй производной от угла курса в законе регулирования S обратной связью и второй производной значения амплитуд будут меньшими.

При наличии нелинейности типа насыщения область автоколебаний лежит за областью устойчивости линейной системы (без учета насыщения). Автоколебания имеют жесткий режим возбуждения при амплитуде, равной половине зоны линейности нелинейной характеристики, и потому автоколебательный режим в этом случае, как правило, практически неприемлем.

Подобное исследование можно выполнить и для любого другого параметра при любой схеме системы самолет — автопилот.

§ 4.11. Нелинейная система стабилизации с временным запаздыванием

В качестве второго примера приближенного исследования нелинейной системы по уравнениям высокого порядка рассмотрим систему

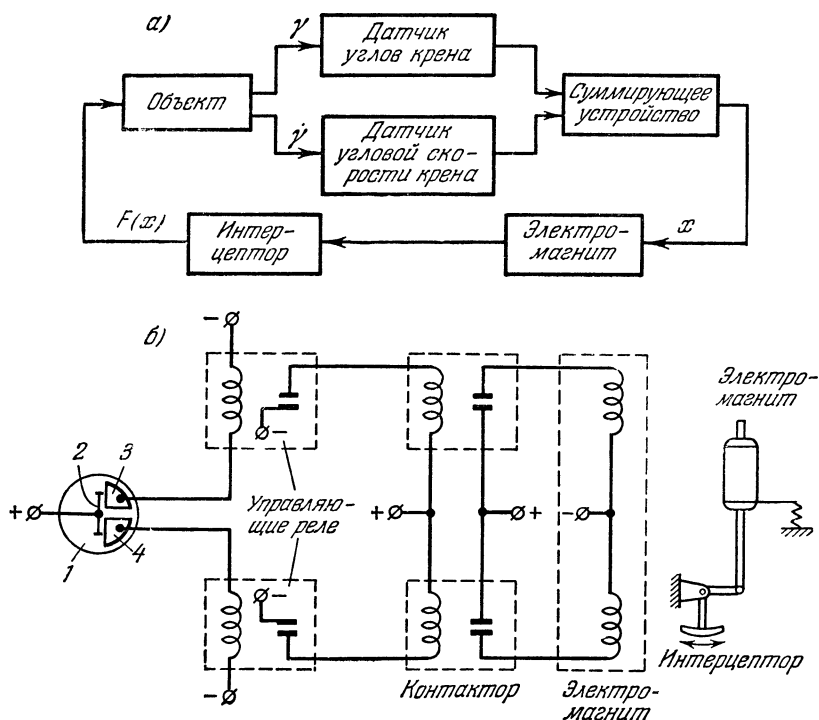


Рис. 4.37.

стабилизации аэродинамического объекта в движении по крену. При этом кроме нелинейности будем учитывать временное запаздывание.

Структурная схема системы изображена на рис. 4.37, а. Угол бокового крена объекта измеряется датчиком угла крена, выполненным

в виде трехступенного гироскопа. Угловая скорость по боковому крену измеряется датчиком угловой скорости крена, выполненным в виде двухступенного гироскопа. Гироскоп датчика углов кренов перемещает щетки 2 контактного устройства (рис. 4.37, б), а гироскоп датчика угловой скорости связан с диском 1, несущим контактные ламели 3 и 4. Относительное перемещение щеток и диска обеспечивает включение управляющих реле, а последние включают контакторы, управляющие электромагнитами интерцепторов. Интерцепторы, воздействуя на объект, ликвидируют нежелательное отклонение объекта по углу крена.

Объект, датчик угла крена, датчик угловой скорости крена и суммирующее устройство входят в линейную часть системы. Управляющие реле, контакторы и электромагнит интерцептора являются нелинейной частью системы.

Нелинейную часть системы можно представить в виде звена со статической релейной характеристикой (рис. 4.38), имеющей зону нечувствительности (в контактном диске), и звена с чистым временным запаздыванием, включающим время трогания и время движения якорей управляющих реле и контакторов.

В соответствии с формулой гармонической линеаризации релейной характеристики с зоной нечувствительности и при учете временного запаздывания для нелинейной части будем иметь уравнение

$$F_{\tau}(x) = q(A) e^{-p\tau} x, \quad (4.144)$$

$$x = \gamma + k_{\dot{\gamma}},$$

где γ — угол крена объекта, $k_{\dot{\gamma}}$ — передаточное число двухступенного гироскопа, $q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}$ — коэффициент гармонической линеаризации, τ — временное запаздывание.

Для случая горизонтального полета уравнение бокового движения для переменной x может быть записано в виде

$$(p^4 + m_1 p^3 + m_2 p^2 + m_3 p + m_4) x + (n_1 p^3 + n_2 p^2 + n_3 p + n'_4) F_{\tau}(x) = 0, \quad (4.145)$$

где в коэффициенты $m_1, \dots, m_4, n_1, \dots, n_3, n'_4$ входят параметры системы и аэродинамические коэффициенты.

С учетом (4.144) из (4.145) получим характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$p^4 + m_1 p^3 + m_2 p^2 + m_3 p + m_4 + (n_1 p^3 + n_2 p^2 + n_3 p + n'_4) q(A) e^{-p\tau} = 0. \quad (4.146)$$

Подставляя в левую часть уравнения (4.146) $j\omega$ вместо p и учитывая, что

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

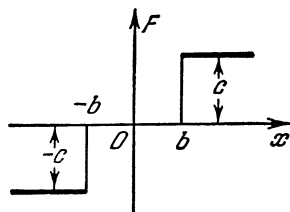


Рис. 4.38.

получим аналитическое выражение для кривой Михайлова

$$L(j\omega) = \omega^4 - jm_1\omega^3 - m_2\omega^2 + jm_3\omega + m_4 + \\ + (-jn_1\omega^3 - n_2\omega^2 + jn_3\omega + n_4')q(A)(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau). \quad (4.147)$$

Это выражение использовано впоследствии для исследования устойчивости периодического решения согласно § 2.4.

Из условия прохождения кривой Михайлова через начало координат $X(A, \omega) = 0$ и $Y(A, \omega) = 0$ при $\omega = \Omega$ запишем на основании (4.147) два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\Omega^4 - m_2\Omega^2 + m_4 + q(A)[\cos \Omega\tau(-n_2\Omega^2 + n_4') + \\ + \sin \Omega\tau(-n_1\Omega^3 + n_3\Omega)] = 0, \quad (4.148)$$

$$-m_1\Omega^3 + m_3\Omega + q(A)[\cos \Omega\tau(-n_1\Omega^3 + n_3\Omega) + \\ + \sin \Omega\tau(n_2\Omega^2 - n_4')] = 0. \quad (4.149)$$

Исключая $q(A)$ из уравнений (4.148) и (4.149), получим соотношение для определения возможных частот периодического решения в зависимости от параметров системы:

$$\operatorname{tg} \Omega\tau = \frac{\Omega[(m_1\Omega^3 - m_3)(-n_2\Omega^2 + n_4') + (\Omega^4 - m_2\Omega^2 + m_4)(-n_1\Omega^2 + n_3)]}{\Omega^2(m_1\Omega^3 - m_3)(-n_1\Omega^2 + n_3) + (\Omega^4 - m_2\Omega^2 + m_4)(-n_2\Omega^2 + n_4')}. \quad (4.150)$$

Уравнение (4.150) трансцендентно относительно Ω . Частоту периодического решения можно определить графическим решением уравнения (4.150). Для этого необходимо построить кривые $\operatorname{tg} \Omega\tau$ и $\frac{L_1(\Omega)}{L_2(\Omega)}$ при изменении Ω от 0 до ∞ , где $L_1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ — числитель и знаменатель правой части уравнения (4.150).

Если заведомо известно, что частоты ожидаемого периодического решения малы и временное запаздывание мало, то приближенно можно принять, что

$$\operatorname{tg} \Omega\tau \approx \Omega\tau.$$

Тогда (4.150) перепишется в виде

$$\tau = \frac{(m_1\Omega^3 - m_3)(-n_2\Omega^2 + n_4') + (\Omega^4 - m_2\Omega^2 + m_4)(-n_1\Omega^2 + n_3)}{\Omega^2(m_1\Omega^3 - m_3)(-n_1\Omega^2 + n_3) + (\Omega^4 - m_2\Omega^2 + m_4)(-n_2\Omega^2 + n_4')}. \quad (4.151)$$

Теперь решение получится как результат пересечения прямой $\tau = \text{const}$ и кривой $\frac{L_1^*(\Omega)}{L_2(\Omega)}$, где $L_1^*(\Omega) = \frac{L_1(\Omega)}{\Omega}$, при $0 < \Omega < \infty$.

Для определения зависимости частоты периодического решения от параметров системы необходимо по (4.150) или (4.151) строить семейство кривых при варьировании интересующим параметром. Практически же, найдя Ω при определенном значении параметра, приходится далее не прибегать к построению в широком диапазоне изменения частоты, а лишь ограничиться изменением частоты вблизи значений ожидаемого периодического решения.

Зная частоту периодического решения, можно определить амплитуду по любому из двух уравнений (4.148) или (4.149). Так, из уравнения (4.148) получим соотношение для определения амплитуды:

$$q(A) = \frac{\Omega^4 - m_2\Omega^2 + m_4}{\cos \Omega\tau (n_2\Omega^2 - n_4') + \sin \Omega\tau (n_1\Omega^2 - n_3\Omega)}. \quad (4.152)$$

Так как в конечном итоге необходимо знать поведение аэродинамического объекта в его движении относительно продольной оси, то представляет интерес определить амплитуду колебаний объекта по углу γ .

Учитывая уравнение $x = \gamma + k_1\dot{\gamma}$, связывающее x и γ , получим передаточную функцию для перехода от x к γ в виде

$$W(p) = \frac{1}{1 + k_1 p}.$$

Следовательно, амплитуда колебаний объекта A_γ определится через амплитуду переменной x соотношением

$$A_\gamma = \frac{A}{\sqrt{1 + k_1^2 \Omega^2}}. \quad (4.153)$$

В случае полета объекта по траектории, отличной от горизонтальной, уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$(p^5 + k_1 p^4 + k_2 p^3 + k_3 p^2 + k_4 p)x + (n_1 p^4 + n_2 p^3 + n_3 p^2 + n_4 p + n_5)F(x) = 0,$$

где коэффициенты $k_1, \dots, k_4, n_1, \dots, n_5$ включают параметры системы и аэродинамические коэффициенты.

Аналитическое выражение для кривой Михайлова запишется в виде

$$L(j\omega) = j\omega^5 + k_1\omega^4 - jk_2\omega^3 - k_3\omega^2 + jk_4\omega + (n_1\omega^4 - jn_2\omega^3 - n_3\omega^2 + jn_4\omega + n_5)(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)q(A). \quad (4.154)$$

В соответствии с (4.154) получим уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$k_1\Omega^4 - k_3\Omega^2 + q(A)[\cos \Omega\tau (n_1\Omega^4 - n_3\Omega^2 + n_5) - \sin \Omega\tau (n_2\Omega^3 - n_4\Omega)] = 0, \quad (4.155)$$

$$\Omega^5 - k_2\Omega^3 + k_4\Omega + q(A)[\cos \Omega\tau (-n_2\Omega^3 + n_4\Omega) - \sin \Omega\tau (n_1\Omega^4 - n_3\Omega^2 + n_5)] = 0. \quad (4.156)$$

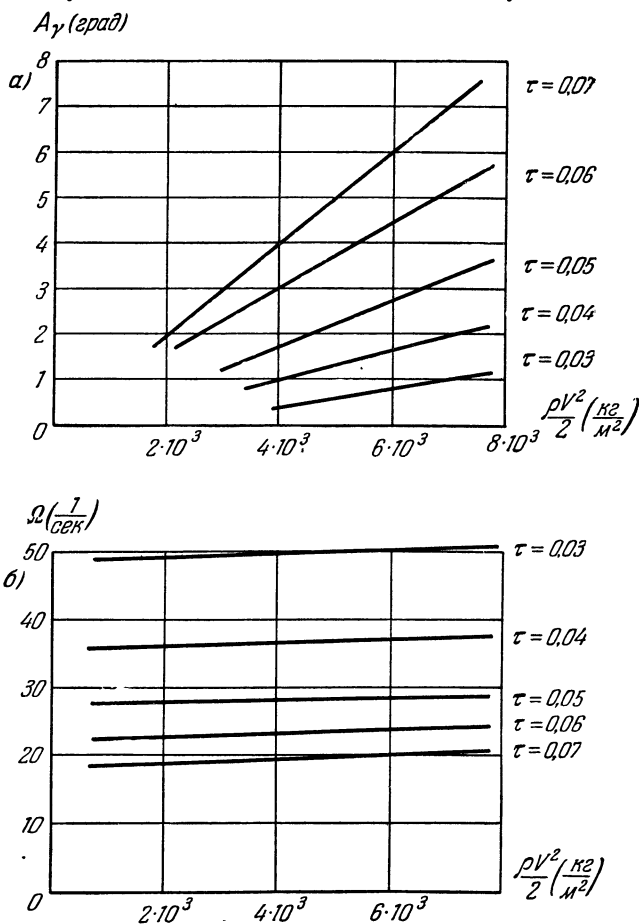
Исключая $q(A)$ из уравнений (4.155) и (4.156), получим уравнение для определения частоты периодического решения в зависимости от параметров системы:

$$\operatorname{tg} \Omega\tau = \frac{(\Omega^5 - k_2\Omega^3 + k_4\Omega)(n_1\Omega^4 - n_3\Omega^2 + n_5) + (k_1\Omega^4 - k_3\Omega^2)(n_2\Omega^3 - n_4\Omega)}{(\Omega^5 - k_2\Omega^3 + k_4\Omega)(n_2\Omega^3 - n_4\Omega) - (k_1\Omega^4 - k_3\Omega^2)(n_1\Omega^4 - n_3\Omega^2 + n_5)}. \quad (4.157)$$

Амплитуду периодического решения можно определить по любому из уравнений (4.155) или (4.156). Так из уравнения (4.155) получим соотношение для определения амплитуды:

$$q(A) = \frac{k_3 \Omega^2 - k_1 \Omega^4}{\cos \Omega \tau (n_1 \Omega^4 - n_3 \Omega^2 + n_5) - \sin \Omega \tau (n_2 \Omega^3 - n_4 \Omega)}. \quad (4.158)$$

Значение $q(A)$ должно быть всегда положительным, так как $q(A)$ — коэффициент усиления нелинейного звена. Поэтому, обозначая правую



часть уравнения (4.158) через s и учитывая значение $q(A)$ для рассматриваемой нелинейной характеристики, получим:

$$\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} = s.$$

Отсюда следует формула для вычисления амплитуды периодического решения:

$$A = \sqrt{\frac{8c^2}{(\pi s)^3} \pm \sqrt{\left(\frac{8c^2}{\pi^2 s^2}\right)^2 - \frac{16c^2 b^2}{\pi^2 s^3}}}. \quad (4.159)$$

Из формулы (4.159) видно, что для каждого значения частоты (для каждого значения $s = s(\Omega)$) получаются два значения амплитуды.

Трансцендентное уравнение (4.157) позволяет (графическим решением) вычислить значения частоты, а формула (4.159) — значения амплитуд периодического решения при измерении любого из интересующих параметров системы.

Пересчет значений амплитуд периодического решения для переменной x (управляющее напряжение реле) в амплитуды колебаний объекта по крену A_γ выполняется на основании формулы (4.153).

Результат решения для искомых амплитуды и частоты периодического решения в функции скоростного напора $\frac{\rho V^2}{2}$ в случае траектории полета, отличной от горизонтальной, для одного из объектов представлен на рис. 4.39, *a* и *б*, причем для амплитуд изображены ветви с большими значениями, соответствующие устойчивому периодическому решению, т. е. автоколебаниям. Устойчивость периодического решения при этом была определена на основании приближенного критерия.

В зависимости от значения параметров объект в движении по крену будет иметь либо устойчивое установившееся состояние без автоколебаний, либо автоколебательный установившийся режим, так как исследование устойчивости полученного периодического решения по второму графическому критерию (§ 2.4) с использованием выражений (4.147) и (4.154) для кривой Михайлова дает положительный результат.

§ 4.12. Система первого класса с двухфазным индукционным двигателем

Часто реальные нелинейные статические характеристики не могут быть с достаточной точностью аппроксимированы одной простой нелинейной зависимостью или кусочно-линейной характеристикой. Тогда в каждом отдельном случае следует подбирать аналитические зависимости, обеспечивающие желаемую точность аппроксимации реальной статической характеристики нелинейного звена¹⁾. При этом аппроксимирующая зависимость может быть сведена к нескольким элементарным нелинейным функциям, для которых следует применить формулы

¹⁾ Можно пользоваться также графическим способом определения коэффициентов гармонической линеаризации (см. главу III).

гармонической линеаризации, приведенные в предыдущей главе, или выполнить гармоническую линеаризацию по общим правилам.

В качестве примера рассмотрим систему автоматического регулирования с приводом регулирующего органа в виде двухфазного асинхронного двигателя [49]. Механические характеристики для такого двигателя имеют вид кривых рис. 4.40.

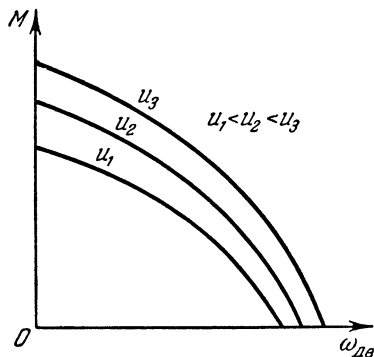


Рис. 4.40.

Линеаризуя механические характеристики, обычно считают, что

$$M = c_1 u - c_2 \omega_{\text{дв}}. \quad (4.160)$$

Но это справедливо в первом приближении только для левого участка характеристики. Если же используется большая часть характеристики, то необходимо учесть их нелинейность. Имея в виду, что с увеличением $\omega_{\text{дв}}$ коэффициент c_1 уменьшается, а коэффициент c_2 увеличивается, примем для аппроксимации

этой характеристики вместо (4.160) следующее нелинейное соотношение¹⁾:

$$M = \frac{c_1}{1 + c_3 |\omega_{\text{дв}}|} u - (c_2 + c_4 |\omega_{\text{дв}}|) \omega_{\text{дв}}. \quad (4.161)$$

Значения коэффициентов c_3 и c_4 следует подбирать на основании имеющихся экспериментальных статических характеристик так, чтобы аппроксимирующие характеристики давали лучшее совпадение с действительными. Аналогично можно подбирать и любой другой более подходящий нелинейный закон для описания характеристик двигателя.

При пренебрежении трением в соответствии с (4.161) дифференциальное уравнение двигателя будет

$$J p \omega_{\text{дв}} = \frac{c_1}{1 + c_3 |\omega_{\text{дв}}|} u - c_2 \omega_{\text{дв}} - c_4 |\omega_{\text{дв}}| \omega_{\text{дв}}, \quad (4.162)$$

где J [г · см · сек²] — момент инерции всех вращающихся от двигателя масс, приведенных к валу двигателя.

Приводя (4.162) к общему знаменателю, получим:

$$J p \omega_{\text{дв}} + J c_3 |\omega_{\text{дв}}| p \omega_{\text{дв}} + c_2 \omega_{\text{дв}} + (c_2 c_3 + c_4) |\omega_{\text{дв}}| \omega_{\text{дв}} + c_3 c_4 \omega_{\text{дв}}^3 = c_1 u. \quad (4.163)$$

Здесь содержатся три нелинейные функции:

$$F_1(\omega_{\text{дв}}) = |\omega_{\text{дв}}| p \omega_{\text{дв}}, \quad F_2(\omega_{\text{дв}}) = |\omega_{\text{дв}}| \omega_{\text{дв}}, \quad F_3(\omega_{\text{дв}}) = \omega_{\text{дв}}^3.$$

¹⁾ Абсолютные значения $\omega_{\text{дв}}$ в коэффициентах поставлены потому, что $\omega_{\text{дв}}$ реверсируется, а сами коэффициенты должны оставаться положительными числами.

Для $F_2(\omega_{\text{дв}})$ и $F_3(\omega_{\text{дв}})$ имеются вычисленные коэффициенты гармонической линеаризации (3.31), (3.32) и, следовательно, указанные функции заменяются линейными соотношениями:

$$F_2(\omega_{\text{дв}}) = \frac{8A}{3\pi} \omega_{\text{дв}}, \quad F_3(\omega_{\text{дв}}) = \frac{3A^2}{4} \omega_{\text{дв}}. \quad (4.164)$$

Выполним гармоническую линеаризацию нелинейной функции $F_1(\omega_{\text{дв}}) = |\omega_{\text{дв}}| p \omega_{\text{дв}}$. Так как решение для $\omega_{\text{дв}}$ ищется в виде

$$\omega_{\text{дв}} = A \sin \Omega t,$$

то

$$p \omega_{\text{дв}} = A \Omega \cos \Omega t.$$

Тогда нелинейная функция $F_1(\omega_{\text{дв}})$ от аргумента $\psi = \Omega t$ будет

$$F_1(A \sin \psi) = |A \sin \psi| A \Omega \cos \psi$$

и изобразится в виде графика (рис. 4.41).

В силу четности функции $F_1(A \sin \psi)$ коэффициент гармонической линеаризации $q_1(A)$ будет равен нулю. Значения интеграла в

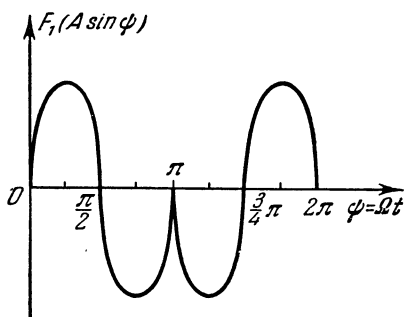


Рис. 4.41.

формуле (3.3) для вычисления $q_1'(A)$ будут одинаковыми за четверть периода. Тогда, вычисляя $q_1'(A)$, получим:

$$\begin{aligned} q_1'(A) &= \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{4A\Omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \sin \psi d\psi = -\frac{4A\Omega}{3\pi} \cos^3 \psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4A\Omega}{3\pi}. \end{aligned}$$

В соответствии с (3.1) для нелинейной функции $F_1(\omega_{\text{дв}})$ получим гармонически линеаризованное выражение

$$F_1(\omega_{\text{дв}}) = \frac{4A}{3\pi} p \omega_{\text{дв}}. \quad (4.165)$$

Подставляя (4.164) и (4.165) в (4.163), получим следующее уравнение двухфазного двигателя (для колебательных процессов):

$$[T_3(1 + b_1A)p + (1 + b_2A + b_3A^2)]\omega_{дв} = k_3u \quad (4.166)$$

вместо обычного линейного

$$(T_3p + 1)\omega_{дв} = k_3u,$$

где

$$T_3 = \frac{J}{c_2}, \quad k = \frac{c_1}{c_2}, \quad b_1 = \frac{4c_3}{3\pi}, \quad b_2 = 2b_1 + \frac{8c_4}{3\pi c_2}, \quad b_3 = \frac{3c_3c_4}{4c_2}. \quad (4.167)$$

Скорость перемещения регулирующего органа при учете передаточного числа редуктора будет

$$p\dot{\xi} = k_4\omega_{дв}. \quad (4.168)$$

Уравнение регулируемого объекта и уравнение чувствительного элемента регулятора возьмем в виде

$$\left. \begin{aligned} (T_1p + 1)\varphi &= -k_1\xi, \\ u &= k_2\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.169)$$

где φ — отклонение регулируемой величины.

Характеристическое уравнение всей замкнутой системы согласно (4.166), (4.168) и (4.169) будет

$$[T_3(1 + b_1A)p + 1 + b_2A + b_3A^2](T_1p + 1)p + k_1k = 0, \quad (4.170)$$

где $k = k_2k_3k_4$. Подставив сюда $p = j\Omega$, получим два уравнения для отыскания амплитуды и частоты периодического решения:

$$k_1k - [T_3(1 + b_1A) + T_1(1 + b_2A + b_3A^2)]\Omega^2 = 0, \quad (4.171)$$

$$1 + b_2A + b_3A^2 - T_1T_3(1 + b_1A)\Omega^2 = 0. \quad (4.172)$$

Рассмотрим влияние параметра k (общего коэффициента усиления регулятора). Из уравнения (4.172) получаем:

$$A = \frac{b_1T_1T_3\Omega^2 - b_2 + \sqrt{(b_1T_1T_3\Omega^2 - b_2)^2 + 4b_3(T_1T_3\Omega^2 - 1)}}{2b_3}. \quad (4.173)$$

Из уравнения (4.171) с учетом (4.172) получим формулу для параметра k , влияние которого нас интересует:

$$k = \frac{T_3}{k_1}(1 + b_1A)(1 + T_1^2\Omega^2). \quad (4.174)$$

По формуле (4.173) построим график $A = A(\Omega)$ при постоянных значениях параметров. На основании полученного графика, задаваясь значениями Ω и подставляя соответствующие значения A , вычислим значения k по формуле (4.174) и, следовательно, построим зависимости $A(k)$ и $\Omega(k)$.

Выполненные построения для значений параметров: $b_1 = 0,05 \text{ сек}$, $b_2 = 5 \text{ сек}$, $b_3 = 1 \text{ сек}^2$, $T_1 = 0,1 \text{ сек}$, $T_3 = 0,01 \text{ сек}$, $k_1 = 1$, представлены на рис. 4.42, а и б.

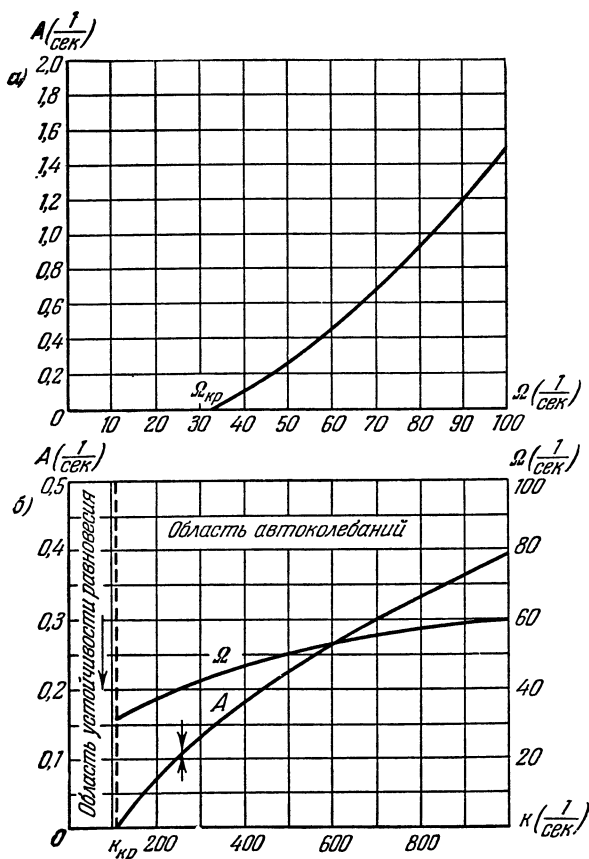


Рис. 4.42.

Исследуем устойчивость найденного периодического решения методом осреднения периодически меняющихся коэффициентов. Для этого составим уравнения системы в отклонениях от периодического решения.

Уравнение линейной части в отклонениях, согласно (4.168) и (4.169), будет

$$(T_1 p + 1) p \Delta u = -k_1 k_2 k_4 \Delta \omega_{дв}.$$

Для уравнения нелинейного звена (4.163), имеющего вид

$$F(\omega_{дв}, \dot{\omega}_{дв}) = c_1 u,$$

находим периодически меняющиеся коэффициенты:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_{\text{дв}}} = J c_3 p \omega_{\text{дв}} \operatorname{sign} \omega_{\text{дв}} + c_3 + 2(c_2 c_3 + c_4) |\omega_{\text{дв}}| + 3c_3 c_4 \omega_{\text{дв}}^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\omega}_{\text{дв}}} = J + J c_3 |\omega_{\text{дв}}|.$$

Осредним полученные коэффициенты по формулам:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \omega_{\text{дв}}} \right)^* d\psi, \quad \kappa_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\omega}_{\text{дв}}} \right)^* d\psi.$$

Выполняя вычисления с учетом периодических значений $\omega_{\text{дв}}$ и $p \omega_{\text{дв}}$, получим:

$$\kappa = c_2 + \frac{1}{2\pi} \left[J c_3 A \int_0^{2\pi} \cos \psi \operatorname{sign} \sin \psi + 2(c_2 c_3 + c_4) A \int_0^{2\pi} |\sin \psi| d\psi + \right. \\ \left. + 3c_3 c_4 A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi \right].$$

Первый интеграл, стоящий в квадратных скобках, обращается в нуль. Два другие могут быть вычислены интегрированием за четверть периода. Тогда имеем:

$$\kappa = c_2 + \frac{1}{2\pi} \left[8(c_2 c_3 + c_4) A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi + 12c_3 c_4 A^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi \right] = \\ = c_2 + \frac{1}{2\pi} \left[8(c_2 c_3 + c_4) A - \cos \psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 12c_3 c_4 A^2 \frac{\psi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \\ = c_2 + \frac{4}{\pi} (c_2 c_3 + c_4) A + \frac{3}{2} c_3 c_4 A^2.$$

Вычисляя значение κ_1 , получим:

$$\kappa_1 = J + J \frac{c_3 A}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin \psi| d\psi = J + J \frac{2c_3 A}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \\ = J + J \frac{2c_3 A}{\pi} \left[-\cos \psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = J + J \frac{2c_3 A}{\pi}.$$

Подставляя осредненные значения периодически изменяющихся коэффициентов в уравнение (4.163) и учитывая обозначения (4.167), запишем приближенное уравнение нелинейного звена в отклонениях:

$$\left[T_3 \left(1 + \frac{3}{2} b_1 A \right) p + \left(1 + \frac{3}{2} b_2 A + 2b_3 A^2 \right) \right] \Delta \omega_{\text{дв}} = k_3 \Delta u.$$

Характеристическое уравнение для исследования устойчивости периодического решения примет вид

$$\left[T_3 \left(1 + \frac{3}{2} b_1 A \right) p + \left(1 + \frac{3}{2} b_2 A + 2b_3 A^2 \right) \right] (T_1 p + 1) p + k_1 k = 0.$$

Отсюда условие устойчивости (по критерию Гурвица) будет

$$\left[T_3 \left(1 + \frac{3}{2} b_1 A \right) + T_1 \left(1 + \frac{3}{2} b_2 A + 2b_3 A^2 \right) \right] \times \\ \times \left(1 + \frac{3}{2} b_2 A + 2b_3 A^2 \right) - T_1 T_3 k_1 k \left(1 + \frac{3}{2} b_1 A \right) > 0, \quad (4.175)$$

в то время как наличие периодического решения, согласно прежнему характеристическому уравнению (4.170), соответствует равенство

$$[T_3(1 + b_1 A) + T_1(1 + b_2 A + b_3 A^2)](1 + b_2 A + b_3 A^2) - \\ - T_1 T_3 k_1 k (1 + b_1 A) = 0. \quad (4.176)$$

Заменяя $T_1 T_3 k_1 k$ в (4.175) его значением из (4.176), получим, что для устойчивости периодического решения должно выполняться неравенство

$$\left(T_3 + T_1 \frac{1 + \frac{3}{2} b_2 A + 2b_3 A^2}{1 + \frac{3}{2} b_1 A} \right) \left(1 + \frac{3}{2} b_2 A + 2b_3 A^2 \right) > \\ > \left(T_3 + T_1 \frac{1 + b_2 A + b_3 A^2}{1 + b_1 A} \right) (1 + b_2 A + b_3 A^2). \quad (4.177)$$

Выполнение неравенства (4.177) для больших амплитуд A периодического решения очевидно. Отсюда вытекает, что оно выполняется и для всей однозначной кривой $A(k)$ (рис. 4.42, б). Следовательно, найденное периодическое решение устойчиво; оно соответствует автоколебаниям данной системы, частота и амплитуда которых определяются графиками рис. 4.42, б.

Амплитуда автоколебаний для регулируемой величины φ определится через передаточную функцию звеньев, разделяющих переменные φ и $\omega_{\text{дв}}$. Из (4.168) и (4.169) получим:

$$(T_1 p + 1) p \varphi = k_1 k_4 \omega_{\text{дв}}$$

и, следовательно, передаточная функция от $\omega_{\text{дв}}$ к φ будет

$$W(p) = \frac{\varphi}{\omega_{\text{дв}}} = \frac{k_1 k_4}{(T_1 p + 1) p}.$$

После подстановки $p = j\omega$ получим комплексное передаточное число

$$K = W(j\omega) = \frac{k_1 k_4}{-T_1 \omega^2 + j\omega},$$

модуль которого равен

$$|K| = |W(j\omega)| = \frac{k_1 k_4}{\omega \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}.$$

Тогда амплитуда для переменной φ определится по формуле

$$A_\varphi = \frac{k_1 k_4}{\Omega \sqrt{T_1^2 \Omega^2 + 1}} A.$$

Распространяя полученный результат исследования в области автоколебаний при $k > k_{кр}$, убеждаемся, что левее области автоколебаний $k < k_{кр}$ будет область устойчивости без автоколебаний.

Значение $\Omega_{кр}$ в соответствии с формулой (4.173) определится из условия

$$4b_3(T_1 T_3 \Omega^2 - 1) = 0,$$

т. е.

$$\Omega_{кр} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_3}}.$$

Подставляя значение $\Omega_{кр}$ и $A = 0$ в (4.174), получим формулу для определения $k_{кр}$:

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_3}{k_1 T_1 T_3}.$$

Заметим, что значение $k_{кр}$ совпадает со значением $k_{гр}$, соответствующим границе устойчивости данной системы, исследуемой как линейной. Действительно, если не учитывать нелинейности механических характеристик двигателя, то характеристическое уравнение будет иметь вид

$$T_1 T_3 p^3 + (T_1 + T_3) p^2 + p + k_1 k = 0$$

и, следовательно, в соответствии с критерием устойчивости Гурвица условие границы устойчивости будет

$$T_1 = T_3 = k_1 k T_1 T_3,$$

откуда

$$k_{гр} = \frac{T_1 + T_3}{k_1 T_1 T_3}.$$

Таким образом, неучет нелинейности механических характеристик привода регулирующего органа приводит к результату, что за областью устойчивости лежит область неустойчивости, тогда как в действительности там имеется устойчивый автоколебательный установившийся режим с малой амплитудой вблизи границы устойчивости (безопасная граница).

§ 4.13. Система второго класса с двухфазным индукционным двигателем

Учет нелинейности механических характеристик асинхронных двухфазных двигателей может быть выполнен и другими методами. Так, например, в статье [94], посвященной вопросу учета нелинейности характеристик двигателей серии АДП, авторами предлагается аппроксимация механических характеристик двигателей полиномами по степеням угловой скорости. Указанная аппроксимация в общем случае распространяется на характеристики, охватывающие как двигательный,

так и тормозной режимы работы (рис. 3.12). Нижняя ветвь характеристики соответствует другому знаку управляющего напряжения двигателя.

Для аппроксимации механических характеристик принимаются уравнения:

$$M = M_{\pi} - B_1 \omega_{\text{дв}} - B_2 \omega_{\text{дв}}^n \operatorname{sign} u \text{ при четных } n \quad (4.178)$$

или

$$M = M_{\pi} - B_1 \omega_{\text{дв}} - B_2 \omega_{\text{дв}}^n \operatorname{sign} \omega_{\text{дв}} \operatorname{sign} u \text{ при нечетных } n. \quad (4.179)$$

Для области, соответствующей двигательному режиму, уравнения (4.178) и (4.179) могут быть записаны в более простой форме:

$$M = M_{\pi} - B_1 \omega_{\text{дв}} - B_2 \omega_{\text{дв}}^n \operatorname{sign} \omega_{\text{дв}} \text{ при четных } n \quad (4.180)$$

или

$$M = M_{\pi} - B_1 \omega_{\text{дв}} - B_2 \omega_{\text{дв}}^n \text{ при нечетных } n, \quad (4.181)$$

где M_{π} — пусковой момент двигателя, M — момент нагрузки, $\omega_{\text{дв}}$ — угловая скорость двигателя, u — напряжение на обмотке управления, B_1 , B_2 — коэффициенты, определяемые в процессе аппроксимации.

О точности такой аппроксимации можно судить на основании сравнения реальных и аппроксимирующих характеристик.

На рис. 4.43, а представлены экспериментально снятые характеристики двигателя АДП-263 (сплошные кривые) и характеристики (пунктирные кривые), построенные в соответствии с уравнением (4.181):

$$M = M_{\pi} - 12,7 \cdot 10^{-2} \omega_{\text{дв}} - 1,2 \cdot 10^{-6} \omega_{\text{дв}}^3,$$

где $M_{\pi} = c_1 u$, а $c_1 = 5 \frac{2 \cdot \text{сМ}}{b}$ — коэффициент пропорциональности между пусковым моментом двигателя и напряжением на обмотке управления. На рис. 4.43, б приведены аналогичные характеристики двигателя АДП-363, аппроксимированные выражением

$$M = M_{\pi} - 7,24 \cdot 10^{-2} \omega_{\text{дв}} - 2,76 \cdot 10^{-6} \omega_{\text{дв}}^3$$

при $c_1 = 9 \frac{2 \cdot \text{сМ}}{b}$.

Приведенные уравнения характеризуют работу двигателя в установившемся режиме. Для неуставившегося режима при учете только инерционной нагрузки уравнения (4.178) и (4.179) примут вид

$$J_2 \frac{d\omega_{\text{дв}}}{dt} + B_1 \omega_{\text{дв}} + B_2 \omega_{\text{дв}}^n \operatorname{sign} u = c_1 u \text{ для четных } n \quad (4.182)$$

или

$$J_2 \frac{d\omega_{\text{дв}}}{dt} + B_1 \omega_{\text{дв}} + B_2 \omega_{\text{дв}}^n \operatorname{sign} \omega_{\text{дв}} \operatorname{sign} u = c_1 u \text{ для нечетных } n, \quad (4.183)$$

где J_2 — момент инерции ротора двигателя и приведенных к нему масс.

Покажем, каким образом выполняется гармоническая линеаризация подобного рода уравнений. Для определенности ограничимся уравнениями, нелинейность которых характеризуется второй и третьей

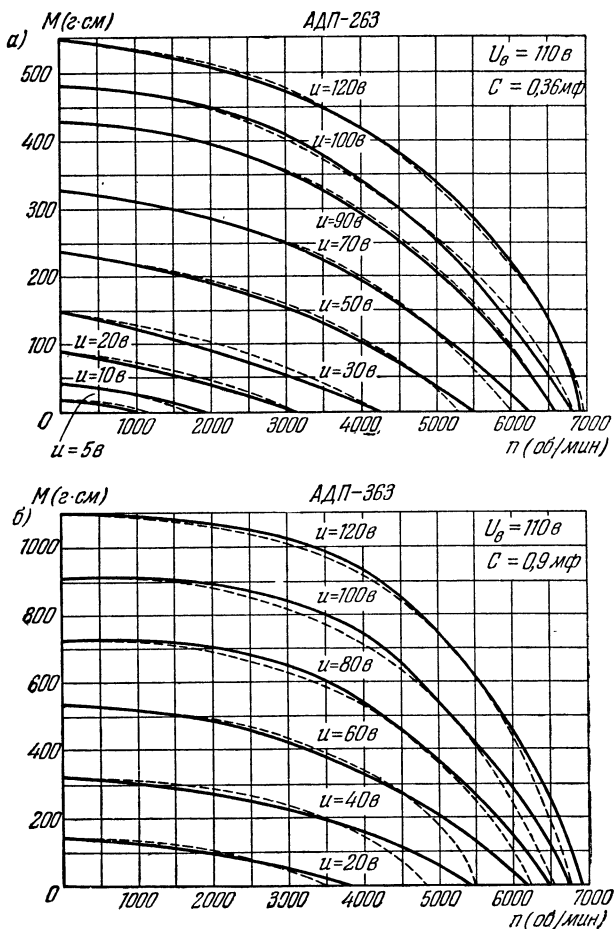


Рис. 4.43.

степенями угловой скорости. Методика решения сохраняется и для любых степеней.

Для случая $n=2$ в соответствии с (4.182) имеем:

$$J_2 \frac{d\omega_{дв}}{dt} + B_1 \omega_{дв} + B_2 \omega_{дв}^2 \operatorname{sign} u = c_1 u. \quad (4.184)$$

Разделив все члены уравнения (4.184) на B_1 , получим:

$$T_2 \frac{d\omega_{дв}}{dt} + \omega_{дв} + B \omega_{дв}^2 \operatorname{sign} u = k_2 u, \quad (4.185)$$

где

$$T_2 = \frac{J_2}{B_1} [\text{сек}], \quad B = \frac{B_2}{B_1} [\text{сек}], \quad k_2 = \frac{c_1}{B_1} \left[\frac{1}{\text{в} \cdot \text{сек}} \right].$$

Введем обозначения:

$$F(\omega_{\text{дв}}, u) = B\omega_{\text{дв}}^2 \operatorname{sign} u. \quad (4.186)$$

Нелинейная функция (4.186), согласно ранее приведенной классификации (см. главу I), относится к типу нелинейностей второго класса. Поэтому при гармонической линеаризации необходимо вводить в уравнение звена, в данном случае в уравнение двигателя, две амплитуды колебаний A_u и A_ω , полагая

$$\begin{aligned} \omega_{\text{дв}} &= A_\omega \sin \Omega t, \\ u &= A_u \sin (\Omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.187)$$

Искомые периодические решения для $\omega_{\text{дв}}$ и u связываются через амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $W_\lambda(j\omega)$ следующим соотношением:

$$\frac{A_u}{A_\omega} = |W_\lambda(j\omega)| = A, \quad \varphi = \arg W_\lambda(j\omega)$$

и, следовательно,

$$u = AA_\omega \sin (\Omega t + \varphi). \quad (4.188)$$

При учете (4.187) и (4.188) нелинейная функция (4.186) запишется в виде

$$F(\omega_{\text{дв}}, u) = BA_\omega^2 \sin^2 \Omega t \operatorname{sign} \sin (\Omega t + \varphi). \quad (4.189)$$

В соответствии с методом гармонической линеаризации при выполнении условия

$$\int_0^{2\pi} F(\omega_{\text{дв}}, u) d\psi = 0, \quad \psi = \Omega t,$$

нелинейная функция (4.189) заменяется соотношением

$$F(\omega_{\text{дв}}) = \left[q(A_\omega, \Omega) + \frac{q'(A_\omega, \Omega)}{\Omega} p \right] \omega_{\text{дв}}, \quad (4.190)$$

где $q(A_\omega, \Omega)$ и $q'(A_\omega, \Omega)$ — коэффициенты гармонической линеаризации.

Для нелинейной функции (4.189) в соответствии с формулами (3.36) и (3.37) получим следующие значения для коэффициентов гармонической линеаризации:

$$\left. \begin{aligned} q(A_\omega, \Omega) &= \frac{4BA_\omega}{\pi} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right), \\ q'(A_\omega, \Omega) &= -\frac{4BA_\omega}{3\pi} \sin^3 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.191)$$

С учетом (4.191) соотношение (4.190) переписывается в виде

$$F(\omega_{\text{дв}}) = \frac{4BA_\omega}{\pi} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3\Omega} p \right) \omega_{\text{дв}}. \quad (4.192)$$

Заметим, что при $\varphi = 0$ уравнение (4.192) примет вид

$$F(\omega_{\text{дв}}) = \frac{8BA_{\omega}}{3\pi} \omega_{\text{дв}}, \quad (4.193)$$

соответствующий гармонической линеаризации нелинейности

$$F(\omega_{\text{дв}}) = B\omega_{\text{дв}}^3 \operatorname{sign} \omega_{\text{дв}}.$$

Гармонически линеаризованное уравнение двигателя в соответствии с (4.185) будет

$$\left[T_2 p + 1 + q(A_{\omega}, \Omega) + \frac{q'(A_{\omega}, \Omega)}{\Omega} p \right] \omega_{\text{дв}} = k_2 u, \quad (4.194)$$

где $q(A_{\omega}, \Omega)$ и $q'(A_{\omega}, \Omega)$ имеют значения (4.191).

Выполним гармоническую линеаризацию уравнения

$$T_2 \frac{d\omega_{\text{дв}}}{dt} + \omega_{\text{дв}} + B\omega_{\text{дв}}^3 \operatorname{sign} \omega_{\text{дв}} \operatorname{sign} u = k_2 u. \quad (4.195)$$

Таким уравнением описываются, например, двигатели типа АДП-263 и АДП-363.

Для периодических процессов нелинейность

$$F(\omega_{\text{дв}}, u) = B\omega_{\text{дв}}^3 \operatorname{sign} \omega_{\text{дв}} \operatorname{sign} u \quad (4.196)$$

запишется в виде

$$F(\omega_{\text{дв}}, u) = B(A_{\omega} \sin \Omega)^3 \operatorname{sign} \sin \Omega t \operatorname{sign} \sin(\Omega t + \varphi), \quad (4.197)$$

где φ , как и раньше, определяется через линейную часть системы

$$\varphi = \arg W_{\text{л}}(j\omega).$$

Так как функция (4.197) удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} F(\omega_{\text{дв}}, u) d\psi = 0, \quad \psi = \Omega t,$$

то соотношение (4.190) остается в силе. Коэффициенты гармонической линеаризации в этом случае в соответствии с (3.39) и (3.40) принимают значения:

$$\left. \begin{aligned} q(A_{\omega}, \Omega) &= \frac{BA_{\omega}^3}{\pi} \left(\frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right), \\ q'(A_{\omega}, \Omega) &= -\frac{BA_{\omega}^3}{\pi} \sin^4 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.198)$$

С учетом (4.198) формула гармонической линеаризации для нелинейности (4.196) будет

$$F(\omega_{\text{дв}}) = \frac{BA_{\omega}^3}{\pi} \left(\frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi - \frac{\sin^4 \varphi}{\Omega} p \right) \omega_{\text{дв}}, \quad (4.199)$$

при $\varphi = 0$

$$F(\omega_{\text{дв}}) = \frac{3BA_{\omega}^3}{4} \omega_{\text{дв}}. \quad (4.200)$$

Выполним анализ собственного движения замкнутой системы с двигателем АДП как нелинейным звеном. Возьмем систему простой структуры. Допустим, что линейная часть системы описывается уравнением

$$(T_1 p + 1)u = -k_1 \beta, \quad (4.201)$$

где $T_1 [\text{сек}]$ — постоянная времени линейного звена, $k_1 [\delta]$ — передаточное число линейного звена, β — угловая координата на выходе нелинейного звена.

Продифференцировав уравнение (4.201) по времени и учитывая, что $p\beta = \omega_{\text{дв}}$, получим:

$$(T_1 p + 1)pu = -k_1 \omega_{\text{дв}}. \quad (4.202)$$

Объединяя гармонически линеаризованное уравнение двигателя (4.194) и уравнение (4.202), получим уравнение системы для переменной $\omega_{\text{дв}}$:

$$\left[\left(T_1 T_2 + \frac{T_1 q'}{\Omega} \right) p^3 + \left(T_1 + T_2 + T_1 q + \frac{q'}{\Omega} \right) p^2 + \right. \\ \left. + (q + 1)p + k \right] \omega_{\text{дв}} = 0, \quad (4.203)$$

где $k = k_1 k_2$ — коэффициент усиления системы. Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (4.203), будет

$$\left(T_1 T_2 + \frac{T_1 q'}{\Omega} \right) p^3 + \left(T_1 + T_2 + T_1 q + \frac{q'}{\Omega} \right) p^2 + \\ + (q + 1)p + k = 0. \quad (4.204)$$

Подставив $p = j\Omega$, выделяем вещественную и мнимую части $X(A_\omega, \Omega)$, $Y(A_\omega, \Omega)$, откуда, учитывая значения коэффициентов гармонической линеаризации (4.191), получаем два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения (для переменной $\omega_{\text{дв}}$):

$$\left[T_1 + T_2 + \frac{4T_1 B A_\omega}{\pi} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right] \Omega^2 - \\ - \frac{4B A_\omega \sin^3 \varphi}{3\pi} \Omega - k = 0, \quad (4.205)$$

$$T_1 T_2 \Omega^3 - \frac{4T_1 B A_\omega \sin^3 \varphi}{3\pi} \Omega - \\ - \frac{4B A_\omega}{\pi} \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) - 1 = 0, \quad (4.206)$$

где $\varphi = \arctg T_1 \Omega$.

Уравнения (4.205) и (4.206) позволяют определить значение амплитуды и частоты периодического решения для угловой скорости двигателя при заданных параметрах системы, а также построить кривые изменения амплитуды и частоты в зависимости от изменения любого параметра системы при постоянных значениях других параметров. Такое построение дает возможность выбирать параметры из условия

обеспечения желательного установившегося режима. Определим зависимость изменения амплитуды и частоты периодического решения от коэффициента усиления. Для этого выразим амплитуду через частоту из уравнения (4.206) и коэффициент усиления через частоту из уравнения (4.205). В результате после преобразований получим:

$$A_{\omega} = \frac{\pi (T_1 T_2 \Omega^2 - 1)}{4B \left(\frac{T_1 \sin^3 \varphi}{3} \Omega + \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right)}, \quad (4.207)$$

$$k = \left[T_1 + T_2 + \frac{(T_1^2 T_2 \Omega^2 - T_1) \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right)}{\frac{T_1 \sin^3 \varphi}{3} \Omega + \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi} \right] \Omega^2 - \frac{(T_1 T_2 \Omega^2 - 1) \sin^3 \varphi}{T_1 \sin^3 \varphi \Omega + 3 \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right)}. \quad (4.208)$$

Как видно из (4.207), положительные значения амплитуды, т. е. периодическое решение, возможны только при

$$\Omega > \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

и, следовательно, критическое значение частоты определится соотношением

$$\Omega_{кр} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad \text{при} \quad A_{\omega} = 0. \quad (4.209)$$

Подставив (4.209) в (4.208), получим значение критического коэффициента усиления

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Заметим, что, как и в предыдущем примере, значение $k_{кр}$ совпадает со значением $k_{гр}$, определяемым из условия границы устойчивости данной системы, анализируемой на основании линейного уравнения. Следовательно, периодическое решение возможно только за областью устойчивости линейной системы при

$$k > k_{кр} = k_{гр}.$$

Исследования устойчивости периодического решения в данном случае проводить нет необходимости, так как для аналогичного примера это было выполнено ранее. Отличие здесь состоит только в способе аппроксимации нелинейных механических характеристик двухфазного индукционного двигателя.

Формулы (4.207) и (4.208) позволяют построить зависимости $A_{\omega}(k)$ и $\Omega(k)$. Так как интересно знать амплитуды угловой координаты на

выходе двигателя A_β , то полученные значения A_β можно пересчитать по соотношению

$$A_\beta = \frac{A_\omega}{\Omega}.$$

Рассмотрим систему с двигателем, описываемым уравнением (4.195). Характеристическое уравнение в этом случае остается в той же форме (4.204), но при других значениях q и q' , определяемых соотношениями (4.198). С учетом этого из характеристического уравнения при $p = j\Omega$ получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\left[T_1 + T_2 + \frac{T_1 B A_\omega^2}{\pi} \left(\frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \right] \Omega^2 - \frac{B A_\omega^2 \sin^4 \varphi}{\pi} \Omega - k = 0, \quad (4.210)$$

$$T_1 T_2 \Omega^2 - \frac{T_1 B A_\omega^2 \sin^4 \varphi}{\pi} \Omega - \frac{B A_\omega^2}{\pi} \left(\frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) - 1 = 0. \quad (4.211)$$

Из (4.210) и (4.211) получим формулы для определения амплитуды и коэффициента усиления через частоту:

$$A_\omega^2 = \frac{\pi (T_1 T_2 \Omega^2 - 1)}{B \left(T_1 \sin^4 \varphi \Omega + \frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right)}, \quad (4.212)$$

$$k = \left[T_1 + T_2 + \frac{T_1 (T_1 T_2 \Omega^2 - 1) \left(\frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right)}{T_1 \sin^4 \varphi \Omega + \frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \sin \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi} \right] \Omega^2 - \frac{(T_1 T_2 \Omega^2 - 1) \sin^4 \varphi \Omega}{T_1 \sin^4 \varphi \Omega + \frac{3}{4} \pi - \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi}. \quad (4.213)$$

По формулам (4.212) и (4.213) были построены кривые $A_\beta(k)$ и $\Omega(k)$ для системы с двигателем АДП-363 при следующих значениях параметров: $T_1 = 0,02$ сек, $B = \frac{B_2}{B_1} = 38 \cdot 10^{-6}$ сек, $T_2 = 1,5$ сек, $J_2 = 0,105$ г · см · сек² (рис. 4.44, пунктирные кривые 1). На том же рисунке приведены экспериментально снятые зависимости (сплошные кривые 2) и зависимости, полученные при использовании упрощенной аппроксимации вида (4.181) (пунктирные кривые 3).

Как видно из рис. 4.44, применение аппроксимации механических характеристик асинхронных двухфазных двигателей полиномом от угловой скорости дает достаточно точный результат при исследовании.

Для данного случая, даже при учете особенностей характеристик двигателя в тормозном режиме, конечный результат мало отличается от случая использования уравнений двигательного режима. Однако в общем случае учет тормозного режима может оказаться целесообразным.

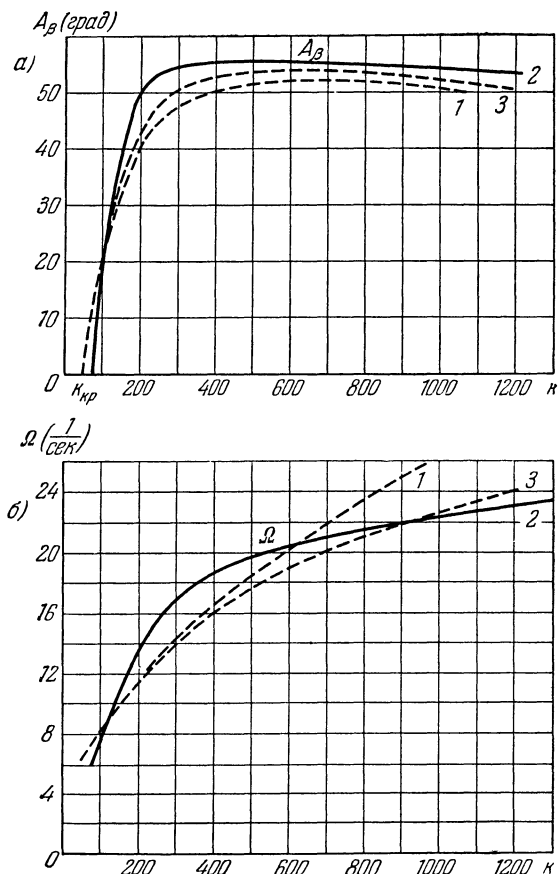


Рис. 4.44.

Подобно изложенному можно выполнить построение кривых изменения амплитуды и частоты автоколебаний в зависимости от других параметров системы. Это позволит выявить конструктивные возможности для подавления автоколебаний или получения приемлемого автоколебательного режима.

В данной системе ввиду резкого нарастания амплитуды при увеличении коэффициента усиления получение автоколебательного режима с малой амплитудой затруднено.

§ 4.14. Система с двухфазным индукционным двигателем при учете сухого трения

Рассмотрим следующую систему с двухфазным индукционным двигателем, представленную в виде структурной схемы на рис. 4.45. Исследуем систему при совместном учете двух видов нелинейностей —

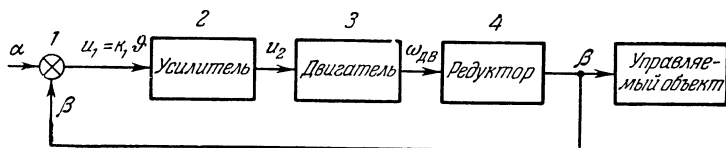


Рис. 4.45.

нелинейных механических характеристик двухфазного индукционного двигателя и сухого трения в управляемом объекте. Учет сухого трения (кроме нелинейных механических характеристик) представляет практический интерес, так как широко распространены маломощные следящие системы, момент сухого трения в которых оказывает существенное влияние на поведение следящей системы.

Сухое трение на валу двигателя будем учитывать в виде статической характеристики (рис. 4.46). Механические характеристики двухфазного индукционного двигателя представлены на рис. 4.40. Если не рассматривать случая остановок двигателя, когда момент трения может принимать значения $-c < M_{тр} < c$, а нелинейность механических характеристик учесть в виде степенного полинома от $\omega_{дв}$, ограничиваясь двумя членами (как это делалось в § 4.13), то уравнение двигателя с учетом инерционности управляемого объекта будет

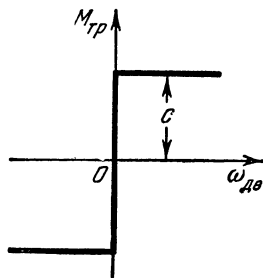


Рис. 4.46.

$$J\dot{\omega}_{дв} + A_1\omega_{дв} + A_2\omega_{дв}^3 + c \operatorname{sign} \omega_{дв} = k_{дв}u_2$$

и после деления всех членов на A_1 примет вид

$$T_2\dot{\omega}_{дв} + \omega_{дв} + B_1\omega_{дв}^3 + B_2 \operatorname{sign} \omega_{дв} = k_3u_2, \quad (4.214)$$

где

$$T_2 = \frac{J}{A_1}, \quad B_1 = \frac{A_2}{A_1}, \quad B_2 = \frac{c}{A_1}, \quad k_3 = \frac{k_{дв}}{A_1}.$$

Член $c \operatorname{sign} \omega_{дв}$ определяет сухое трение. Нелинейность здесь выделим в виде

$$F(\omega_{дв}) = B_1\omega_{дв}^3 + B_2 \operatorname{sign} \omega_{дв}. \quad (4.215)$$

Будем искать решение для угловой скорости $\omega_{\text{дв}}$ в виде гармонических колебаний

$$\omega_{\text{дв}} = A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t.$$

Выполняя гармоническую линеаризацию нелинейной функции $F(\omega_{\text{дв}})$, получим:

$$F(\omega_{\text{дв}}) = q(A) \omega_{\text{дв}}, \quad (4.216)$$

где коэффициент гармонической линеаризации в соответствии с (3.32) и (3.50) будет

$$q(A) = \frac{3}{4} B_1 A^2 + \frac{4B_2}{\pi A}.$$

Учитывая выражения (4.215) и (4.216), из уравнения (4.214) получим гармонически линеаризованное уравнение двигателя

$$[T_2 p + q(A) + 1] \omega_{\text{дв}} = k_3 u_2. \quad (4.217)$$

Полагаем, что в качестве усилителя применяется магнитный однокаскадный усилитель. Учитывая инерционность магнитного усилителя, его уравнение запишем в виде

$$(T_1 p + 1) u_2 = k_2 u_1, \quad (4.218)$$

где T_1 — постоянная времени управляющей цепи магнитного усилителя, а k_2 — его коэффициент усиления.

Датчик рассогласований имеет уравнение

$$u_1 = k_1 (\alpha - \beta). \quad (4.219)$$

Для редуктора, считая выходной величиной угол поворота управляемого объекта β и входной — скорость двигателя $\omega_{\text{дв}}$, запишем:

$$p\beta = k_4 \omega_{\text{дв}}. \quad (4.220)$$

Объединяя уравнения (4.217) — (4.220) в единое уравнение для переменной $\omega_{\text{дв}}$ и полагая при исследовании собственного движения системы $\alpha = \text{const}$, получим:

$$\{ T_1 T_2 p^3 + [T_1 q(A) + T_1 + T_2] p^2 + [q(A) + 1] p + k \} \omega_{\text{дв}} = 0, \quad (4.221)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_4$ — коэффициент усиления следящей системы.

Заменяя в характеристическом уравнении, соответствующем дифференциальному уравнению (4.221), p на $j\Omega$ и разделяя вещественную и мнимую части, получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} k - [T_1 q(A) + T_1 + T_2] \Omega^2 &= 0, \\ 1 + q(A) - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.222)$$

Для выделения области периодического решения воспользуемся здесь удобным графоаналитическим приемом, который был изложен в § 2.3 под названием пятого способа.

Периодическое решение возможно только при вполне определенных значениях амплитуды и частоты, удовлетворяющих каждому из уравнений (4.222). Из второго уравнения видно, что периодическое решение должно удовлетворять равенству

$$q(A) = T_1 T_2 \Omega^2 - 1,$$

левая часть которого зависит только от значений амплитуды, а правая — только от значений частоты (при заданных параметрах).

Отсюда вытекает возможность графического определения ожидаемых периодических решений. Для этого достаточно построить кривую $q(A)$, задаваясь значениями амплитуды A , и провести прямые $T_1 T_2 \Omega^2 - 1$ для различных значений Ω . Точки пересечения построенной кривой и прямых дают значение амплитуды и частоты периодического решения (рис. 4.47).

В случае, если прямая для соответствующего значения Ω не пересекается с кривой $q(A)$, то это значит, что данная частота периодического решения невозможна.

Случай касания прямой для некоторого значения Ω с кривой $q(A)$, если последняя имеет максимум или минимум, соответствует критическому значению амплитуды и частоты периодического решения на границе между областями наличия и отсутствия периодического решения. Так, для рассматриваемой системы критическое значение амплитуды определится из условия минимума $q(A)$. Взяв производную от $q(A)$ по A и приравняв ее нулю, с учетом значения $q(A)$ получим:

$$\frac{d\left(\frac{3}{4} B_1 A^2 + \frac{4B_2}{\pi A}\right)}{dA} = \frac{3}{2} B_1 A - \frac{4B_2}{\pi A^2} = 0,$$

откуда

$$A_{кр} = 2 \sqrt[3]{\frac{B_2}{3\pi B_1}}, \quad \Omega_{кр}^2 = \frac{1}{T_1 T_2} + \frac{3B_2 \sqrt[3]{3\pi B_1}}{\pi T_1 T_2 \sqrt[3]{B_2}}, \quad q_{кр} = \frac{3B_2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3\pi B_1}{B_2}}.$$

Имея графическое построение (рис. 4.47), по первому уравнению (4.222) легко выполнить построение зависимостей амплитуды и частоты периодического решения от общего коэффициента усиления следящей системы. Заменяя в первом уравнении (4.222) Ω^2 на ее значение из второго уравнения, получим:

$$k = \frac{1 + q(A)}{T_1} + \frac{[1 + q(A)]^2}{T_2}. \quad (4.223)$$

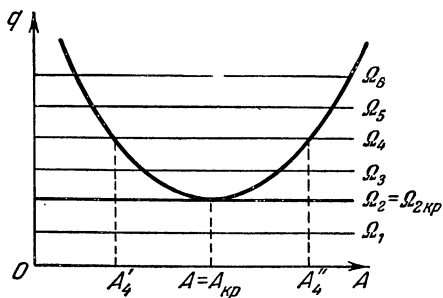


Рис. 4.47.

Задаваясь в формуле (4.223) в соответствии с графиком рис. 4.47 значениями $q(A)$, при известных параметрах системы получим значения k . Из того же графика (рис. 4.47) определим значения амплитуды A и частоты Ω , соответствующие полученным значениям k .

Для получения значения $k_{кр}$ подставим в (4.223) значение $q_{кр}(A)$. В результате получим аналитическое выражение для критического значения коэффициента усиления следящей системы:

$$k_{кр} = \frac{D}{T_1} + \frac{D^2}{T_2}, \quad D = 1 + \frac{3B_2}{\pi} \sqrt{\frac{3\pi B_1}{B_2}}. \quad (4.224)$$

Из формулы (4.223) для k и формулы для $q(A)$ можно усмотреть, что k возрастает с увеличением амплитуды A и при $A \rightarrow \infty k \rightarrow \infty$; кроме того, при $A \rightarrow 0 k \rightarrow \infty$.

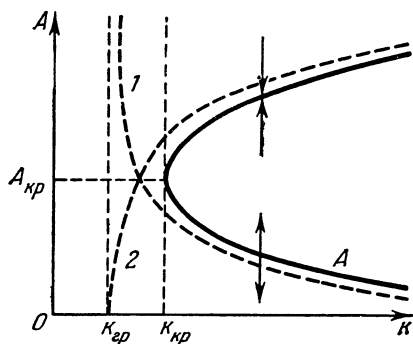


Рис. 4.48.

Из (4.223) очевидно, что при существовании минимума для $q(A)$ существует минимум и для $k(A)$. Таким образом определяется характер зависимости амплитуды периодического решения от коэффициента усиления следящей системы k (рис. 4.48).

Покажем, что из двух ветвей для амплитуды восходящая ветвь принадлежит устойчивому периодическому решению — автоколебаниям, а нисходящая ветвь является границей устойчивости «в малом».

Для этого применим приближенный критерий устойчивости периодического решения (4.6).

Из (4.221) следует:

$$X(a, \omega) = k - [T_1 q(a) + T_1 + T_2] \omega^2,$$

$$Y(a, \omega) = [q(a) + 1] \omega - T_1 T_2 \omega^3.$$

Вычисляя соответствующие производные, получим:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* = -T_1 \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^* \Omega^2 \begin{cases} > 0 & \text{при } A < A_{кр}, \\ < 0 & \text{при } A > A_{кр}, \end{cases}$$

так как, согласно рис. 4.47, имеем:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^* \begin{cases} > 0 & \text{при } A > A_{кр}, \\ < 0 & \text{при } A < A_{кр}. \end{cases}$$

Далее,

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = q(A) + 1 - 3T_1 T_2 \Omega^2,$$

но так как из второго уравнения (4.222) $\Omega^2 = \frac{1+q(A)}{T_1 T_2}$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* &= -2[1+q(A)] < 0; \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -2[T_1 q(A) + T_1 + T_2] \Omega < 0; \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)^* \Omega \begin{cases} > 0 & \text{при } A > A_{\text{кр}}, \\ < 0 & \text{при } A < A_{\text{кр}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя значения соответствующих производных, с учетом их знаков получаем, что критерий

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0$$

выполняется при $A > A_{\text{кр}}$ для восходящей ветви амплитуд и не выполняется при $A < A_{\text{кр}}$ для нисходящей ветви амплитуд. Это условно отмечено сходящимися стрелками (рис. 4.48) к ветви устойчивого периодического решения и расходящимися стрелками от ветви неустойчивого периодического решения.

Теперь становится ясной картина поведения системы при любых значениях коэффициента усиления k . Для $k \geq k_{\text{кр}}$ при начальных значениях отклонения скорости вращения двигателя меньших значений нисходящей ветви система устойчива «в малом» (относительно равновесного состояния). При $k \geq k_{\text{кр}}$ и начальных отклонениях больших значений нисходящей ветви в системе устанавливаются автоколебания с амплитудами, соответствующими значениям восходящей ветви. Распространяя результат, полученный в области $k \geq k_{\text{кр}}$ (область автоколебаний), на область значений $k < k_{\text{кр}}$, убеждаемся, что в ней имеется устойчивость относительно равновесного состояния при любых начальных отклонениях скорости двигателя следящей системы.

Рассматривая исследуемую следящую систему в виде линейной при $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ и, следовательно, при $q(A) = 0$, из (4.221) получим характеристическое уравнение

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k = 0.$$

Из условия границы устойчивости

$$T_1 + T_2 = k T_1 T_2$$

получим граничное значение коэффициента усиления следящей системы

$$k_{\text{гр}} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}. \quad (4.225)$$

Сравнивая формулы для $k_{\text{кр}}$ (4.224) и $k_{\text{гр}}$ (4.225), видим, что критическое значение коэффициента усиления больше граничного (соответствующего границе устойчивости линейной системы) на величину, определяемую вторым слагаемым выражения D в формуле для $k_{\text{кр}}$. Следовательно, наличие нелинейности в механических характеристиках

двухфазного индукционного двигателя и сухого трения на его валу приводит к расширению области устойчивости по коэффициенту усиления следящей системы по сравнению с такой же по структуре линейной следящей системой (с прямилинейными механическими характеристиками и без сухого трения).

Это можно объяснить на основании ранее выполненных исследований. Учет только сухого трения в следящей системе (см. § 4.9 и рис. 4.32) приводил к расширению области устойчивости, соответствующей линейной следящей системе, причем за счет сухого трения к области устойчивости линейной системы добавлялась область устойчивости «в малом» при $k_{гр} = k_{кр}$. Учет нелинейности механических характеристик исполнительного двигателя следящей системы приводил к результату, что за областью устойчивости линейной системы лежит область автоколебаний при $k_{гр} = k_{кр}$ (см. §§ 4.12 и 4.13, рис. 4.42, б и 4.44, а).

Теперь при совместном учете сухого трения и нелинейности механических характеристик исполнительного двигателя два указанные эффекта складываются. Если учет сухого трения дает ветвь $A(k)$, соответствующую неустойчивому периодическому решению (пунктирная кривая 1 на рис. 4.48), а учет нелинейности механических характеристик дает ветвь, соответствующую устойчивым периодическим решениям (пунктирная кривая 2 на рис. 4.48), то за счет суммарного воздействия двух указанных нелинейностей кривая $A(k)$, естественно, должна сместиться в сторону больших значений k и вписаться в область между приведенными пунктирными кривыми, что и получено при выполненном исследовании.

§ 4.15. Релейная следящая система с линейной и нелинейной обратной связью

Проведем исследование релейной следящей системы с дополнительной обратной связью для двух случаев. В первом случае дополнительную

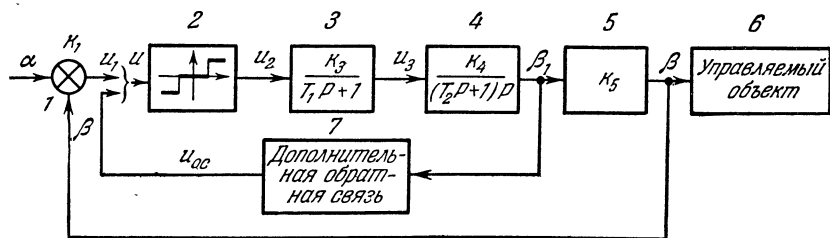


Рис. 4.49.

связь примем линейной по скорости исполнительного двигателя. Во втором случае введем нелинейную обратную связь с квадратичной зависимостью от скорости. Это позволит сделать вывод о целесообразности применения той или иной дополнительной обратной связи.

Структурная схема исследуемой релейной системы представлена на рис. 4.49, где 1 — датчик рассогласований с передаточным коэффициентом k_1 ; 2 — релейный элемент, имеющий релейную характеристику с зоной нечувствительности; 3 — второй каскад усиления; 4 — двигатель; 5 — редуктор; 6 — управляемый объект; 7 — дополнительная обратная связь.

Передаточные функции линейных звеньев даны на структурной схеме.

Для нелинейного звена — релейного элемента — со статической характеристикой, представленной на рис. 4.50, после гармонической линеаризации получим:

$$u_2 = q(A)u, \quad u = u_1 - u_{o.c.} \quad (4.226)$$

где в соответствии с (3.13)

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}. \quad (4.227)$$

Для обратной связи в первом случае исследования уравнение будет

$$u_{o.c.} = k_{o.c.} p \beta_1. \quad (4.228)$$

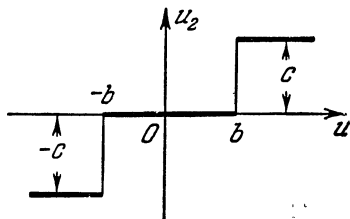


Рис. 4.50.

Учитывая передаточные функции линейных звеньев (4.226) и (4.228), получим характеристическое уравнение, соответствующее гармонически линеаризованному дифференциальному уравнению, описывающему собственное движение системы для переменной u :

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + [1 + k_3 k_4 k_{o.c.} q(A)] p + k_1 k_3 k_4 k_8 q(A) = 0. \quad (4.229)$$

Подставив в (4.229) $p = j\Omega$, получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} k_1 k_3 k_4 k_8 q(A) - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 + k_3 k_4 k_{o.c.} q(A) - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.230)$$

Выполним построение области устойчивости на плоскости параметров $k_{o.c.}$ и k_1 . Для этого предварительно определим критические значения коэффициента гармонической линеаризации $q(A)_{кр}$, амплитуды $A_{кр}$ и частоты $\Omega_{кр}$.

Для релейной характеристики с зоной нечувствительности критическое значение амплитуды, получаемое из условия

$$\frac{dq(A)}{dA} = 0,$$

было определено в § 3.1 (рис. 3.4) и составляет

$$A_{кр} = \sqrt{2}b. \quad (4.231)$$

Критическое значение коэффициента гармонической линеаризации в соответствии с (4.227) и с учетом (4.231) будет

$$q_{кр}(A) = \frac{2c}{\pi b}. \quad (4.232)$$

Из первого уравнения (4.230) следует:

$$\Omega^2 = \frac{k_1 k_3 k_4 k_5 q(A)}{T_1 + T_2}. \quad (4.233)$$

Тогда с учетом (4.232) получим формулу для критического значения частоты колебаний:

$$\Omega_{кр}^2 = \frac{2k_1 k_3 k_4 k_5 c}{\pi b (T_1 + T_2)}. \quad (4.234)$$

Для построения границы, разделяющей область периодических решений и область отсутствия периодических решений, необходимо выразить параметры $k_{o.c}$ и k_1 один через другой при критических значениях амплитуды и частоты.

Из второго уравнения (4.230) получим:

$$k_{o.c} = \frac{T_1 T_2 \Omega^2 - 1}{k_3 k_4 q(A)}. \quad (4.235)$$

При подстановке критических значений $\Omega_{кр}^2$ и $q_{кр}(A)$ из (4.234) и (4.232) в последнее уравнение, получим уравнение границы, разделяющей указанные области:

$$k_{o.c} = \frac{k_5 T_1 T_2}{T_1 T_2} k_1 - \frac{\pi b}{2k_3 k_4 c}.$$

Как видно из полученной формулы, это будет прямая с углом наклона $\arctg \frac{k_5 T_1 T_2}{T_1 + T_2}$, смещенная вниз от начала координат на величину $\frac{\pi b}{2k_3 k_4 c}$. Кроме указанной прямой можно построить в области периодических решений линии одинаковых амплитуд периодического решения.

Для этого в тех же формулах следует задаваться для A значениями, отличными от критических. В данном примере это будут прямые, параллельные границе периодических решений.

Внутри области периодического решения возможны два значения амплитуды при одних и тех же значениях параметров k_1 и $k_{o.c}$, так как кривая $q(A)$ (рис. 3.4) имеет максимум.

Для того чтобы определить, какие из значений амплитуд, $A > A_{кр}$ или $A < A_{кр}$, принадлежат устойчивым периодическим решениям (автоколебаниям), можно применить приближенный критерий устойчивости (4.6). Распространяя результат, полученный для области периодических решений, на область отсутствия периодических решений, можно судить об устойчивости или неустойчивости процесса в последней области.

Проведем это применительно к исследуемой системе при следующих значениях параметров: $k_3 = 25$, $k_4 = 1 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$, $k_5 = 0,05$, $T_1 = 0,2 \text{ сек}$, $T_2 = 0,3 \text{ сек}$, $b = 0,4 \text{ в}$ и $c = 2 \text{ в}$.

В соответствии с (4.231) и (4.232) при принятых значениях параметров получим: $A_{кр} = 0,56 \text{ в}$, $q_{кр}(A) = 3,19 \text{ в}$. Выполняя вычисления по формуле (4.235) для критического значения и других возможных

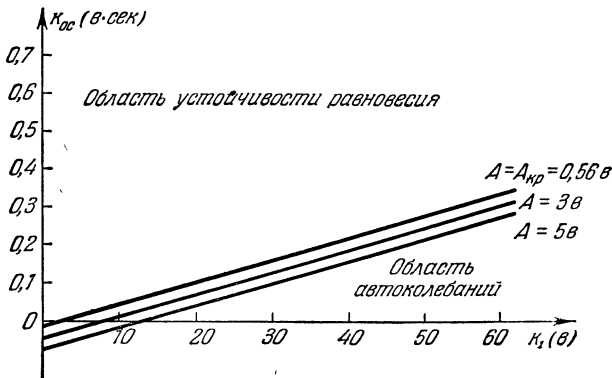


Рис. 4.51.

значений амплитуды внутри области периодических решений, получим результат, представленный на рис. 4.51.

Покажем, что значения амплитуд периодического решения $A > A_{кр}$ принадлежат устойчивому периодическому решению, а значения амплитуд $A < A_{кр}$ — неустойчивому периодическому решению. Для этого применим приближенный аналитический критерий устойчивости периодических решений (4.6).

Из (4.229) следует, что вещественная и мнимая части соответствующего характеристического уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} X(a, \omega) &= k_1 k_3 k_4 k_5 q(a) - (T_1 + T_2) \omega^3, \\ Y(a, \omega) &= [1 + k_3 k_4 k_{0.c} q(a)] \omega - T_1 T_2 \omega^3. \end{aligned} \right\} \quad (4.236)$$

Вычисляя производные, входящие в неравенство (4.6), получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* &= k_1 k_3 k_4 k_5 \left(\frac{dq}{da} \right)^*, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* &= 1 + k_3 k_4 k_{0.c} q(A) - 3 T_1 T_2 \Omega^2, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* &= -2 (T_1 + T_2) \Omega, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* &= k_3 k_4 k_{0.c} \left(\frac{dq}{da} \right)^* \Omega. \end{aligned}$$

Из второго уравнения (4.230) следует:

$$1 + k_3 k_4 k_{o.c} q(A) = T_1 T_2 \Omega^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = -2T_1 T_2 \Omega^2.$$

Применяя критерий устойчивости периодического решения

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0$$

с учетом значений частных производных, получим условие устойчивости в виде

$$\left(k_{o.c} - \frac{k_1 k_5 T_1 T_2}{T_1 + T_2}\right) \left(\frac{dq}{da}\right)^* > 0.$$

Так как в области периодических решений $k_{o.c}$ меньше критического значения (4.235), т. е.

$$k_{o.c} < \frac{k_5 T_1 T_2}{T_1 + T_2} k_1 - \frac{\pi b}{2k_3 k_4 c},$$

то разность, стоящая в первых скобках неравенства, будет меньше нуля. Следовательно, для выполнения критерия требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{dq}{da}\right)^* < 0.$$

Из графика $q(A)$ (рис. 3.4) следует, что это выполняется при $A > A_{кр}$ и не выполняется при $A < A_{кр}$. Следовательно, ветвь больших амплитуд периодического решения принадлежит автоколебаниям, а малых — неустойчивому периодическому решению. Полученный результат для области периодических решений позволяет сделать заключение об устойчивости следящей системы относительно равновесного состояния при значениях параметров k_1 и $k_{o.c}$, соответствующих области отсутствия периодического решения.

Рассмотрим теперь случай нелинейной дополнительной обратной связи. При той же структурной схеме следящей системы (рис. 4.49) дополнительную обратную связь возьмем в виде

$$u_{o.c} = k_{o.c} x^2 \operatorname{sign} x, \quad x = p\beta_1.$$

Полагаем, что периодическое решение для входной величины релейного звена определяется в виде

$$u = A_1 \sin \psi, \quad \psi = \Omega t,$$

а для входной величины нелинейного звена обратной связи в виде

$$x = p\beta_1 = A_2 \sin(\psi + B), \quad \psi = \Omega t,$$

где B — сдвиг по фазе переменной x относительно переменной u .

Выполняя гармоническую линеаризацию нелинейностей, получим: для релейного звена

$$u_2 = q_1(A_1)u,$$

где в соответствии с (4.227)

$$q_1(A_1) = \frac{4c}{\pi A_1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_1^2}};$$

для нелинейной обратной связи

$$u_{o.c} q_2(A_2)x = q_2(A_2)p\beta_1,$$

где, согласно (3.31):

$$q_2(A_2) = \frac{8k_{o.c}A_2}{3\pi}.$$

В соответствии со структурной схемой (рис. 4.49) для собственного движения системы при $\alpha=0$ следящую систему можно представить

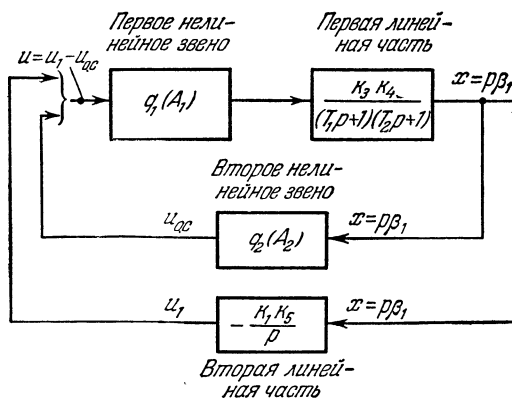


Рис. 4.52.

упрощенной структурной схемой (рис. 4.52), включающей две линейные части с соответствующими передаточными функциями и два нелинейных звена с передаточными функциями $q_1(A_1)$ и $q_2(A_2)$ для колебательных установившихся процессов.

Поступая по правилам для линейных систем, с учетом указанных передаточных функций, получим общее дифференциальное уравнение гармонически линеаризованной следящей системы:

$$\{T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + [k_3k_4q_1(A_1)q_2(A_2) + 1]p + k_1k_3k_4k_5q_1(A_1)\}u = 0.$$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы будет

$$T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + [k_3k_4q_1(A_1)q_2(A_2) + 1]p + k_1k_3k_4k_5q_1(A) = 0.$$

После подстановки $p = j\Omega$ получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} k_1 k_3 k_4 k_5 q_1(A_1) - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 + k_3 k_4 q_1(A_1) q_2(A_2) - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.237)$$

Так как в уравнения (4.237), кроме неизвестной частоты периодического решения, входят неизвестные амплитуды A_1 и A_2 двух различных переменных u и $x = p\beta_1$, то необходимо исключить одну из амплитуд. Воспользуемся для этого передаточной функцией звеньев, разделяющих указанные переменные. Передаточная функция от u к x (рис. 4.52) будет

$$W(A_1, p) = \frac{x}{u} = q_1(A_1) \frac{k_3 k_4}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}.$$

Следовательно, с учетом значения $q_1(A_1)$ найдем:

$$A_2(A_1, \Omega) = \frac{4c}{\pi A_1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_1^2}} \frac{k_3 k_4}{\sqrt{(1 - T_1 T_2 \Omega^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \Omega^2}} A_1. \quad (4.238)$$

С учетом значения $q(A_2)$ и A_2 из (4.238) получим:

$$q_2(A_1, \Omega) = \frac{8k_{o.c}}{3\pi} A_2 = k_{o.c} q_2^*(A_1, \Omega), \quad (4.239)$$

где

$$q_2^*(A_1, \Omega) = \frac{32ck_3k_4 \sqrt{A_1^2 - b^2}}{3\pi^2 A_1 \sqrt{(1 - T_1 T_2 \Omega^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \Omega^2}}.$$

В соответствии с (4.239) уравнения (4.237) примут вид

$$\left. \begin{aligned} k_1 k_3 k_4 k_5 q_1(A_1) - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 + k_3 k_4 k_{o.c} q_1(A_1) q_2^*(A_1, \Omega) - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.240)$$

Определяя критические значения переменных, получим для амплитуды колебаний переменной u из условия $\frac{dq_1(A_1)}{dA_1} = 0$ критическое значение

$$A_{1кр} = \sqrt{2} b;$$

критическое значение коэффициента гармонической линейаризации при этом будет

$$q_1(A_1)_{кр} = \frac{2c}{\pi b}.$$

Из первого уравнения (4.240) найдем:

$$\Omega^2 = \frac{k_1 k_3 k_4 k_5 q_1(A_1)}{T_1 + T_2}.$$

С учетом значения $q_1(A_1)_{\text{кр}}$ получим критическое значение частоты колебаний в виде

$$\Omega_{\text{кр}}^2 = \frac{2k_1 k_3 k_4 k_5 c}{\pi b (T_1 + T_2)}. \quad (4.241)$$

Критическое значение для коэффициента $q_2^*(A_1, \Omega)$ с учетом критических значений $A_{1\text{кр}}$ и $\Omega_{\text{кр}}$ будет

$$q_2^*(A_1, \Omega)_{\text{кр}} = \frac{32ck_3k_4}{3\sqrt{2}\pi^2\sqrt{(1-T_1T_2\Omega_{\text{кр}}^2)^2 + (T_1+T_2)^2\Omega_{\text{кр}}^2}}.$$

Из второго уравнения (4.240) с учетом критических значений, входящих в него переменных, получим формулу для границы устойчивости следящей системы с нелинейной дополнительной обратной связью на плоскости параметров k_1 и $k_{0.c}$:

$$k_{0.c} = \frac{3\sqrt{2}\pi^2 b (T_1 T_2 \Omega_{\text{кр}}^2 - 1) \sqrt{(1 - T_1 T_2 \Omega_{\text{кр}}^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \Omega_{\text{кр}}^2}}{64c^2 k_3^2 k_4^2}, \quad (4.242)$$

где $\Omega_{\text{кр}}^2(k_1)$ вычисляется по формуле (4.241).

Выполняя вычисления по формуле (4.242) с учетом ранее приведенных численных значений параметров, получим границу, отделяющую область устойчивости от области автоколебаний, в виде некоторой кривой (рис. 4.53). Указанная кривая пересекается с прямой, соответствующей границе устойчивости для случая линейной обратной связи. Исследования устойчивости периодического решения здесь проводить нет необходимости, так как результаты такого исследования для линейной обратной связи распространяются и на случай нелинейной обратной связи (положив, например, $k_{0.c} = 0$, получаем случай, относящийся как к первому, так и второму исследованию).

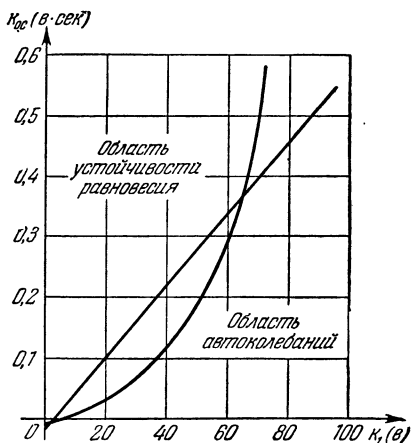


Рис. 4.53.

Из проведенного исследования можно заключить, что при определенных значениях параметров нелинейная квадратичная обратная связь по скорости расширяет область устойчивости следящей системы. Величина $k_{0.c}$ для такой обратной связи должна при заданных параметрах обязательно подбираться, так как при больших значениях $k_{0.c}$ и тех же значениях параметров область устойчивости начинает сужаться.

§ 4.16. Система генерирования колебаний тока с электромашинным усилителем

До сих пор рассматривались примеры исследования автоколебаний нелинейных автоматических систем с задачей определения либо возможностей подавления автоколебаний, либо возможностей уменьшения амплитуды автоколебаний.

Существуют замкнутые автоматические системы, в которых нелинейности используются для создания устойчивого колебательного режима с определенной амплитудой и частотой, т. е. для генериро-

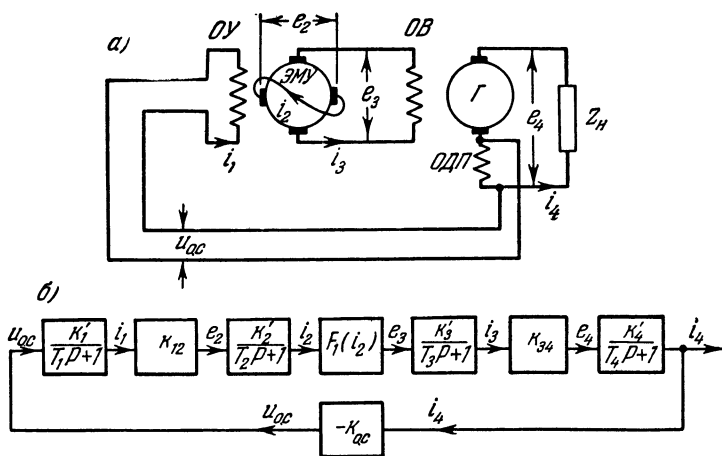


Рис. 4.54.

ваний колебаний. К таким системам прежде всего относятся генераторы передающих и приемных устройств связи, генераторы релаксационных колебаний. В данном параграфе рассматривается исследование мощной системы генерирования колебаний тока с низкой частотой, порядка единиц герц. Такие генераторы применяются для размагничивания сооружений из ферромагнитных материалов. Размагничивание необходимо, например, для обеспечения нормальной работы устанавливаемых на сооружениях магнитных компасов. Исследования по созданию такого генератора были выполнены И. А. Бородиной [132].

Вначале проведем исследование в простейшем варианте без учета внутренних обратных связей в электромашинном усилителе, входящем в схему замкнутой системы. Принципиальная схема системы генерирования колебаний тока представлена на рис. 4.54, а, где ОУ — обмотка управления электромашинного усилителя; ОВ — обмотка возбуждения генератора Г; ОДП — обмотка добавочных полюсов; Z_H — сопротивление нагрузки. Будем считать, что звенья, кроме короткозамкнутой цепи электромашинного усилителя, линейны. В коротко-

замкнутой цепи электромашиного усилителя будем учитывать нелинейность в виде насыщения. Систему в этом случае можно представить структурной схемой (рис. 4.54, б). Уравнения звеньев системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) i_1 &= k'_1 u_{o.c.}, \quad (T_2 p + 1) i_2 = k_{12} k_2 i_1, \\ (T_3 p + 1) i_3 &= k'_3 F_1(i_2), \quad (T_4 p + 1) i_4 = k_{34} k'_4 i_3, \quad u_{o.c.} = -k_{o.c.} i_4, \end{aligned} \right\} \quad (4.243)$$

где $F_1(i_2)$ — нелинейная функция, определяющая зависимость э. д. с. продольной цепи электромашиного усилителя от тока в короткозамкнутой поперечной цепи.

Нелинейную зависимость э. д. с. электромашиного усилителя, полученную экспериментально, приближенно представляем в виде степенного полинома по степеням i_2 до некоторого значения $i_2 < i_{2\max}$ и считаем постоянной при $i_2 > i_{2\max}$ (рис. 4.55), т. е.

$$\left. \begin{aligned} F_1(i_2) &= B i_2 - C i_2^3 + D i_2^5 \\ &\quad \text{при } i_2 \leq i_{2\max}, \\ F_1(i_2) &= F_{1\max} \operatorname{sign} i_2 \\ &\quad \text{при } i_2 \geq i_{2\max}, \end{aligned} \right\} \quad (4.244)$$

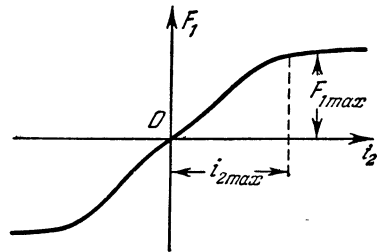


Рис. 4.55.

где коэффициенты B , C и D определяются на основании экспериментально снятой кривой $F_1(i_2)$ (см. § 3.5). Здесь не учитывается гистерезисная петля, которая может иметь место в подобных случаях.

Выполняя гармоническую линеаризацию нелинейной функции (4.244), получим:

$$F_1(i_2) = q_1(A) i_2, \quad (4.245)$$

где

$$q_1(A) = B - 0,75cA^2 + 0,625DA^4 \quad \text{при } A < i_{2\max},$$

$$\begin{aligned} q_1(A) = \{ & B (\arcsin \alpha - \alpha \xi) - cA^2 [0,75 \arcsin \alpha - \alpha \xi (0,75 + \\ & + 0,5\alpha^2)] + \frac{DA^4}{6} [3,75 \arcsin \alpha - \alpha \xi (3,75 + 2,5\alpha^2 + 2\alpha^4)] + \\ & + \frac{2}{A} F_{1\max} \xi \} \quad \text{при } A > i_{2\max}; \end{aligned}$$

$$\text{здесь } \alpha = \frac{i_{2\max}}{A}, \quad \xi = \sqrt{1 - \frac{i_{2\max}^2}{A^2}}.$$

Объединяя уравнения (4.243) и (4.245) в одно, для переменной i_2 получим общее дифференциальное уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$(a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4) i_2 = 0, \quad (4.246)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2 T_3 T_4, \quad a_1 = T_1 T_2 T_3 + T_1 T_2 T_4 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4, \\ a_2 &= T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_2 T_3 + T_2 T_4 + T_3 T_4, \quad a_3 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \\ a_4 &= 1 + k k_{o.c} q_1(A), \quad k = k'_1 k_{12} k'_2 k'_3 k_{34} k'_4. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (4.246), будет

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + 1 + k k_{o.c} q_1(A) = 0. \quad (4.247)$$

Из (4.247) при подстановке $p = j\Omega$ получим два уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} 1 + k k_{o.c} q_1(A) - a_2 \Omega^2 + a_0 \Omega^4 &= 0, \\ a_3 - a_1 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.248)$$

Из второго уравнения (4.248) получим формулу для частоты периодического решения

$$\Omega = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{T_1 T_2 T_3 + T_1 T_2 T_4 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4}}. \quad (4.249)$$

Первое уравнение (4.248) определяет зависимость амплитуды автоколебаний от параметров системы. Так, для коэффициента обратной связи $k_{o.c}$ с учетом значения Ω из (4.249) эта зависимость представляется формулой

$$k_{o.c} = \frac{a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2}{a_1^3 k q_1(A)}. \quad (4.250)$$

Определим устойчивость найденного периодического решения. Для этого вычислим производные, входящие в выражение для критерия устойчивости периодического решения (4.6). Из уравнения (4.247) получим:

$$X(a, \omega) = 1 + k k_{o.c} q_1(A) - a_2 \omega^2 + a_0 \omega^4,$$

$$Y(a, \omega) = a_3 \omega - a_1 \omega^3.$$

Соответствующие частные производные будут:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* = k k_{o.c} \left(\frac{d q_1}{d a} \right)^*,$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* = a_3 - 3 a_1 \Omega^2,$$

или с учетом значения Ω^2 из (4.249)

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* = -2 a_3 < 0.$$

Так как $\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* = 0$, то условие устойчивости сводится к выполнению неравенства

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* > 0,$$

а при учете значений производных — к выполнению условия

$$\left(\frac{dq_1}{da}\right)^* < 0. \quad (4.251)$$

На рис. 4.56 представлена кривая $q_1(A)$, рассчитанная для электромашиного усилителя ЭМУ-50. Как видно, в системе будут устанавливаться автоколебания при $A \geq A_{кр} = 4,2 a$, так как при этом выполняется условие (4.251). При $A < A_{кр} = 4,2 a$ периодическое решение является неустойчивым.

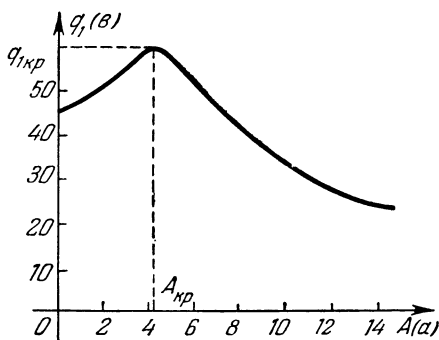


Рис. 4.56.

Выполним исследование для той же системы генерирования тока с учетом внутренних обратных связей в электромашином усилителе. Процессы,

протекающие в системе, описываются уравнениями звеньев [132]:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) i_1 &= k'_1 u_{o.c} - \frac{\chi}{k_{12}} e_3 - \frac{T_1 (\eta_1 + \eta_2)}{k_{12}} p e_4 - \frac{\eta_1}{k_{12}} e_4, \\ e_2 &= k_{12} i_1, \\ (T_2 p + 1) i_2 &= k'_2 e_2, \\ e_3 &= F_1(i_2), \\ (T_3 p + 1) i_3 &= k'_3 e_3, \\ e_4 &= k_{34} i_3, \\ (T_4 p + 1) i_4 &= k'_4 e_4, \\ u_{o.c} &= -k_{o.c} i_4, \end{aligned} \right\} (4.252)$$

где χ — коэффициент, учитывающий влияние размагничивающего потока; η_1 — коэффициент, учитывающий поток недокомпенсации; $\eta_2 = \eta'_2 + \eta_3$; η'_2 , η_3 — соответственно, коэффициенты, учитывающие потоки рассеяния компенсационной обмотки и лобовых частей якоря.

После выполнения гармонической линеаризации из системы уравнений (4.252) получим единое уравнение для переменной i_2 :

$$\{ a_0 p^4 + a_1 p^3 + [a_2 + T_4 k'_2 q_1(A) \lambda] p^2 + [a_3 + k_2 q_1(A) \gamma] p + + 1 + k'_4 q_1(A) \xi + k k_{o.c} q_1(A) \} i_2 = 0, \quad (4.253)$$

где

$$\begin{aligned}k &= k'_1 k'_{12} k'_3 k'_{34} k'_4, \\ \gamma &= \chi (T_3 + T_4) + k_3 [T_4 \eta_1 + T_1 (\eta_1 + \eta_2)], \\ \lambda &= \chi T_3 + k_3 T_1 (\eta_1 + \eta_2), \\ \xi &= \chi + k_3 \eta_1;\end{aligned}$$

коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и a_3 имеют прежние значения, а $k_3 = k'_3 k'_{34}$.

Из характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (4.253), после подстановки $p = j\Omega$ получим два уравнения для определения периодического решения:

$$\left. \begin{aligned}1 + k'_2 \xi q_1(A) + k k_{o.c} q_1(A) - [a_2 + T_4 k'_3 \lambda q_1(A)] \Omega^2 + a_0 \Omega^4 &= 0, \\ a_3 + k'_2 \gamma q_1(A) - a_1 \Omega^2 &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (4.254)$$

Из второго уравнения (4.254) находим:

$$q_1(A) = \frac{a_1 \Omega^2 - a_3}{k'_2 \gamma}. \quad (4.255)$$

Из первого уравнения (4.254) с учетом значения k получаем:

$$k_{o.c} = \frac{(a_2 - a_0 \Omega^2) \Omega^2 - 1}{k q_1(A)} + \frac{T_4 \lambda \Omega^2}{k'_1 k'_{12} k'_3 k'_{34} k'_4} - \frac{\xi}{k'_1 k'_{12} k'_3 k'_{34} k'_4}. \quad (4.256)$$

Формулы (4.255) и (4.256) показывают, что амплитуда и частота зависят от параметров системы и, кроме того, в отличие от предыдущего случая, связаны между собой. В этом случае в соответствии с графиком $q_1(A)$ (рис. 4.56) при одних и тех же значениях параметров получаем два значения амплитуды. Примем здесь без доказательства на основании предыдущего, что ветвь больших значений амплитуд принадлежит устойчивому периодическому решению (автоколебаниям), а ветвь малых амплитуд — неустойчивому периодическому решению.

На основании формул (4.255) и (4.256) был выполнен расчет и получены зависимости амплитуды и частоты периодического решения от коэффициента $k_{o.c}$ (рис. 4.57). При расчете учитывались следующие значения параметров, снятых экспериментально: постоянные времени электромашинного усилителя ЭМУ-50: $T_1 = 0,12$ сек, $T_2 = 0,22$ сек; постоянные времени генератора: $T_3 = 0,79$ сек, $T_4 = 0,45$ сек. Экспериментально получены также параметры: $\gamma = 0,020$, $\xi = 0,025$, $\lambda = -0,0049$. Коэффициенты усиления отдельных звеньев имели значения: $k'_1 = 1,1 \cdot 10^{-3}$, $k'_{12} = 125$ б/а, $k'_2 = 2,1$ а/б, $k'_3 = 0,40$ а/б, $k'_{34} = 5,13$ б/а, $k'_4 = 10$ а/б. Коэффициенты, входящие в аппроксимирующую функцию нелинейности $F_1(i_2)$, были равны: $B = 45,7$, $C = 2,06$, $D = -0,071$.

На рис. 4.57 представлены также зависимости $A(k_{o.c})$ и $\Omega(k_{o.c})$ (пунктирные кривые) для случая, когда не учитывались внутренние

обратные связи в электромашинном усилителе. Неучет внутренних обратных связей приводит к выводу о невозможности регулирования частоты генерируемых колебаний за счет изменения коэффициента $k_{o.c.}$

Проведенный эксперимент хорошо согласуется с результатом, полученным при учете внутренних обратных связей. Следовательно, учет внутренних обратных связей через магнитные потоки

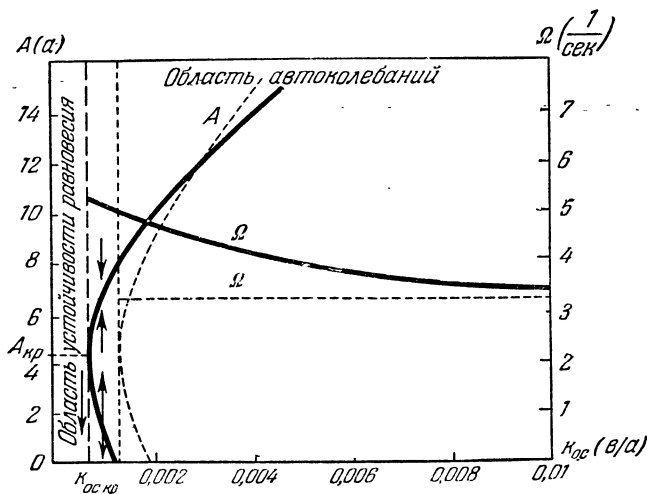


Рис. 4.57

электромашинного усилителя имеет существенное значение для представления процессов в нем с помощью дифференциальных уравнений.

Полученный результат для значений $k_{o.c.} > k_{o.c.кр}$ (в области автоколебаний) позволяет сделать заключение об устойчивости движения системы относительно равновесного состояния при значениях $k_{o.c.} < k_{o.c.кр}$ (в области отсутствия периодического решения).

Исследование автоколебаний было выполнено для переменной i_2 (ток в поперечной цепи электромашинного усилителя). С практической точки зрения важно определить изменение амплитуды тока i_4 в нагрузке. Полученные амплитудные значения A тока i_2 могут быть пересчитаны в амплитудные значения A_{i_4} тока i_4 через передаточную функцию звеньев, разделяющих переменные i_4 и i_2 . Указанная передаточная функция в соответствии со структурной схемой системы (рис. 4.54) будет

$$W(A, p) = \frac{i_4}{i_2} = \frac{k_3 k'_1 q_1(A)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

и, следовательно,

$$A_{i_4} = \frac{k_8 k'_4 q_1 (A)}{\sqrt{(T_3^2 \Omega^2 + 1)(T_4^2 \Omega^2 + 1)}} A. \quad (4.257)$$

В рассматриваемой системе желательно иметь широкий диапазон изменения амплитуды и частоты генерируемых колебаний при изменении параметров системы с тем, чтобы можно было изменять режим автоколебаний. Область изменения амплитуды и частоты автоколебаний может быть расширена за счет введения дополнительных обратных связей по напряжению с выхода электромашинного усилителя или генератора постоянного тока.

ГЛАВА V

ПРОХОЖДЕНИЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ СИГНАЛОВ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

§ 5.1. Несимметричные автоколебания и основы их определения

В предыдущих главах исследовались *симметричные* автоколебания как результат свободного движения системы (т. е. без внешнего воздействия) при симметричных нелинейностях. Однако, как будет показано, важнейшее практическое значение имеет также рассмотрение *несимметричных* автоколебаний. Простейшие иллюстрации этого положения уже были даны в §§ 1.6 — 1.8.

Несимметрия автоколебаний может вызываться различными причинами, как-то:

1) несимметричностью нелинейной характеристики как при наличии, так и при отсутствии внешних воздействий;

2) наличием постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия при симметричных нелинейностях;

3) наличием постоянной или медленно меняющейся скорости изменения внешнего воздействия при симметричных нелинейностях (для тех случаев, когда постоянное воздействие не вызывает смещения центра колебаний; обычно это имеет место в следящих системах и вообще в астатических системах).

В самом деле, если имеется несимметричная нелинейная характеристика (например, рис. 5.1, *а*, *б*), то даже при симметричных колебаниях переменной $x = A \sin \Omega t$ возникают несимметричные по амплитуде колебания переменной F (рис. 5.1, *б*). Если же нелинейность симметрична (например, рис. 5.2, *а*, *б*), то при наличии постоянного внешнего воздействия (или в астатических системах при наличии постоянной скорости изменения внешнего воздействия) смещается центр колебаний переменной $x = x^0 + A \sin \Omega t$, вследствие чего колебания переменной F становятся несимметричными по амплитуде и по времени (рис. 5.2, *а*) или только по времени (рис. 5.2, *б*).

Ранее, при изложении основ метода гармонической линеаризации в главе II, рассматривались однородные уравнения нелинейных систем.

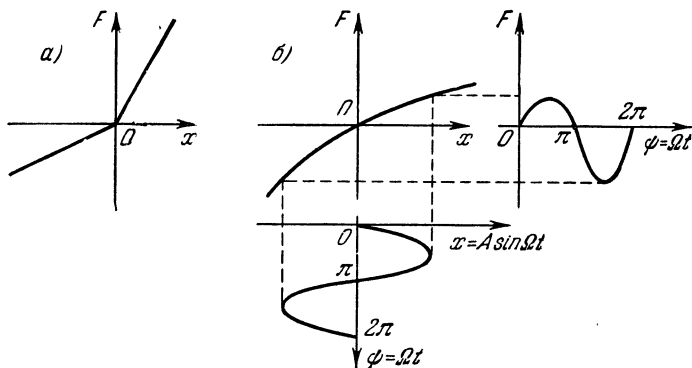


Рис. 5.1.

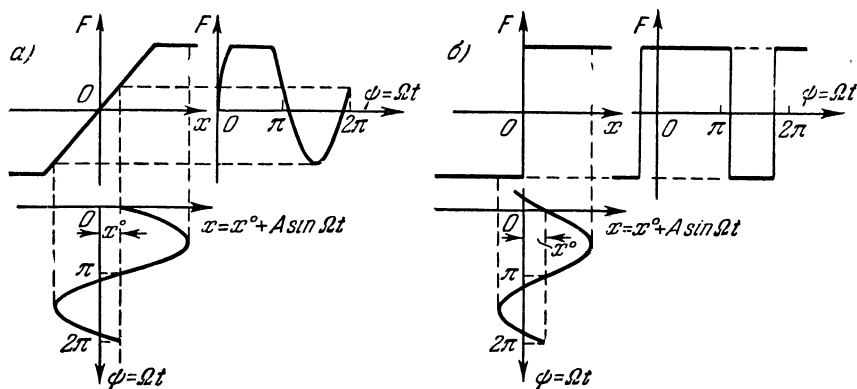


Рис. 5.2.

Теперь же будут исследоваться полные уравнения нелинейных систем, фигурировавшие в § 1.2, включающие внешние воздействия. В качестве основного уравнения для нелинейных систем первого класса запишем уравнение

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (5.1)$$

которое охватывает большинство практических задач, а затем сделаем обобщения и для других уравнений. Заметим здесь, что астатической системой называется такая, в которой многочлен $S(p)$ имеет общий множитель p , т. е. $S(p) = pS_1(p)$.

Если внешних воздействий несколько (m), то в правой части уравнения (5.1) будет стоять сумма

$$\sum_{i=1}^m S_i(p) f_i(t).$$

Внешнее воздействие $f(t)$ может быть либо возмущающим, либо управляющим (задающим). Это воздействие $f(t)$, а в астатических системах его скорость изменения $pf(t)$ будем считать в данной главе постоянными или медленно меняющимися. Медленно меняющейся будем называть такую функцию времени, которая сравнительно мало изменяется за период исследуемого периодического решения (автоколебаний), т. е. при этом соблюдается условие в виде одного из неравенств

$$|f(t+T) - f(t)| \ll |f(t)| \quad \text{или} \quad \left| \frac{df}{dt} \right| T \ll |f(t)|,$$

где $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, а Ω — частота автоколебаний. Соответственно для астатических систем медленно меняющейся скоростью $pf(t)$ будет такая, при которой выполняется условие

$$|pf(t+T) - pf(t)| \ll |pf(t)| \quad \text{или} \quad \left| \frac{dpf}{dt} \right| T \ll |pf(t)|.$$

Такое же условие будем накладывать и на изменение параметров во времени в нелинейных системах с медленно меняющимися параметрами, входящими в коэффициенты многочленов $Q(p)$ и $R(p)$.

Условие медленного изменения любой функции времени можно выразить также и в *частотной форме*, а именно: медленно меняющейся считается такая функция, возможные частоты изменения которой во времени значительно ниже возможной частоты исследуемого периодического решения.

Введенные предположения позволят величину $f(t)$ или соответственно $pf(t)$ и параметры системы считать постоянными за время каждого периода исследуемых автоколебаний. При этом предполагается, что заданное уравнение нелинейной системы при $f(t) = 0$ удовлетворяет всем условиям, указанным в § 2.3, кроме одного условия (2.74), которое может не выполняться (при несимметричной нелинейности).

Решение нелинейного уравнения (5.1), в отличие от (2.45), ищется в форме $x = x^0 + x_1 + \epsilon y(t)$, т. е. считается близким к синусоидальному с постоянной составляющей. Отсюда первое приближение вместо (2.73) будет иметь вид

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где} \quad x^* = A \sin \Omega t', \quad (5.2)$$

где t' — время, отсчитываемое внутри каждого периода колебаний, причем x^0 , A , Ω — неизвестные медленно меняющиеся функции

времени, зависящие от вида заданной функции $f(t)$, стоящей в правой части уравнения (5.1). Они будут постоянными при $f(t) = \text{const}$ (а в астатических системах при $pf(t) = \text{const}$).

Считая изменения величин x^0 , A , Ω настолько медленными, что за период колебаний их можно принять постоянными (беря их среднее значение за период), будем строить решение по тому же самому принципу гармонической линеаризации, что и в главе II, только с учетом величины *смещения* x^0 . В связи с этим первые члены разложения в ряд Фурье вместо (2.75) и (2.76) следует записать в виде

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\Omega} px^*, \quad (5.3)$$

где при обозначении $\psi = \Omega t'$

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) d\psi, \\ q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что в общем случае все три коэффициента являются функциями трех неизвестных:

$$F^0 = F^0(x^0, A, \Omega), \quad q = q(x^0, A, \Omega), \quad q' = q'(x^0, A, \Omega). \quad (5.5)$$

В частных случаях эти зависимости могут быть более простыми¹⁾.

Подстановка выражений (5.2) и (5.3) в заданное дифференциальное уравнение (5.1) дает

$$Q(p)(x^0 + x^*) + R(p)\left(F^0 + qx^* + \frac{q'}{\Omega} px^*\right) = S(p)f(t).$$

При достаточно медленном изменении функции $f(t)$ (а в астатических системах pf) и величин x^0 , A , Ω , входящих в коэффициенты F^0 , q , q' , данное уравнение может быть разделено на два отдельных уравнения (168):

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = S(p)f(t), \quad (5.6)$$

$$Q(p)x^* + R(p)\left(q + \frac{q'}{\Omega} p\right)x^* = 0 \quad (5.7)$$

соответственно для медленно меняющейся составляющей и для колебательной составляющей. При этом разделении уравнений сохраняются

¹⁾ См. конкретные формулы для разных нелинейностей в § 5.6 и далее.

существенно нелинейные свойства и отсутствие суперпозиции решений, так как остается нелинейная взаимосвязь обоих уравнений через соотношения (5.5).

Уравнение (5.7) совпадает с прежним уравнением (2.78) с той лишь разницей, что теперь коэффициенты q и q' , согласно (5.5), зависят не только от A и Ω , но и от смещения x^0 . Поэтому, написав, как прежде (§ 2.3), характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) = 0, \quad (5.8)$$

заменив p на $j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части, в отличие от (2.83), получим здесь два алгебраических уравнения с тремя неизвестными:

$$X(x^0, A, \Omega) = 0, \quad Y(x^0, A, \Omega) = 0. \quad (5.9)$$

Эти уравнения дают возможность определить амплитуду A и частоту Ω автоколебаний как функции медленно меняющейся составляющей x^0 :

$$A = A(x^0), \quad \Omega = \Omega(x^0). \quad (5.10)$$

Для решения этой задачи можно применять любой из способов, описанных в § 2.3, в зависимости от того, какой из них лучше подходит

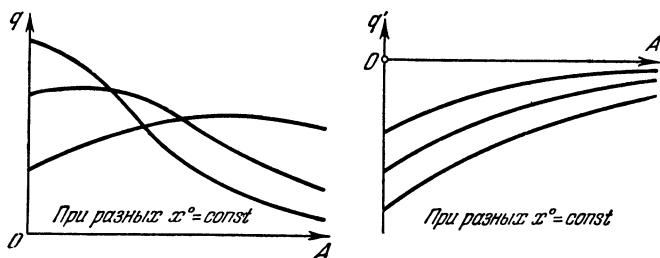


Рис. 5.3.

к условиям заданной конкретной задачи. Такими же способами можно определить и зависимость A и Ω не только от x^0 , но и от параметров системы с целью выбора последних. В тех способах § 2.3, где используются графики $q(A)$ и $q'(A)$, здесь их необходимо строить в виде серии кривых при разных постоянных значениях x^0 (рис. 5.3).

После того как из уравнений (5.9) определены зависимости (5.10), можно, воспользовавшись первой из формул (5.5), найти функцию смещения:

$$F^0 = \Phi(x^0), \quad (5.11)$$

которая будет служить характеристикой данного нелинейного звена по отношению к медленно меняющимся составляющим перемен-

ных F и x при наличии автоколебаний. Обычно (5.11) будет плавной функцией даже для характеристик релейного типа (см., например, § 1.7). Получив ее, можно далее решать уравнение (5.6) с учетом (5.11) и в результате найти решение

$$x^0 = x^0(t) \quad (5.12)$$

для медленно меняющейся составляющей при заданной $f(t)$ в правой части уравнения. Этим самым определяется, согласно (5.10), амплитуда и частота автоколебаний A и Ω , медленно меняющиеся во времени вместе с изменением $x^0(t)$.

Если в какой-либо задаче ищется $x^0 = \text{const}$ и правая часть уравнения (5.6) равна некоторой заданной постоянной M^0 , то вместо уравнения (5.6) получаем:

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = M^0. \quad (5.13)$$

Можно предложить два метода решения задачи в этом случае.

Первый метод по аналогии с предыдущим состоит в том, что сначала путем решения уравнений (5.9) находятся зависимости амплитуды A и частоты Ω автоколебаний от величины смещения x^0 в виде (5.10). Затем определяется выражение $F^0 = \Phi(x^0)$ подстановкой значений (5.10) в первое из выражений (5.5), вычисленное по первой формуле (5.4). Следовательно, в этом случае вместо дифференциального уравнения (5.6) получается алгебраическое уравнение (5.13) с одной неизвестной x^0 , которая содержится и в F^0 . Чаще всего уравнение (5.13) относительно x^0 является трансцендентным и решается графически. После этого, согласно (5.10), становятся определенными также амплитуда A и частота Ω .

Указанную зависимость (5.10) амплитуды и частоты автоколебаний от величины смещения центра колебаний, характерную именно для нелинейных систем (в линейных системах смещение центра колебаний не играет роли), надо всегда иметь в виду. При одних нелинейностях она может быть весьма существенной, при других — менее существенной.

Второй метод решения той же задачи, который в случае $x^0 = \text{const}$ может оказаться более простым, состоит, наоборот, в том, что сначала решается уравнение (5.13), где, согласно (5.5), $F^0(x^0, A, \Omega)$ или часто $F^0(x^0, A)$. Решение получает вид

$$x^0 = x^0(A, \Omega), \quad \text{или} \quad x^0 = x^0(A). \quad (5.14)$$

Это решение подставляется затем в уравнения (5.9), которые таким образом будут содержать только две неизвестные A и Ω . Определив последние (по любому из способов § 2.3), вычисляем потом по (5.14) и величину x^0 . Этот второй метод применялся в примерах, рассмотренных в § 1.6.

Так решается задача в общем случае. Во многих частных случаях, как будет видно из дальнейшего, это решение может значительно упрощаться.

В случае, если при отсутствии внешнего воздействия ($f=0$) определяются автоколебания в системе с несимметричной нелинейностью, т. е. нелинейностью $F(x)$ или же $F(x, px)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) d\psi \neq 0, \quad (5.15)$$

то вместо уравнения (5.6) получаем:

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = 0. \quad (5.16)$$

Оно решается любым из тех же двух методов, описанных выше для уравнения (5.13). Одновременно, согласно (5.9), определяются x^0 , A , Ω .

Из предыдущего известно, что $\frac{R(p)}{Q(p)}$ есть передаточная функция приведенной линейной части системы. Часто бывает, что ее знаменатель $Q(p)$ имеет нулевой корень. Тогда $Q(0)=0$ и, следовательно, уравнение (5.16) с учетом (5.11) принимает вид

$$F^0 = \Phi(x^0) = 0, \quad (5.17)$$

откуда определяется x^0 . Это означает, что в указанных системах возникает ровно такое смещение x^0 колебаний переменной x , которое ликвидирует свойственную данной нелинейности несимметрию колебаний переменной F (т. е. обеспечивает $F^0=0$), как показано, например, на рис. 5.4 в отличие от рис. 5.1, б.

Выше везде шла речь об определении амплитуды автоколебаний и величины медленно меняющейся (или постоянной) составляющей для переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции. Очевидно, что амплитуду колебаний по соответствующим передаточным функциям можно пересчитать для других переменных системы, которые в каждой конкретной задаче необходимо будет рассмотреть. Аналогично по соответствующим уравнениям (дифференциальным или алгебраическим) может быть определена и медленно меняющаяся или постоянная составляющая для любой переменной, в частности и для регулируемой величины данной автоматической системы, качество воспроизведения которой требуется определить.

В данном параграфе шла речь об уравнениях систем первого класса основного типа (5.1). Однако эти результаты аналогично тому, как делалось в главе II, обобщаются и на уравнения остальных типов

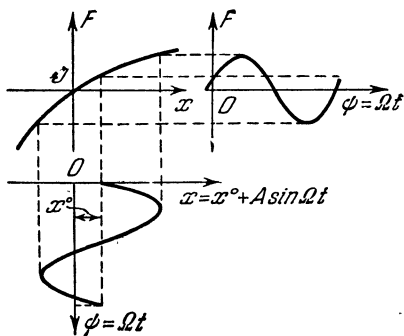


Рис. 5.4.

и классов систем, рассматривавшихся в § 1.2. При этом могут иметься несколько величин смещений x_i^0 , связь между которыми записывается в виде уравнений соответствующих звеньев для медленно меняющейся или постоянной составляющей.

Рассмотрим, например, нелинейные системы первого класса другого типа, которые описываются уравнениями вида (1.56) и (1.57):

$$Q(p)x + R_1(p)F_1(x, px) + R_2(p)F_2(x, px) = S(p)f(t)$$

(справа может быть и несколько внешних воздействий). Разделяя его, запишем уравнение для медленно меняющейся составляющей:

$$Q(p)x^0 + R_1(p)F_1^0 + R_2(p)F_2^0 = S(p)f(t)$$

и уравнение для колебательной составляющей:

$$Q(p)x^* + R_1(p)\left(q_1 + \frac{q_1'}{\Omega}p\right)x^* + R_2\left(q_2 + \frac{q_2'}{\Omega}p\right)x^* = 0.$$

Здесь коэффициенты гармонической линеаризации q_1 , q_1' , q_2 , q_2' и величины F_1 , F_2 определяются прежними формулами (5.4) и зависят, так же как и выражение (5.5), в общем случае от трех искоемых величин (x^0 , A , Ω), которые могут быть постоянными или медленно меняющимися в зависимости от $f(t)$. Метод решения задачи остается прежним.

Аналогично можно поступать и при исследовании нелинейных систем второго и третьего классов, удовлетворяющих условиям, указанным в конце § 2.2. Например, если уравнения системы с двумя разобщенными нелинейностями от разных переменных заданы в виде

$$\begin{aligned} Q_1(p)x_1 - R_1(p)F_2(x_2, px_2) &= S(p)f(t), \\ Q_2(p)x_2 + R_2(p)F_1(x_1, px_1) &= 0, \end{aligned}$$

то решение ищется в форме

$$x_1 = x_1^0 + A_1 \sin \Omega t', \quad x_2 = x_2^0 + A_2 \sin (\Omega t' + \varphi).$$

Нужно произвести гармоническую линеаризацию каждой нелинейности по формулам (5.4). В результате получаются две системы уравнений: для медленно меняющихся составляющих

$$\begin{aligned} Q_1(p)x_1^0 - R_1(p)F_2^0 &= S(p)f(t), \\ Q_2(p)x_2^0 + R_2(p)F_1^0 &= 0 \end{aligned}$$

(или при $p=0$ для постоянных составляющих) и для колебательных составляющих

$$\begin{aligned} Q_1(p)x_1^* - R_1(p)\left(q_2 + \frac{q_2'}{\Omega}p\right)x_2^* &= 0, \\ Q_2(p)x_2^* + R_2(p)\left(q_1 + \frac{q_1'}{\Omega}p\right)x_1^* &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты гармонической линеаризации будут в этом случае функциями пяти искомых величин, а именно:

$$\begin{aligned} F_1^0(x_1^0, A_1, \Omega), \quad q_1(x_1^0, A_1, \Omega), \quad q_1'(x_1^0, A_1, \Omega), \\ F_2^0(x_2^0, A_2, \Omega), \quad q_2(x_2^0, A_2, \Omega), \quad q_2'(x_2^0, A_2, \Omega). \end{aligned}$$

Аналогично записываются уравнения и для других случаев. Подход к их решению во всех случаях в принципе аналогичен, но с соответствующим усложнением вычислительной работы, что может потребовать еще изыскания специальных приемов, сокращающих расчет и делающих его практически удобным. Частично это делается в примерах главы VI.

§ 5.2. Статические и установившиеся ошибки автоколебательных систем

Пусть задана некоторая автоматическая система, динамика которой описывается уравнением (5.1), и известно, что данная система работает в автоколебательном режиме. Допустим, что на основании уравнений (5.9) уже определены зависимости (5.10) для амплитуды A и частоты Ω автоколебаний от величины смещения x^0 (хотя возможен и второй подход к решению задачи, указанный в § 5.1).

Исследуем статические и установившиеся ошибки системы, соответствующие таким установившимся режимам работы системы, при которых $x^0 = \text{const}$ (а значит, также $A = \text{const}$, $\Omega = \text{const}$) [183]. В этих случаях установившийся режим работы системы определяется алгебраическим уравнением (5.13), т. е.

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = M^0, \quad (5.18)$$

куда на основании первой из формул (5.5) и (5.10) подставляется функция смещения

$$F^0 = \Phi(x^0). \quad (5.19)$$

Когда передаточная функция приведенной линейной части системы $\frac{R(p)}{Q(p)}$ имеет нулевой корень в знаменателе, т. е. когда $Q(p) = pQ_1(p)$, из (5.18) получаем уравнение

$$\Phi(x^0) = \frac{M^0}{R(0)}, \quad (5.20)$$

откуда определяется статическое отклонение $x^0(M^0)$.

Нелинейность, вообще говоря, может быть включена в систему любым образом. В частности, если нелинейностью $F(x, px)$ характеризуется такое управляющее звено системы, в котором переменная представляет собой непосредственно рассогласование или ошибку системы, то формулы (5.18) и (5.19) в общем случае и формула (5.20)

в частном случае определяют искомую величину установившейся ошибки системы. Заметим, что в линейной системе будет $R(0)F^0 = kx^0$, а $Q(0) = 1$ или $Q(0) = 0$. Это приводит к хорошо известным формулам ошибок соответственно:

$$x^0 = \frac{M^0}{1+k} \quad \text{или} \quad x^0 = \frac{M^0}{k}.$$

Следовательно, по существу, формулы (5.18) — (5.20) аналогичны формулам для линейных систем, но они дают нелинейную, обычно трансцендентную, зависимость ошибки x^0 от величины правой части M^0 , т. е. ошибка здесь не пропорциональна величине M^0 . Кроме того, на постоянную величину x^0 накладываются автоколебания $x^* = A \cos \Omega t$, представляющие собой дополнительную периодическую ошибку, величина которой определяется формулами (5.10). Эта ошибка через x^0 в общем случае также нелинейно (непропорционально) зависит от величины правой части M^0 .

Правая часть M^0 может иметь различный смысл. Исследуя заданное уравнение (5.1), можно отметить три случая, когда в правой части получается постоянная величина:

1) статическая система $S(0) \neq 0$, $f(t) = \text{const} = f^0$; тогда

$$M^0 = S(0)f^0, \quad (5.21)$$

а если внешних воздействий несколько (m), то

$$M^0 = \sum_{i=1}^m S_i(0)f_i^0;$$

2) астатическая система $S(p) = pS_1(p)$; тогда $S(0) = 0$ и при $f(t) = \text{const} = f^0$ имеем $M^0 = 0$; при симметричной нелинейности это даст $x^0 = 0$, а при несимметричной нелинейности приведет к уравнению (5.16) или (5.17), откуда получим $x^0 \neq 0$;

3) астатическая система при $f(t) = c^0 t$, где $c^0 = \text{const}$; тогда

$$M^0 = S_1(0)c^0. \quad (5.22)$$

Можно было бы рассмотреть аналогично и дважды астатическую систему, когда $S(p) = p^2 S_2(p)$, и т. п.

В первом и втором случаях, вычислив из (5.18), (5.19) или из (5.20) величину x^0 , получаем так называемую *статическую ошибку*, а в третьем случае — *установившуюся ошибку при постоянной скорости* изменения внешнего воздействия (в отличие от линейных систем, непропорциональную величине скорости). На них накладывается еще периодическая установившаяся ошибка в виде автоколебаний.

Такого рода ошибки нелинейной системы можно определять, конечно, и при *отсутствии автоколебаний*. При этом надо исходить из первоначально заданного уравнения (5.1), что приведет к тем же

самым формулам, в которых только функция смещения $\Phi(x^0)$ заменится первоначально заданной нелинейной функцией $F(x, 0)$.

Данное положение о том, что при вычислении статических и установившихся ошибок нелинейных систем, работающих в автоколебательном режиме, надо заменить заданную нелинейную функцию $F(x, px)$ функцией смещения $\Phi(x^0)$, является чрезвычайно важным. Это положение иллюстрирует нарушение принципа суперпозиции в нелинейных системах. Если в линейной системе статическая ошибка остается той же самой независимо от наложения каких-либо колебаний, то в нелинейной системе последние могут очень существенно влиять на величину статической ошибки. Это же будет происходить и при наложении вынужденных колебаний (см. главу IX).

В этой связи важно заметить следующее. Если нелинейная характеристика имеет зону нечувствительности (например, рис. 5.5, а, б, в), то при отсутствии автоколебаний возможная статическая ошибка системы будет во всяком случае не меньше половины зоны нечувствительности b . При наличии же автоколебаний вместо заданной нелинейной функции вводится функция смещения $\Phi(x^0)$, которая при соответствующем подборе параметров не будет иметь зоны нечувствительности, вследствие чего *статическую ошибку можно уменьшить* теоретически до нуля. Аналогично при наложении колебаний ликвидируется и влияние гистерезисной петли.

По поводу деления систем на статические и астатические необходимо иметь в виду, что одна и та же система может быть либо статической, либо астатической в зависимости от места приложения внешнего воздействия и от местоположения той переменной, для которой определяется ошибка (иначе говоря, в зависимости от того, что в данной замкнутой системе принимается за вход и выход). Это наглядно видно из примеров, рассмотренных в § 1.6, где произведено определение постоянных составляющих для всех переменных в одной и той же системе при разных местах приложения внешних воздействий. Там же был рассмотрен пример вычисления смещения x^0 при наличии простейшей несимметричной нелинейности в системе без внешнего воздействия.

Если, скажем, к системе приложены два внешних воздействия $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причем относительно первого из них система астатическая, а относительно второго статическая, т. е. правая часть уравнения (5.1) будет

$$S_1(p) p f_1(t) + S_2(p) f_2(t),$$

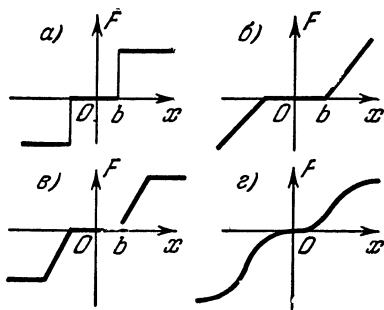


Рис. 5.5.

то, вычисляя установившуюся ошибку системы при $f_1(t) = c^0 t$ и $f_2(t) = \text{const} = f_2^0$, для уравнения (5.18) или (5.20) получим:

$$M^0 = S_1(0)c^0 + S_2(0)f_2^0.$$

Аналогично исследуются статические и установившиеся ошибки и в системах других классов, рассматривавшихся ранее.

Во многих задачах величина x^0 , которая определена выше, не представляет собой установившуюся или статическую ошибку, так как в общем случае стоящая под знаком нелинейности переменная x не является непосредственно рассогласованием между фактическим и заданным значениями регулируемой величины (или вообще выходной переменной данной системы). Тогда после проделанного выше определения величины x^0 нужно с помощью уравнений соответствующих звеньев системы выразить через x^0 величину статической или установившейся ошибки данной системы. В любой задаче такое алгебраическое выражение можно легко получить.

Однако иногда могут быть случаи, когда $x^0 = 0$, но статическая ошибка для выходной переменной все же имеется. Именно такой случай проиллюстрирован в одном из примеров, рассмотренных в § 1.6. Тогда установившееся значение регулируемой величины непосредственно выражается через внешнее воздействие, как, например, в виде (1.118). Поскольку в указанном примере (рис. 1.28) $f_1(t)$ является заданным воздействием, которое надо воспроизвести на выходе, то статическая ошибка там будет $\Delta x_{\text{ст}} = x_4^0 - f_1$.

Определение установившейся ошибки при постоянной скорости изменения внешнего воздействия в астатической системе производится совершенно аналогично. Надо только иметь в виду, что некоторые переменные в системе могут при этом не оставаться постоянными, а будут изменяться пропорционально времени (в частности, выходная величина в следящей системе в режиме слежения с постоянной скоростью).

Для иллюстрации продолжим рассмотрение примеров § 1.6. Там было проведено исследование влияния внешних воздействий $f_1(t)$ и $f_3(t)$ по отдельности. Теперь рассмотрим случай, когда они действуют одновременно (из дальнейшего будет видно, что, в отличие от линейных систем, здесь нельзя просто складывать статические ошибки от отдельно взятых воздействий).

Уравнения автоматической системы (рис. 5.6) заданы в виде

$$(T_1 p + 1)x_2 = k_1 x_1, \quad x_1 = f_1(t) - x_4, \quad (5.23)$$

$$x_3 = F(x), \quad x = x_2 - x_{0.c}, \quad x_{0.c} = k_{0.c} x_4, \quad (5.24)$$

$$(T_2 p + 1)p x_4 = k_2 x_3 + f_3(t), \quad (5.25)$$

где $F(x)$ — простейшая симметричная релейная характеристика, показанная на рис. 5.6:

$$F(x) = c \operatorname{sign} x. \quad (5.26)$$

Чтобы воспользоваться выведенными выше общими формулами¹⁾, надо сначала привести заданную систему уравнений (5.23) — (5.25) к одному уравнению типа (5.1). В результате получаем:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x + (k_{o.c} T_1 p + k_1 + k_{o.c}) k_2 F(x) = \\ = k_1 (T_2 p + 1) p f_1(t) + (k_{o.c} T_1 p + k_1 + k_{o.c}) f_3(t). \quad (5.27)$$

Пусть $f_1(t)$ является задающим (управляющим) воздействием, изменяющимся с постоянной скоростью:

$$f_1(t) = c^0 t, \quad (5.28)$$

которое требуется воспроизвести на выходе системы в виде $x_4(t)$. Допустим также, что второе внешнее воздействие $f_3(t)$ является

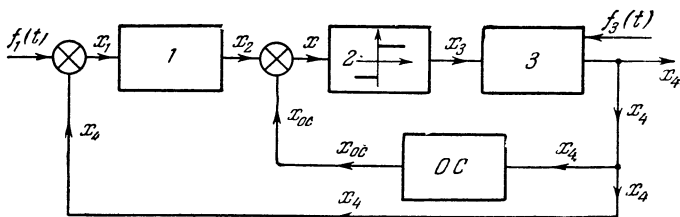


Рис. 5.6.

возмущающим и имеет постоянную величину (например, постоянная нагрузка на выходном валу системы):

$$f_3(t) = \text{const} = f_3^0. \quad (5.29)$$

Его влияние требуется свести к минимуму. Найдем установившуюся ошибку на выходе системы. Правая часть уравнения (5.27) будет при этом постоянной, и установившееся решение для x с учетом автоколебаний следует искать в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где} \quad x^* = A \sin \Omega t. \quad (5.30)$$

Гармоническая линеаризация нелинейности (5.26) при этом, согласно (1.122) и (1.123), дает

$$F^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \quad q = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}. \quad (5.31)$$

В данной задаче согласно (5.27) уравнение (5.7) для периодических составляющих получит вид

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x^* + (k_{o.c} T_1 p + k_1 + k_{o.c}) k_2 q x^* = 0, \quad (5.32)$$

¹⁾ Можно решать задачу и непосредственно, без приведения к формулам общего вида, как делалось в § 1.6.

а уравнение (5.13) для постоянных составляющих будет

$$(k_1 + k_{o.c}) k_2 F^0 = M^0, \quad (5.33)$$

где, согласно (5.27), (5.28) и (5.29):

$$M^0 = k_1 c^0 + (k_1 + k_{o.c}) f_s^0. \quad (5.34)$$

В § 5.1 были указаны два метода решения задачи. Для иллюстрации обоих методов решим данную задачу каждым из них.

Согласно первому методу сначала решается уравнение (5.32) для определения зависимостей $A(x^0)$ и $\Omega(x^0)$. Характеристическое уравнение здесь будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q = 0, \quad (5.35)$$

и уравнения (5.9) поэтому примут вид

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{o.c}) k_2 q - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Исключая отсюда q , находим частоту автоколебаний:

$$\Omega^2 = \frac{k_1 + k_{o.c}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}. \quad (5.37)$$

Частота Ω в данной задаче оказалась не зависящей от смещения x^0 , а следовательно, и от величины внешнего воздействия¹⁾. Затем, подставляя в первое из уравнений (5.36) выражение q из (5.31) и Ω^2 из (5.37), получаем биквадратное уравнение для отыскания зависимости амплитуды автоколебаний A от смещения x^0 в виде

$$\left(\frac{A}{A_c}\right)^4 - \left(\frac{A}{A_c}\right)^2 + \left(\frac{x^0}{A_c}\right)^2 = 0, \quad (5.38)$$

где величина

$$A_c = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}{\pi(T_1 + T_2)} \quad (5.39)$$

представляет собой, согласно (1.85), амплитуду автоколебаний в данной системе при отсутствии смещения (при $x^0 = 0$). Отсюда

$$\left(\frac{A}{A_c}\right)^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x^0}{A_c}\right)^2}. \quad (5.40)$$

Полученное выражение можно записать также в виде

$$A = A_c \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (5.41)$$

если обозначить

$$\alpha = \arcsin \frac{2x^0}{A_c}. \quad (5.42)$$

¹⁾ Частота не зависит от величины внешнего воздействия лишь в первом приближении, рассматриваемом здесь. С учетом второй гармоники колебаний обнаруживается зависимость частоты от внешнего воздействия (см. § 8.6).

Результат (5.40) или (5.41) и представляет собой искомую зависимость $A(x^0)$.

Далее, согласно первому методу решения задачи, подставим полученное значение амплитуды A из (5.41) в выражение (5.31) для F^0 , откуда с использованием (5.42) найдем функцию смещения

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{c}{\pi} \alpha = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A_c}, \quad 0 \leq |x^0| < \frac{A_c}{2}, \quad (5.43)$$

где A_c определяется через параметры системы формулой (5.39). Это и есть искомая функция $\Phi(x^0)$ (рис. 5.7, а), которая при расчете

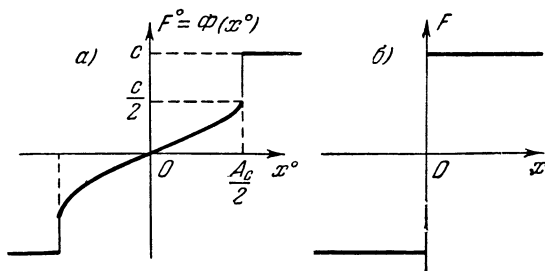


Рис. 5.7.

установившихся ошибок в нелинейной системе заменяет собой заданную нелинейную функцию $F(x)$ (рис. 5.7, б).

Подставив величину (5.43) в уравнение (5.33) для постоянных составляющих, с учетом (5.34) и (5.39) получим:

$$x^0 = \frac{A_c}{2} \sin \left[\frac{\pi}{ck_2} \left(\frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{0.c}} + f_s^0 \right) \right]. \quad (5.44)$$

Сравнивая это с формулой (5.42), видим, что для искусственно введенной ранее величины α можно записать следующее выражение:

$$\alpha = \frac{\pi}{ck_2} \left(\frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{0.c}} + f_s^0 \right). \quad (5.45)$$

Эта величина характеризует совокупность приложенных к системе внешних воздействий. Учитывая (5.45), из формулы (5.41) находим амплитуду автоколебаний:

$$A = A_c \cos \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{0.c}} + f_s^0 \right) \right]. \quad (5.46)$$

Существенно то, что амплитуда автоколебаний зависит не только от параметров системы (см. (5.39)), но еще и от величины внешних воздействий. Эта зависимость нелинейная. В данном случае при увеличении внешних воздействий амплитуда уменьшается по закону косинуса, в то время как частота не зависит от внешних воздействий.

Из формулы (5.46) видно, что автоколебания существуют до тех пор, пока величины внешних воздействий удовлетворяют условию

$$0 \leq \left| \frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{o.c}} + f_s^0 \right| < c k_2. \quad (5.47)$$

При этом амплитуда автоколебаний изменяется в пределах $A_c \geq A > 0$.

Таков первый метод определения установившихся величин смещения x^0 , амплитуды A и частоты Ω автоколебаний при наличии внешних воздействий.

Проиллюстрируем также и второй метод. Согласно второму методу, как указано в § 5.1, сначала решается уравнение (5.33). По первой из формул (5.31) и из (5.33) находим:

$$\frac{x^0}{A} = \sin \frac{\pi F^0}{2c} = \sin \frac{\pi M^0}{2c(k_1 + k_{o.c})k_2},$$

или с учетом (5.34)

$$\frac{x^0}{A} = \sin \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{o.c}} + f_s^0 \right) \right]. \quad (5.48)$$

Для отыскания входящей сюда амплитуды A воспользуемся уравнением (5.32). Характеристическое уравнение для него будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) p + (k_1 + k_{o.c}) k_2 q = 0,$$

и уравнения (5.9) поэтому примут вид

$$\left. \begin{aligned} X &= (k_1 + k_{o.c}) k_2 q - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \\ Y &= (1 + T_1 k_2 k_{o.c} q) \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

где, согласно (5.31) и (5.48):

$$q = \frac{4c}{\pi A} \cos \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{o.c}} + f_s^0 \right) \right]. \quad (5.50)$$

Исключая из уравнений (5.49) величину q , находим частоту автоколебаний

$$\Omega^2 = \frac{k_1 + k_{o.c}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}. \quad (5.51)$$

Подставив найденные выражения q и Ω^2 в первое из уравнений (5.49), найдем амплитуду автоколебаний

$$A = A_c \cos \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{o.c}} + f_s^0 \right) \right], \quad (5.52)$$

где величина

$$A_c = \frac{4ck_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{o.c})}{\pi (T_1 + T_2)} \quad (5.53)$$

является амплитудой автоколебаний при отсутствии внешних воздействий ($c^0 = 0$, $f_s^0 = 0$).

Подставив найденное выражение амплитуды (5.52) в формулу (5.48), получим окончательно величину смещения

$$x^0 = \frac{A_c}{2} \sin \left[\frac{\pi}{ck_2} \left(\frac{k_1 c^0}{k_1 + k_{0.c}} + f_s^0 \right) \right]. \quad (5.54)$$

Как видно, второй метод в данной задаче приводит к тем же самым результатам значительно более коротким путем, чем первый, что очень важно для практических расчетов (принципиально же оба метода эквивалентны друг другу). По-видимому, большая простота второго метода будет иметь место и в большинстве других задач.

В этом втором методе функция смещения $\Phi(x^0)$ не определяется. Однако последняя может понадобиться в дальнейшем для других целей. Но ее тоже легко можно определить. Здесь величины x^0 , A и их отношение выражены через величины внешних воздействий. Функция же смещения $\Phi(x^0)$ не должна содержать ни величин внешних воздействий, ни амплитуды A , зависящей от них. Подставив значение квадратной скобки из (5.54) в (5.48), будем иметь:

$$\frac{x^0}{A} = \sin \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x^0}{A_c} \right), \quad (5.55)$$

а подставив это в первую из формул (5.31), сразу получим искомую функцию смещения:

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A_c}, \quad (5.56)$$

где A_c выражается только через параметры системы согласно (5.53).

Важно отметить, что *функция смещения $\Phi(x^0)$ не зависит ни от числа внешних воздействий, ни от характера их изменения* (если они постоянные или медленно меняющиеся), что наиболее наглядно было видно из первого метода решения задачи.

Итак, двумя разными методами определена величина смещения x^0 автоколебаний на входе реле. Найдем теперь установившуюся ошибку на выходе системы x_1 . Поскольку на выходе должно воспроизводиться внешнее воздействие $f_1(t)$, то, согласно рис. 5.6 и второму уравнению (5.23), ошибка данной системы выражается величиной x_1 , установившееся решение для которой, следовательно, и надо искать. Выразив переменную x_1 через x , которая уже известна. Из заданных уравнений системы (5.23) и (5.24) получаем:

$$(k_{0.c} T_1 p + k_1 + k_{0.c}) x_1 = (T_1 p + 1) x + k_{0.c} (T_1 p + 1) f_1(t).$$

Учитывая (5.28) и (5.30), перепишем данное уравнение в виде

$$(k_{0.c} T_1 p + k_1 + k_{0.c}) x_1 = x^0 + (T_1 p + 1) x^* + k_{0.c} T_1 c^0 + k_{0.c} c^0 t. \quad (5.57)$$

В соответствии с видом правой части установившееся решение этого линейного уравнения следует искать в виде

$$x_1 = x_1^0 + c_1 t + x_1^*, \quad (5.58)$$

где x_1^0 и c_1 — постоянные, а x_1^* — периодическая составляющая.

Подставив это в (5.57), получим три уравнения для отыскания указанных величин

$$k_{o.c} T_1 c_1 + (k_1 + k_{o.c}) x_1^0 = x^0 + k_{o.c} T_1 c^0, \quad (5.59)$$

$$(k_1 + k_{o.c}) c_1 = k_{o.c} c^0, \quad (5.60)$$

$$(k_{o.c} T_1 p + k_1 + k_{o.c}) x_1^* = (T_1 p + 1) x^*. \quad (5.61)$$

Второе из них дает

$$c_1 = \frac{k_{o.c} c^0}{k_1 + k_{o.c}}. \quad (5.62)$$

Тогда из (5.59) находим:

$$x_1^0 = \frac{1}{k_1 + k_{o.c}} \left(x^0 + \frac{k_1 k_{o.c} T_1}{k_1 + k_{o.c}} c^0 \right), \quad (5.63)$$

где x^0 определяется формулой (5.54) через внешние воздействия. Наконец, из уравнения (5.61) получаем амплитуду автоколебаний переменной x_1 :

$$A_1 = A \sqrt{\frac{T_1^2 \Omega^2 + 1}{k_{o.c}^2 T_1^2 \Omega^2 + (k_1 + k_{o.c})^2}}, \quad (5.64)$$

где A определяется формулой (5.52) через внешнее воздействие, а Ω — формулой (5.51).

Итак, в данной системе имеются все три составляющие ошибки (5.58), зависящие от величины внешних воздействий и от параметров системы. Наиболее нежелательной из них является составляющая $c_1 t$, возрастающая пропорционально времени. Поэтому систему необходимо видоизменить в первую очередь так, чтобы уничтожить эту составляющую ошибки, т. е. сделать $c_1 = 0$. Для этого можно было бы вовсе изъять дополнительную обратную связь (рис. 5.6), так как при $k_{o.c} = 0$, согласно (5.62), будет $c_1 = 0$. Однако при этом существенно возрастает амплитуда автоколебаний (5.64), т. е. периодическая составляющая ошибки. Поэтому более целесообразной мерой будет замена жесткой обратной связи $x_{o.c} = k_{o.c} x_1$ на гибкую $x_{o.c} = k_{o.c} p x_1$. Тогда в уравнении (5.57) величина $k_{o.c}$ заменится на $k_{o.c} p$, т. е.

$$(k_{o.c} T_1 p^2 + k_{o.c} p + k_1) x_1 = x^0 + (T_1 p + 1) x^* + k_{o.c} c^0. \quad (5.65)$$

Как видим, составляющая, пропорциональная времени, в правой части уравнения исчезла, вследствие чего установившееся решение для ошибки x_1 , в отличие от (5.58), будет

$$x_1 = x_1^0 + x_1^*. \quad (5.66)$$

При этом из (5.65) находим:

$$x_1^0 = \frac{1}{k_1} (x^0 + k_{o.c} c^0), \quad (5.67)$$

$$A_1 = A \sqrt{\frac{T_1^2 \Omega^2 + 1}{k_{o.c}^2 \Omega^2 + (k_1 - k_{o.c} T_1 \Omega^2)^2}}, \quad (5.68)$$

причем изменяются, конечно, и формулы для x^0 , A и Ω (их можно получить таким же способом). Подбором параметров системы амплитуду автоколебаний ошибки A_1 можно сделать весьма малой.

§ 5.3. Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах

При рассмотрении в § 5.1 несимметричных автоколебаний с постоянной или медленно меняющейся составляющей, характеризующей смещение центра колебаний, была введена *функция смещения*

$$F^0 = \Phi(x^0), \quad (5.69)$$

которую следует подставлять в уравнения автоматической системы вместо заданной нелинейности $F(x, px)$, когда вычисляются постоянные или медленно меняющиеся составляющие.

Следовательно, функция смещения $\Phi(x^0)$ представляет собой как бы статическую характеристику (обычно криволинейную), которая определяет зависимость между выходной и входной величинами заданной нелинейности для постоянных или медленно меняющихся сигналов в автоколебательной системе [187].

При любых нелинейностях, в том числе и таких скачкообразных, как характеристика реле и сухого трения, и таких, как характеристики зазора и зоны нечувствительности и т. п., функция смещения

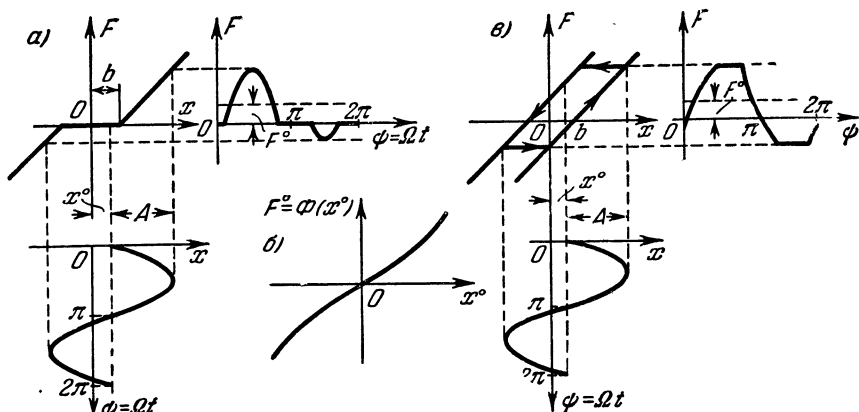


Рис. 5.8.

$\Phi(x^0)$ может получать при определенных условиях вид весьма плавной кривой. Этот эффект называется *вибрационным сглаживанием нелинейностей при помощи автоколебаний*, а функцию смещения $\Phi(x^0)$ можно называть *сглаженной характеристикой*.

Например, для нелинейностей с зоной нечувствительности (рис. 5.8, а), а также с зазором (рис. 5.8, в) и с петлей сигналы $x < b$ при отсут-

меняющиеся). Она зависит от формы нелинейности и от структуры и параметров системы. Поэтому можно пользоваться любым методом определения $\Phi(x^0)$ при любых частных упрощающих предположениях относительно внешних воздействий. Можно, например, пользоваться более простым вторым методом из описанных в § 5.1 методов и проиллюстрированных на примере в § 5.2, взяв любое одно постоянное по величине внешнее воздействие (как f_3^0 в примере § 5.2).

Во-вторых, какова бы ни была заданная нелинейность $F(x, px)$ (скачкообразная, петлевая и т. п.), обычно функция смещения $\Phi(x^0)$ получает вид плавной кривой (рис. 5.11). Поэтому, в отличие от первоначально заданной нелинейности, ее легко можно линейризовать

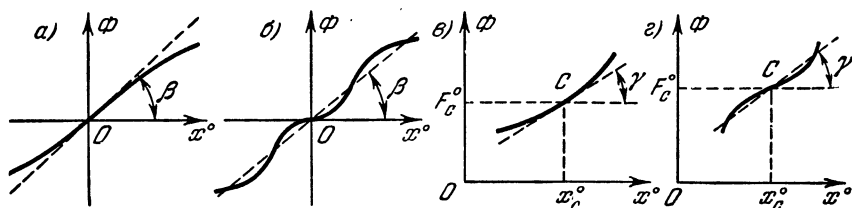


Рис. 5.11.

обычным способом (по касательной или по секущей в начале координат O или в другом начале отсчета C). Имея в виду это свойство, иногда вместо термина «вибрационное сглаживание» употребляют термин «вибрационная линейризация», хотя последний термин менее удачен, ибо здесь производится именно *обычная* линейризация вибрационно сглаженной нелинейности.

Так, для случая рис. 5.11, а или б в определенном диапазоне можно считать

$$F^0 = k_n x^0, \quad (5.73)$$

где

$$k_n = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} \quad \text{или} \quad k_n = \operatorname{tg} \beta,$$

а для случая рис. 5.11, в или г можно считать

$$F^0 = F_c^0 + k_n (x^0 - x_c^0), \quad (5.74)$$

где

$$k_n = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=x_c^0} \quad \text{или} \quad k_n = \operatorname{tg} \gamma.$$

Величина коэффициента k_n зависит от соотношения, вообще говоря, всех параметров системы.

Например, для системы, описываемой уравнениями (5.23)—(5.26), согласно (5.56) и (5.53), имеем:

$$k_n = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \frac{2c}{\pi A_c} = \frac{T_1 + T_2}{2k_s T_1 (T_2 k_1 - T_1 k_{0,c})}. \quad (5.75)$$

Поэтому для расчета медленно протекающих процессов в данной системе, согласно (5.23)—(5.25) и (5.73), получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_2^0 &= k_1 x_1^0, & x_1^0 &= f_1(t) - x_2^0, \\ x_3^0 &= k_n x^0, & x^0 &= x_{o.c}^0, & x_{o.c}^0 &= k_{o.c} x_4^0, \\ (T_2 p + 1) p x_4^0 &= k_2 x_3^0 + f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

или единое уравнение (5.27), в котором надо заменить x на x^0 и $F(x)$ на $k_n x^0$.

Указанное для формулы (5.73) определение коэффициента усиления k_n можно значительно упростить следующим образом. Поскольку функция смещения $\Phi(x^0)$ определяется, согласно (5.11) и (5.5), по выражению $F^0(x^0, A, \Omega)$, в которое подставлена зависимость $A(x^0)$, то формулу для вычисления k_n можно представить в виде

$$k_n = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial A} \frac{dA}{dx^0} + \frac{\partial F^0}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dx^0} \right)_{x^0=0}.$$

В тех случаях, когда рассматриваются нечетно-симметричные нелинейности $F(x)$, величина F^0 не зависит от Ω и, кроме того, согласно (5.4):

$$\left(\frac{\partial F^0}{\partial A} \right)_{x^0=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=A \sin \psi} \sin \psi d\psi = 0,$$

так как производная под знаком интеграла будет четной функцией. Следовательно, для нечетно-симметричных нелинейностей $F(x)$, как однозначных, так и петлевых, величину k_n можно вычислять по формуле

$$k_n = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}$$

непосредственно из выражения (5.5), не определяя функции смещения $\Phi(x^0)$. Во многих задачах это будет существенным упрощением решения.

Это упрощение не относится к несимметричным нелинейностям, а также к тем случаям, когда k_n приходится определять не по касательной, а по секущей (рис. 5.11, б), и к случаям, соответствующим формуле (5.74) и рис. 5.11, в и г.

Итак, с подстановкой (5.73) или (5.74) уравнения (5.71) для определения медленно протекающих процессов становятся обыкновенными линейными уравнениями и как таковые легко решаются. Примером могут служить уравнения (5.76).

Если пользоваться формой записи уравнения нелинейной системы в виде (5.1), то с подстановкой (5.73) в случае рис. 5.11, а или б получим линейное уравнение для медленно меняющейся составляющей в виде

$$[Q(p) + R(p) k_n] x^0 = S(p) f(t), \quad (5.77)$$

а в случае рис. 5.11, в или г с подстановкой (5.74) получаем:

$$[Q(p) + R(p)k_n] \Delta x^0 = S(p) \Delta f(t), \quad (5.78)$$

где обозначено

$$\Delta x^0 = x^0 - x_c^0, \quad \Delta f(t) = f(t) - f_c^0,$$

причем значения x_c^0 и f_c^0 определяются соотношениями

$$Q(0)x_c^0 + R(0)f_c^0 = S(0)f_c^0, \quad F_c^0 = \Phi(x_c^0).$$

Как видим, принцип разделения уравнений для колебательных и для медленно меняющихся составляющих, введенный в § 5.1, при котором сохраняются существенно нелинейные свойства системы, приводит к весьма важным для удобства практических расчетов результатам. Существенно то, что *медленно меняющиеся сигналы проходят через нелинейность с другим коэффициентом усиления k_n* ; чем автоколебания (q или $q + \frac{q'}{\Omega}$).

Особенно важно использовать свойство вибрационного сглаживания нелинейностей с последующей их обычной линейризацией при расчете сложных автоматических систем.

Если, например, система автоматического управления полетом самолета работает по схеме, изображенной на рис. 5.12, то часть системы, обведенную пунктиром (релейный усилитель, привод и дополнительная обратная связь) как отдельную следящую систему можно рассчитывать изложенным выше методом с учетом автоколебательных вибраций. Частоту последних путем соответствующего выбора параметров этой части системы или введением корректирующих устройств можно сделать достаточно большой с тем, чтобы амплитуда автоколебаний переменной x_2 на выходе этой части системы была мала. Если же амплитуду x_2 не удастся сделать малой (тогда руль будет колебаться), то необходимо, чтобы указанная частота практически не воспринималась корпусом самолета в процессе его движения вокруг центра тяжести.

Тогда расчет системы будет выглядеть следующим образом. Автоколебания ищем только в обведенной пунктиром внутренней части (рис. 5.12) как в отдельной самостоятельной системе, считая $x_3(t)$ произвольным медленно меняющимся внешним входным воздействием, а x_2 — выходной величиной. Для такой простой системы находим, как изложено в § 5.2, функцию смещения $\Phi(x^0)$, а также частоту и амплитуду автоколебаний в зависимости от величины внешнего воздействия. Выбираем параметры данной части системы так, чтобы условия вибрационного сглаживания нелинейности соблюдались во всем практически возможном диапазоне изменения входной величины x_3 . При этом следим за тем, чтобы частота автоколебаний (зависящая от параметров системы) лежала за пределами частот возможных колебаний самолета (чтобы она практически не воспринималась корпусом самолета).

управления. Однако их, в свою очередь, тоже можно рассматривать отдельно. Следовательно, в этом случае, кроме обычно применяемого *пространственного* разбиения движения самолета по каналам (тангажа, курса, крена), расчет системы по каждому каналу (например, тангажа) разбивается еще на три этапа по степени *медленности движения во времени*.

Аналогичное разделение расчета, по крайней мере, на два этапа по степени медленности во времени бывает целесообразным и для многих других нелинейных автоматических систем регулирования, слежения, стабилизации и т. п. В сложных системах такие приемы, существенно упрощающие все исследование, оказываются единственными, которые могут сделать расчет системы вообще практически осуществимым. Важно иметь в виду, что в предлагаемом принципе разделения движений сохраняется существенная нелинейная взаимосвязь между ними.

Фигурирующее здесь понятие медленности одного движения по отношению к другому в той же системе определяется совершенно так же, как и понятие медленно меняющихся внешних воздействий в § 5.1. Часто бывает удобно это понятие выражать *в виде соотношения возможных частот колебаний* одного и другого движения. Например, автоколебательные вибрации во внутреннем контуре системы (пунктир на рис. 5.12) имеют вполне определенный диапазон возможных частот в практически реальной области значений параметров этой части системы. По сравнению с этими колебаниями движение самолета около центра тяжести является медленным. Последнее обстоятельство можно выразить иначе, сказав, что возможные частоты колебаний самолета вокруг центра тяжести ниже возможных частот автоколебаний во внутреннем контуре системы (например, в 10 и более раз). В свою очередь, возможные частоты колебаний самого центра тяжести самолета на траектории еще ниже. Это является основой для раздельного исследования каждого движения. Для каждого из них в отдельности можно строить свои частотные характеристики как в линейном, так и в нелинейном виде.

В частности, можно для каждого из них определять отдельно вынужденные колебания и автоколебания. Так, например, рассчитав автоколебательные вибрации и определив функцию смещения (сглаженную характеристику) $\Phi(x^0)$ во внутреннем контуре системы (пунктир на рис. 5.12), можно затем определять автоколебания на более низких частотах (медленно меняющиеся) во всей системе в целом (рис. 5.12), рассматривая функцию смещения $\Phi(x^0)$ (рис. 5.11) как новую нелинейность этой системы (к ней могут быть добавлены еще и другие нелинейности самого самолета). Методы определения автоколебаний по методу гармонической линеаризации остаются прежними (см. главу I), если *система в целом* по отношению к медленно меняющейся составляющей удовлетворяет условиям главы II. При этом производится гармоническая линеаризация новой нелинейности $\Phi(x^0)$

и других, если они имеются. Формулы для этой повторной гармонической линейаризации будут:

$$\Phi(x^0) = q^0(A^0)x^0,$$

$$q^0 = \frac{4}{\pi A^0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(A^0 \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad \psi = \Omega^0 t, \quad (5.79)$$

где A^0 — амплитуда автоколебаний медленно меняющейся составляющей, которые ищутся в виде $x^0 = A^0 \sin \Omega^0 t$.

Таким образом, могут быть рассмотрены двухчастотные автоколебания с большой разностью частот Ω и Ω^0 .

Например, если, согласно (5.56):

$$\Phi(x^0) = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A_c} \quad \text{при} \quad x^0 \leq \frac{A_c}{2},$$

то

$$q^0 = \frac{4c}{\pi^2 A^0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \left(\frac{2A^0}{A_c} \sin \psi \right) \sin \psi d\psi \quad \text{при} \quad A^0 \leq \frac{A_c}{2}.$$

Введя обозначение

$$k = \frac{2A^0}{A_c},$$

прделаем следующие простые преобразования:

$$\begin{aligned} \int_0^{\psi} \arcsin(k \sin \psi) \sin \psi d\psi &= \cos \psi \arcsin(k \sin \psi) + \int_0^{\psi} \frac{k \cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \psi}}, \\ \int_0^{\psi} \frac{k \cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} &= \frac{1}{k} \int_0^{\psi} \frac{k^2 - 1 + 1 - k^2 \sin^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi = \\ &= \frac{k^2 - 1}{k} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} + \frac{1}{k} \int_0^{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \\ &= \frac{k^2 - 1}{k} F_{\text{и}}(\psi, k) + \frac{1}{k} E_{\text{и}}(\psi, k), \end{aligned}$$

где $F_{\text{и}}(\psi, k)$ и $E_{\text{и}}(\psi, k)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода¹⁾, для которых существуют подробные числовые таблицы, вследствие чего их практическое применение столь же просто, как и обычных тригонометрических функций.

¹⁾ Индекс «и» поставлен для того, чтобы не спутать $F_{\text{и}}$ с основным обозначением F в данной книге для нелинейностей.

В результате получаем:

$$q^0 = \frac{4c}{\pi^2 A^0} \left[\left(\frac{2A^0}{A_c} - \frac{A_c}{2A^0} \right) K \left(\frac{2A^0}{A_c} \right) + \frac{A_c}{2A^0} E \left(\frac{2A^0}{A_c} \right) \right], \quad \left(A^0 \leq \frac{A_c}{2} \right), \quad (5.80)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, значения которых приводятся в математических таблицах обычно в зависимости от параметра $\alpha = \arcsin k = \arcsin \frac{2A^0}{A_c}$, например:

α	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
K	1,57	1,58	1,62	1,69	1,79	1,94	2,16	2,50	3,15	∞
E	1,57	1,56	1,52	1,47	1,39	1,31	1,21	1,12	1,04	1,00

В других случаях повторной гармонической линеаризации, когда функция смещения $\Phi(x^0)$ имеет более сложный вид, можно применять описанный в § 3.8 графический способ для определения $q^0(A^0)$ по заданному графику $\Phi(x^0)$.

§ 5.4. Зависимость устойчивости нелинейной системы от внешнего воздействия

Устойчивость нелинейной системы, в которой могут возникать автоколебания, можно понимать различным образом. *Первое понятие устойчивости* нелинейной системы связано с отсутствием автоколебаний (устойчивость равновесного состояния при любых начальных условиях, см. § 2.7). Второе понятие устойчивости автоколебательной системы связано с допущением автоколебаний достаточно малой амплитуды, к которой стремятся переходные процессы при любых начальных условиях (*практическая устойчивость автоколебательных систем*, см. § 2.9). Можно говорить и об *устойчивости* равновесного состояния *в ограниченной области начальных условий* (см. § 2.9), что имеет несколько меньшее практическое значение.

Теперь можно ввести еще одно практически очень важное понятие устойчивости нелинейной системы, работающей в вибрационном режиме, — *устойчивость по медленно меняющейся составляющей*. Под этим будем понимать устойчивость равновесного состояния системы, описываемой, например, уравнениями (5.71) или (5.6), т. е. такой системы, в которой вместо первоначально заданной нелинейности (см. (5.70) или (5.1)) подставлена функция смещения $F = \Phi(x^0)$. Такая устойчивость означает затухание переходных процессов по медленно меняющейся составляющей. Устойчивость системы по медленно меняющейся составляющей (т. е. по основному сигналу системы) не-

обходимо исследовать помимо устойчивости самого вибрационного режима (автоколебаний).

Это понятие устойчивости особенно важно для практики в случае раздельного рассмотрения системы, как указано, например, на рис. 5.12. Там рассчитывается устойчивость режима автоколебательных вибраций в одной отдельно выделенной внутренней части системы (на рис. 5.12 она обведена пунктиром), а во всей системе в целом рассматриваются только медленно протекающие процессы, по которым, следовательно, и судят об устойчивости равновесного состояния всей системы в целом¹⁾ (очевидно, что система в целом может быть устойчивой или неустойчивой независимо от устойчивости предварительно рассчитанного внутреннего контура).

Устойчивость нелинейной системы по медленно меняющейся составляющей может исследоваться любыми существующими методами в зависимости от вида уравнений, описывающих медленно протекающие процессы. Если, например, в системе (5.71) или (5.6) все коэффициенты операторных многочленов постоянны и применяется обычная линеаризация сглаженной нелинейности $F^0 = \Phi(x^0)$ в виде (5.73) или (5.74), то устойчивость нелинейной системы по медленно меняющейся составляющей будет исследоваться как устойчивость обыкновенной линейной системы (по критериям Гурвица, Михайлова или Найквиста в обычной их формулировке). Если при этом в системе имеются переменные во времени коэффициенты (мало изменяющиеся за период вибраций), то надо привлекать теорию линейных систем с переменными коэффициентами.

Наконец, если в системе уравнений, полученных для медленно протекающих процессов, имеются существенные нелинейности, то применяются соответствующие нелинейные методы. Если такая система удовлетворяет условиям, указанным в главе II, то для исследования ее устойчивости можно применять снова метод гармонической линеаризации (§ 2.7). Здесь гармонической линеаризации на низких частотах, свойственных медленно протекающим процессам, подвергаются уже новые нелинейности, оставшиеся в системе уравнений, полученных для медленно меняющейся составляющей. В частности, такой новой нелинейностью может являться и сама функция смещения (сглаженная нелинейность), как, например, $\Phi(x^0)$ в системе (5.71) или (5.6), имеющая вид рис. 5.11. Физически это связано с тем, что система в целом (рис. 5.12), имеющая по медленно меняющейся составляющей нелинейность $F^0 = \Phi(x^0)$, может терять устойчивость равновесного состояния путем перехода в автоколебательный режим, но уже на другой частоте, возможной в данном случае для корпуса самолета. Эта частота значительно ниже частоты вибрационного автоколебательного режима реле во внутреннем контуре системы.

¹⁾ Строго говоря, автоколебания имеют место во всей системе, но практически за пределами внутреннего контура их амплитуда незначительна. В этом смысле и говорится о равновесном состоянии системы в целом, определяемом по уравнению типа (5.6) или (5.71).

Как было установлено ранее, при наличии автоколебательных вибраций функция смещения (сглаженная характеристика) $\Phi(x^0)$ не зависит от характера изменения внешних воздействий, если только они медленно меняющиеся, а зависит от вида нелинейности и от соотношения параметров системы. Следовательно, и *устойчивость системы по медленно меняющейся составляющей при наличии автоколебательных вибраций не будет зависеть от внешних воздействий*.

Однако вибрационный режим работы системы может создаваться не только при помощи автоколебаний, а и с помощью вынужденных колебаний системы от периодического внешнего воздействия. Тогда не только амплитуда и частота самих вибраций, но и сглаженная нелинейная характеристика будут зависеть от этого внешнего воздействия, а следовательно, и устойчивость системы по медленно меняющейся составляющей может весьма существенно зависеть от этого внешнего воздействия¹⁾.

Устойчивость же нелинейных систем в первом и втором понимании, указанных в начале данного параграфа, может существенно зависеть от величины постоянного внешнего воздействия (а для астатических систем — от скорости изменения внешнего воздействия), так как от нее зависят амплитуда автоколебаний и условия возникновения автоколебания.

Устойчивость системы в первом смысле (§ 2.7), т. е. устойчивость равновесного состояния системы вне области автоколебаний при наличии постоянного внешнего воздействия (или постоянной его скорости для астатических систем), будет определяться прежними методами, изложенными в § 2.7, по уравнению (2.206). Однако входящие в него коэффициенты гармонической линеаризации q и q' будут теперь зависеть от постоянной составляющей x^0 (см. (5.4) и (5.5)). Следовательно, и пределы возможных значений q и q' для каждой нелинейности, вообще говоря, будут зависеть от величины x^0 . Отсюда и граница устойчивости нелинейной системы, т. е. граница, отделяющая область устойчивости равновесия от области периодических решений, тоже будет зависеть от величины x^0 .

Но величину x^0 можно найти в зависимости от величины или скорости внешнего воздействия (см. § 5.2). Поэтому, определив по уравнению (5.7) методами § 2.7 свою границу устойчивости равновесия нелинейной системы для каждого заданного значения x^0 , можно найти тем самым и свою границу устойчивости равновесия нелинейной системы для каждой заданной величины постоянной скорости изменения внешнего воздействия (или для каждой заданной величины постоянной скорости изменения внешнего воздействия в случае астатической системы). Таким образом получим картину перемещения границы устойчивости в пространстве параметров нелинейной системы (изменение очертания ее области устойчивости) в зависимости от величины внешнего воздействия.

¹⁾ Об этом см. подробнее в главе IX.

Однако существуют исключения из этого правила. Не во всякой нелинейной системе граница устойчивости будет зависеть от внешнего воздействия. Например, очевидно, что в случае однозначной нечетной нелинейности, когда $q' = 0$, граница устойчивости не будет зависеть от внешнего воздействия в тех частных случаях, когда интервал возможных значений коэффициента q составляет $0 \leq q \leq \infty$. Это имеет место, например, для системы с идеальным реле, рассмотренной в § 5.2. Там, согласно (5.50), будет тот же график $q(A)$, что и на рис. 2.31, а, но только с измененным масштабом по оси ординат, равным косинусу от постоянной величины, характеризующей внешнее воздействие.

Не будут зависеть от величины внешнего воздействия также все достаточные (при любой однозначной нечетной нелинейности) границы устойчивости, определяемые на первом этапе исследования (§ 2.7), когда считается $0 \leq q \leq \infty$. Необходимые же условия, получаемые на втором этапе исследования для всех нелинейностей с ограниченным интервалом возможных значений q (на рис. 2.31 все, кроме а), могут существенно зависеть от величины (или скорости) внешнего воздействия. В § 6.8 будет приведен пример определения такой зависимости.

Поэтому, вообще говоря, необходимо при расчете реальных автоматических систем определять перемещение границ устойчивости с изменением внешнего воздействия и выбирать параметры системы с учетом этого перемещения. Иначе автоматическая система регулирования или стабилизации, сделанная устойчивой при отсутствии внешнего воздействия, может оказаться неустойчивой при определенной величине воздействия. Граница устойчивости следящей системы может несколько перемещаться в пространстве параметров с изменением скорости слежения и т. п.

В подобных случаях одно или несколько внешних воздействий (или их скоростей) удобно включать в число координат пространства, в котором строится область устойчивости. Например, если в какой-либо системе определена область устойчивости

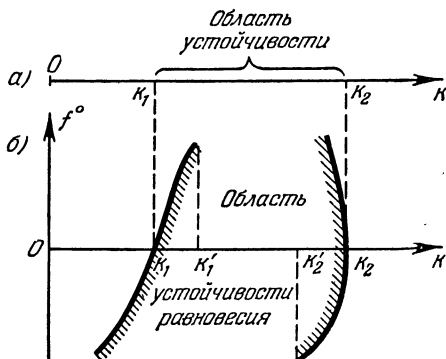


Рис. 5.13.

по некоторому параметру k (например, коэффициенту усиления, рис. 5.13, а) и определено перемещение границ области устойчивости в зависимости от величины постоянного внешнего воздействия f^0 , то можно построить область устойчивости на плоскости с координатами k, f^0 (рис. 5.13, б). Тогда, чтобы гарантировать устойчивость системы, необходимо назначать значение k не в интервале $k_1 < k < k_2$, который получился без учета внешнего воздействия, а в более узком

интервале $k'_1 < k < k'_2$ с учетом возможного изменения внешнего воздействия f^0 в заданных пределах.

Здесь шла речь о понимании устойчивости системы в первом смысле — устойчивости равновесного состояния при любых начальных условиях (§ 2.7).

Та же картина получается и в том случае, когда исследуется практическая устойчивость автоколебательной системы в смысле до-

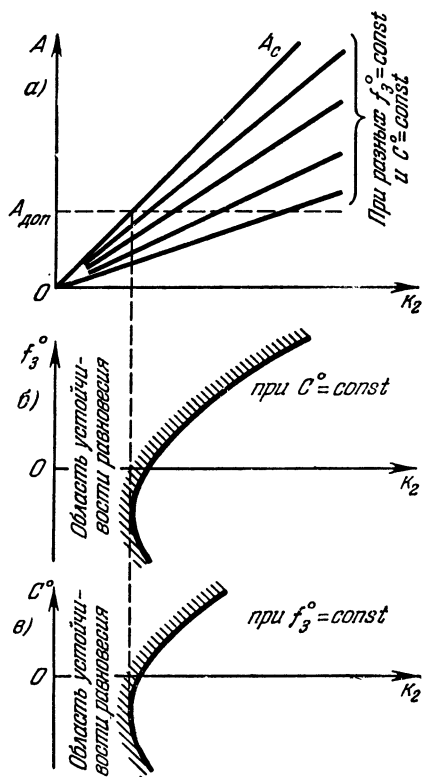


Рис. 5.14.

на рис. 5.14, а. Задав значение $A_{\text{доп}}$ (рис. 5.14, а) согласно (5.52) и (5.53), получим следующее выражение для практической границы устойчивости данной автоколебательной системы:

$$k_2 = \frac{\pi(T_1 + T_2)A_{\text{доп}}}{4cT_1(T_2k_1 - T_1k_{0.c})} \sec \left[\frac{\pi}{2ck_2} \left(\frac{k_1c^0}{k_1 + k_{0.c}} + f_3^0 \right) \right]$$

(при $T_2k_1 > T_1k_{0.c}$), что изображено на рис. 5.14, б и в соответственно в зависимости от величины постоянного возмущающего воздействия f_3^0 (нагрузки) и от скорости c^0 изменения задающего воз-

действия (или его скорости для астатической системы). Такая граница для всех автоколебательных систем, в том числе и для системы с идеальным реле, будет зависеть от величины внешнего воздействия.

Так, для примера системы, рассмотренного в § 5.2, амплитуда автоколебаний при отсутствии внешнего воздействия определяется формулой (5.53), что изображается в зависимости от параметра k_2 прямой линией A_c (рис. 5.14; а). Далее, согласно (5.52), эту величину надо умножить на косинус постоянной величины, зависящей от внешних воздействий, что изображается семейством лучей

действия f_1 , воспроизводимого системой (в различных режимах слежения с постоянной скоростью).

Такая зависимость устойчивости системы от внешнего воздействия характерна только для нелинейных систем. В линейных системах в данном смысле она отсутствует совершенно. Это свойство нелинейных систем, как показывает опыт, чрезвычайно важно учитывать в практике построения различного рода автоматических систем управления.

§ 5.5. Автоколебания систем с медленно меняющимися во времени параметрами

Применение того же принципа разделения процессов по степени медленности их протекания во времени позволяет также методом гармонической линеаризации исследовать автоколебания некоторых нелинейных систем с медленно меняющимися параметрами (переменный во времени коэффициент усиления регулятора, переменная масса объекта или момент инерции и т. п.).

В данном параграфе рассмотрим определение автоколебаний в нелинейных системах, удовлетворяющих условиям главы II, но с медленно изменяющимися во времени параметрами в том смысле, как это было определено в § 5.1. Изменение параметров системы во времени может быть как монотонным, так и не монотонным, но с частотами значительно ниже возможной частоты исследуемых автоколебаний.

Пусть в уравнении нелинейной системы

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0$$

или же

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t)$$

(или в развернутом виде (5.70)) некоторые параметры, входящие в коэффициенты операторных многочленов $Q(p)$, $R(p)$ или $D_{ij}(p)$, будут медленно изменяться с течением времени. Тогда, считая их за период исследуемых автоколебаний постоянными, можно изложенными выше методами (главы II и V) найти амплитуду A и частоту Ω автоколебаний, а также смещение x^0 как функции этих медленно меняющихся параметров (и внешнего воздействия, если оно имеется), а значит, определить их изменение и во времени (см. рис. 5.15, где через m

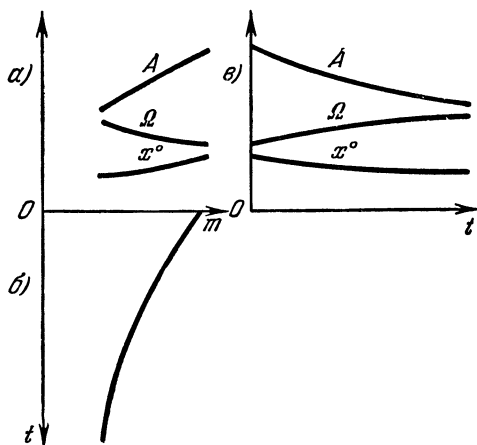


Рис. 5.15.

обозначен некоторый переменный параметр системы, медленное изменение которого во времени задано).

В том случае, когда выполняются условия вибрационного сглаживания нелинейности (§ 5.4), для медленно протекающих процессов получаются уравнения с переменными коэффициентами типа (5.71) или (5.6). Линеаризовав в них обычным способом функцию смещения $F^0 = \Phi(x^0)$ по формуле (5.73) или (5.74), можно задачу исследования всей системы в целом по медленно меняющейся составляющей (устойчивость и динамика движения) свести к линейной задаче с соответствующими переменными коэффициентами.

При этом надо иметь в виду, что поскольку коэффициент k_n в формулах (5.73) и (5.74) зависит, вообще говоря, от соотношения всех параметров системы, то в системе с переменными параметрами он тоже будет в общем случае переменным. Например, для системы, изображенной на рис. 5.6, выше было получено выражение для коэффициента k_n в виде (5.75). Допустим, что в данной системе параметр k_1 является переменным (медленно меняющимся во времени). Тогда и коэффициент k_n , полученный в результате обычной линеаризации функции смещения $\Phi(x^0)$, тоже будет переменным.

Другие приближенные методы исследования систем с изменяющимися во времени параметрами изложены в книге Ю. А. Митропольского [170], а также в § 8 книги [181].

Следующие параграфы настоящей главы посвящаются вычислению коэффициентов гармонической линеаризации по формулам (5.4) для различных видов нелинейностей.

§ 5.6. Гармоническая линеаризация релейных характеристик при несимметричных колебаниях

В главе III гармоническая линеаризация нелинейностей выполнялась для случая симметричных колебаний в системе. Теперь для выполнения гармонической линеаризации нелинейной функции $F(x, px)$ при несимметричных колебаниях будем полагать, что решение для входной величины x нелинейного звена ищется в виде

$$x = x^0 + A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t.$$

Нелинейная функция $F(x, px)$ будет в этом случае периодической функцией аргумента ψ с постоянной составляющей F^0 .

Если ограничиться учетом первой гармоники разложения периодической функции $F(x^0 + A \sin \psi)$ в ряд Фурье, то нелинейная функция $F(x, px)$ по методу гармонической линеаризации будет заменяться следующим соотношением:

$$F(x, px) = F^0(A, \Omega, x^0) + \left[q(A, \Omega, x^0) + \frac{q'(A, \Omega, x^0)}{\Omega} p \right] (x - x^0), \quad (5.81)$$

где постоянная составляющая F^0 и коэффициенты q и q' вычисляются по формулам (5.4):

$$F^0(A, \Omega, x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) d\psi, \quad (5.82)$$

$$q(A, \Omega, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \quad (5.83)$$

$$q'(A, \Omega, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (5.84)$$

Если нелинейная функция не зависит от скорости входной величины, то формула гармонической линеаризации (5.81) примет вид

$$F(x) = F^0(A, x^0) + \left[q(A, x^0) + \frac{q'(A, x^0)}{\Omega} p \right] (x - x^0), \quad (5.85)$$

где

$$F^0(A, x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi, \quad (5.86)$$

$$q(A, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (5.87)$$

$$q'(A, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (5.88)$$

Аналогично может быть выполнена и линеаризация для нелинейных функций, зависящих от ускорения входной величины, а также для нелинейностей, под знаком нелинейной функции которых содержится как входная, так и выходная величины (нелинейности второго класса), и для других случаев. Это будет показано на конкретных примерах в следующей главе.

Вычислим значения F^0 , q и q' для часто встречающихся нелинейных функций с тем, чтобы упростить задачу исследования нелинейных систем методом гармонической линеаризации при несимметричных колебаниях.

Релейная характеристика общего вида. Релейная характеристика общего вида при несимметричных колебаниях входной величины x представлена на рис. 5.16, а. Здесь m — любое дробное число в интервале $-1 \leq m \leq 1$. Определим постоянную составляющую и коэффициенты гармонической линеаризации при

условии $A \geq b + |x^0|$. Вычисляя значения F^0 , q и q' в соответствии с видом функции $F(x^0 + A \sin \psi)$, представленной на рис. 5.16, б, получим:

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{c}{2\pi} \left(\int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} d\psi - \int_{\pi + \psi_3}^{2\pi - \psi_4} d\psi \right) = \\ &= \frac{c}{2\pi} \left(\psi \Big|_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} - \psi \Big|_{\pi + \psi_3}^{2\pi - \psi_4} \right) = \frac{c}{2\pi} (\psi_3 - \psi_1 + \psi_4 - \psi_2). \end{aligned}$$

С учетом значений соответствующих углов

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b + x^0}{A} - \arcsin \frac{b - x^0}{A} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin \frac{mb + x^0}{A} - \arcsin \frac{mb - x^0}{A} \right) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|. \quad (5.89) \end{aligned}$$

Далее для $q(A, x^0)$ получаем:

$$\begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{c}{\pi A} \left(\int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} \sin \psi d\psi - \int_{\pi + \psi_3}^{2\pi - \psi_4} \sin \psi d\psi \right) = \\ &= \frac{c}{\pi A} \left(\cos \psi \Big|_{\pi + \psi_3}^{2\pi - \psi_4} - \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} \right) = \\ &= \frac{c}{\pi A} (\cos \psi_1 + \cos \psi_2 + \cos \psi_3 + \cos \psi_4). \end{aligned}$$

Учитывая значения углов ψ_1, \dots, ψ_4 , находим:

$$\begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \frac{(b + x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b - x^0)^2}{A^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - \frac{(mb + x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb - x^0)^2}{A^2}} \right] \quad \text{при } A \geq b + |x^0|. \quad (5.90) \end{aligned}$$

Наконец, для $q'(A, x^0)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} q'(A, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{c}{\pi A} \left(\int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} \cos \psi d\psi - \int_{\pi + \psi_3}^{2\pi - \psi_4} \cos \psi d\psi \right) = \sin \psi_2 - \sin \psi_1 + \sin \psi_4 - \sin \psi_3. \end{aligned}$$

С учетом значений соответствующих синусов получим:

$$q'(A) = -\frac{2cb}{\pi A^2} (1 - m) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|. \quad (5.91)$$

Релейная характеристика при смещенной гистерезисной петле. Постоянную составляющую и коэффициенты гармонической линеаризации для релейной характеристики при смещенной гистерезисной

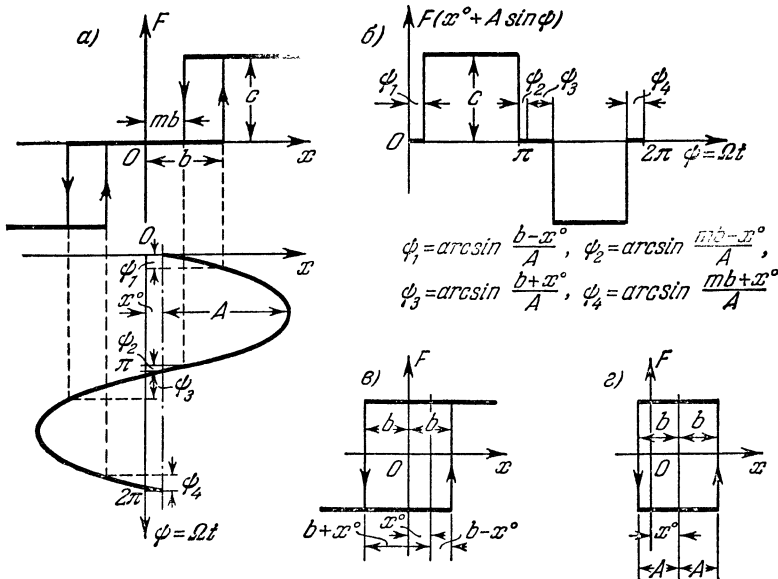


Рис. 5.16.

петле (рис. 3.2, а) получим из коэффициентов релейной характеристики общего вида. Взяв m в (5.89), (5.90) и (5.91) со знаком минус, получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{A} - \arcsin \frac{b-x^0}{A} - \arcsin \frac{mb-x^0}{A} + \arcsin \frac{mb+x^0}{A} \right) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|, \quad (5.92)$$

$$q(A, x^0) = \frac{c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb-x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb+x^0)^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|, \quad (5.93)$$

$$q'(A) = -\frac{2cb}{\pi A^2} (1 + m) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|. \quad (5.94)$$

Релейная характеристика с гистерезисной петлей. Считая, что релейная характеристика с гистерезисной петлей (рис. 5.16, в) есть частный случай релейной характеристики общего вида при $m = -1$,

из (5.89), (5.90) и (5.91) получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{A} - \arcsin \frac{b-x^0}{A} \right) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|, \quad (5.95)$$

$$q(A, x^0) = \frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|, \quad (5.96)$$

$$q'(A) = -\frac{4cb}{\pi A^2} \quad \text{при } A \geq b + |x^0|. \quad (5.97)$$

Релейная характеристика с гистерезисной петлей переменной ширины. Для релейной характеристики с гистерезисной петлей переменной ширины (рис. 5.16, з) следует иметь в виду, что она смещается вместе с центром колебаний, а амплитуда колебаний равна половине ширины петли. Для получения значений постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линейаризации нелинейной характеристики вида рис. 5.16, з по формулам для предыдущей характеристики следует иметь в виду, что при смещении центра колебаний (рис. 5.16, в) отрезки характеристики $b+x^0$ и $b-x^0$ превращаются в отрезки, равные амплитуде A (рис. 5.16, з). Заменяя в формулах (5.95) и (5.96) $b+x^0$ и $b-x^0$ значением A и в формуле (5.97) $2b$ величиной $2A$, получим:

$$F^0(A, x^0) = 0, \quad q(A, x^0) = 0, \quad q'(A) = -\frac{4c}{\pi A}. \quad (5.98)$$

Как видно из (5.98), при изменении входной величины нелинейного звена по закону синуса для данной характеристики получим выходную величину, изменяющуюся по закону минус косинуса. Следовательно, приведенная характеристика при колебательных процессах дает эффект, эквивалентный эффекту интегрирующего звена, создавая отставание по фазе выходной величины относительно входной на угол $B = -\frac{\pi}{2}$.

Релейная характеристика с зоной нечувствительности. Релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 3.2, з) следует рассматривать как частный случай релейной характеристики общего вида при $m=1$. Тогда из (5.89) — (5.91) получим значения постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линейаризации:

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{A} - \arcsin \frac{b-x^0}{A} \right) \quad \text{при } A \geq b + |x^0|, \quad (5.99)$$

$$\left. \begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A^2}} \right) \\ &\quad \text{при } A \geq b + |x^0|, \\ q'(A) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.100)$$

Идеальная релейная характеристика. Для идеальной релейной характеристики (рис. 3.2, д), полагая в (5.99) и (5.100) $b=0$,

получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A} \quad \text{при } A \geq |x^0|, \quad (5.101)$$

$$q(A, x^0) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \quad \text{при } A \geq |x^0|, \quad q'(A) = 0. \quad (5.102)$$

Релейные несимметричные характеристики. До сих пор рассматривались симметричные релейные характеристики. Они получались как результат работы релейного элемента на включение и переключение следующего за ним звена. Часто в системах релейный элемент работает на включение и отключение последующего за ним звена. В этом случае все ранее приведенные релейные характеристики будут несимметричными относительно начала координат. Вычислим коэффициенты гармонической линеаризации для несимметричных релейных характеристик.

Релейная несимметричная характеристика общего вида. Релейная несимметричная характеристика общего вида при гармониче-

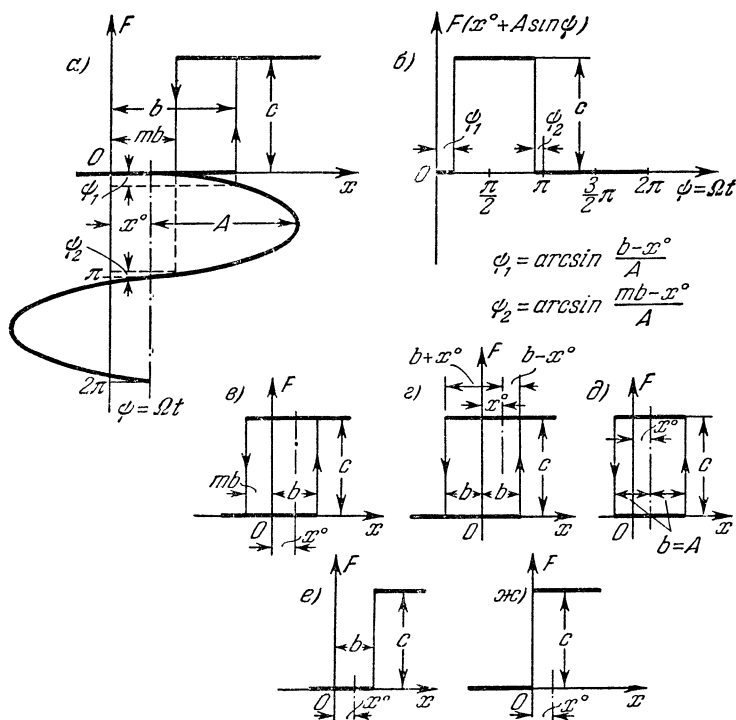


Рис. 5.17.

ском изменении входной величины x со смещенным центром колебаний представлена на рис. 5.17, а. Так будет изменяться напряжение

на потребителе, управляемом поляризованным реле от тока управления, если реле при срабатывании включает потребитель на полное напряжение, а при отпускиании выключает.

Вычисляя постоянную составляющую и коэффициенты гармонической линейризации по формулам (5.86) — (5.88), получим:

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{c}{2\pi} \int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} d\psi = \frac{c}{2\pi} \psi \Big|_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} = \\ &= \frac{c}{2\pi} (\pi - \psi_2 - \psi_1). \end{aligned}$$

При подстановке значений соответствующих углов имеем¹⁾:

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{c}{2} - \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b - x^0}{A} + \arcsin \frac{mb - x^0}{A} \right) \quad (5.103) \\ \text{при } A &\geq |b - x^0|, \quad A \geq |x^0 - mb|. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{c}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{c}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} = \frac{c}{\pi A} (\cos \psi_1 + \cos \psi_2), \end{aligned}$$

или с учетом значений углов ψ_1 и ψ_2

$$\begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b - x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb - x^0)^2}{A^2}} \right) \quad (5.104) \\ \text{при } A &\geq |b - x^0|, \quad A \geq |x^0 - mb|. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} q'(A, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{c}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{c}{\pi A} \sin \psi \Big|_{\psi_1}^{\pi - \psi_2} = \frac{c}{\pi A} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1), \end{aligned}$$

или с учетом значений соответствующих синусов

$$\begin{aligned} q'(A) &= -\frac{cb}{\pi A^2} (1 - m) \quad (5.105) \\ \text{при } A &\geq |b - x^0|, \quad A \geq |x^0 - mb|. \end{aligned}$$

Релейная несимметричная характеристика со смещенной гистерезисной петлей (рис. 5.17, в). По такой характеристике будет, например, изменяться напряжение на потребителе, управляемом поля-

¹⁾ Те же самые формулы для F^0 , q и q' , что и здесь, будут иметь место при колебаниях на одном контакте реле общего вида (рис. 5.16, а) с добавлением только третьего условия $A \leq |x^0| + mb$.

ризованным трехпозиционным реле, работающим на включение и отключение потребителя.

Для определения постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линейаризации данной характеристики следует в формулах (5.103) — (5.105) учесть при m знак минус. Тогда получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{2} - \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b - x^0}{A} - \arcsin \frac{mb + x^0}{A} \right) \quad (5.106)$$

при $A \geq |b - x^0|$, $A \geq |x^0 + mb|$,

$$q(A, x^0) = \frac{c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b - x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb + x^0)^2}{A^2}} \right) \quad (5.107)$$

при $A \geq |b - x^0|$, $A \geq |x^0 + mb|$,

$$q'(A) = -\frac{cb}{\pi A^3} (1 + m) \quad (5.108)$$

при $A \geq |b - x^0|$, $A \geq |x^0 + mb|$.

Релейная несимметричная характеристика с гистерезисной петлей. Релейная характеристика с гистерезисной петлей (рис. 5.17, з) будет представлять, например, зависимость напряжения на потребителе, управляемом двухпозиционным поляризованным реле, от тока управления, если реле работает на включение и отключение.

Полагая в формулах (5.103) — (5.105) значение $m = -1$, получим выражения для постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линейаризации:

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b + x^0}{A} - \arcsin \frac{b - x^0}{A} \right) \quad (5.109)$$

при $A \geq b + |x^0|$,

$$q(A, x^0) = \frac{c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b - x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b + x^0)^2}{A^2}} \right) \quad (5.110)$$

при $A \geq b + |x^0|$,

$$q'(A) = -\frac{2cb}{\pi A^3} \quad \text{при} \quad A \geq b + |x^0|. \quad (5.111)$$

Релейная несимметричная характеристика с гистерезисной петлей переменной ширины. Для релейной несимметричной характеристики с гистерезисной петлей переменной ширины (рис. 5.17, д), заменяя в (5.109) и (5.110) $b + x^0$ и $b - x^0$ значением A в соответствии с заменой отрезков $b + x^0$ и $b - x^0$ на A при переходе от характеристики, изображенной на рис. 5.17, з, к характеристике рис. 5.17, д и в (5.111) $2b$ значением $2A$, получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{2}; \quad q(A, x^0) = 0; \quad q'(A) = -\frac{2c}{\pi A}. \quad (5.112)$$

Релейная несимметричная характеристика с зоной нечувствительности. Рассматривая релейную несимметричную характеристику

с зоной нечувствительности (рис. 5.17, *е*) как частный случай релейной несимметричной характеристики общего вида при $m=1$, из (5.103) — (5.105) получим значения постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линеаризации:

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{2} - \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{b-x^0}{A} \quad \text{при } A \geq |b-x^0|, \quad (5.113)$$

$$\left. \begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{2c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} \quad \text{при } A \geq |b-x^0|, \\ q'(A) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.114)$$

Релейная несимметричная идеальная характеристика. Релейную несимметричную идеальную характеристику (рис. 5.17, *жс*) можно рассматривать как частный случай предыдущей характеристики при $b=0$. Тогда из (5.113) и (5.114) получим значения F^0 и q :

$$F^0(A, x^0) = \frac{c}{2} + \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A} \quad \text{при } A \geq |x^0|, \quad (5.115)$$

$$\left. \begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{2c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \quad \text{при } A \geq |x^0|, \\ q'(A) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

§ 5.7. Гармоническая линеаризация кусочно-линейных однозначных и петлевых характеристик

В данном параграфе будут рассмотрены нелинейные характеристики типа насыщения, характеристики с зоной нечувствительности, с переменным коэффициентом усиления, с гистерезисом и насыщением, а также зазором (люфтом).

Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности и насыщением. Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности и насыщением при несимметричных колебаниях входной величины нелинейного звена изображена на рис. 5.18, *а*. Коэффициент $q'(A)$ в этом случае равен нулю, так как характеристика однозначная.

Определим значения постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ и коэффициента гармонической линеаризации $q(A, x^0)$ в соответствии с видом функции $F(x^0 + A \sin \psi)$, показанной на рис. 5.18, *б*.

Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ имеем:

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2k \int_{\psi_1}^{\psi_2} [A \sin \psi - \right. \\ &\left. - (b_1 - x^0)] d\psi + c \int_{\psi_2}^{\pi - \psi_2} d\psi - 2k \int_{\psi_3}^{\psi_4} [A \sin \psi - (b_1 + x^0)] d\psi - c \int_{\pi + \psi_4}^{2\pi - \psi_4} d\psi \right\}. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и учитывая значения соответствующих углов, получим:

$$\begin{aligned}
 F^0(A, x^0) = & \frac{kA}{\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{(b_1 - x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b_1 + x^0)^2}{A^2}} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} \right) + \frac{k}{\pi} (b_1 - x^0) \left(\arcsin \frac{b_1 - x^0}{A} - \arcsin \frac{b_2 - x^0}{A} \right) + \\
 & + \frac{k}{\pi} (b_1 + x^0) \left(\arcsin \frac{b_2 + x^0}{A} - \arcsin \frac{b_1 + x^0}{A} \right) + \\
 & + \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2 + x^0}{A} - \arcsin \frac{b_2 - x^0}{A} \right) \quad (5.117) \\
 & \text{при } A \geq b_2 + |x^0|.
 \end{aligned}$$

Для коэффициента $q(A, x^0)$ имеем:

$$\begin{aligned}
 q(A, x^0) = & \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\
 = & \frac{1}{\pi A} \left\{ 2k \int_{\psi_1}^{\psi_2} [A \sin \psi - (b_1 - x^0)] \sin \psi d\psi + \right. \\
 & \left. + 2k \int_{\psi_3}^{\psi_4} [A \sin \psi - (b_1 + x^0)] \sin \psi d\psi + c \int_{\psi_2}^{\pi - \psi_2} \sin \psi d\psi - c \int_{\pi + \psi_4}^{2\pi - \psi_4} \sin \psi d\psi \right\}.
 \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и учитывая значения соответствующих углов, получим:

$$\begin{aligned}
 q(A, x^0) = & \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2 - x^0}{A} - \arcsin \frac{b_1 - x^0}{A} + \arcsin \frac{b_2 + x^0}{A} - \right. \\
 & - \arcsin \frac{b_1 + x^0}{A} + \frac{b_1 - x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_1 - x^0)^2}{A^2}} - \frac{b_2 - x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} + \\
 & + \frac{b_1 + x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_1 + x^0)^2}{A^2}} - \frac{b_2 + x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} \Big) + \\
 & + \frac{2k}{\pi A} (b_1 - x^0) \left(\sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b_1 - x^0)^2}{A^2}} \right) - \\
 & - \frac{2k}{\pi A} (b_1 + x^0) \left(\sqrt{1 - \frac{(b_1 + x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} \right) + \\
 & + \frac{2c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} \right) \quad (5.118) \\
 & \text{при } A \geq b_2 + |x^0|.
 \end{aligned}$$

Нелинейная характеристика с зоной нечувствительности без насыщения (рис. 5.18, в). Соответствующая периодическая функция $F(x^0 + A \sin \psi)$ для данной характеристики представлена на рис. 5.18, г.

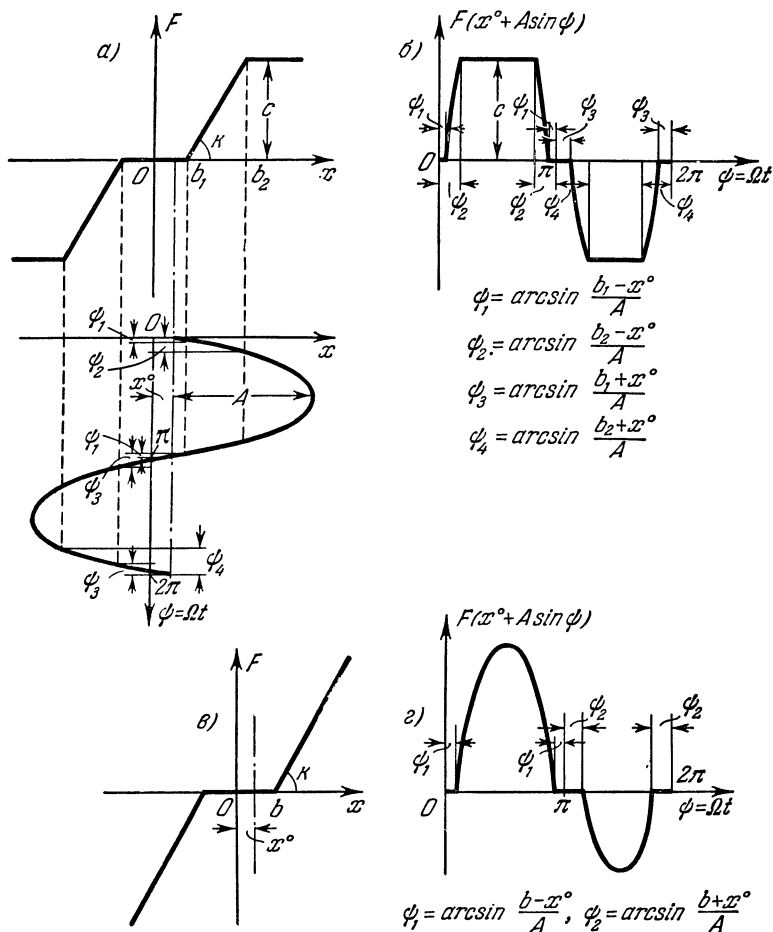


Рис. 5.18.

Выполняя вычисления для постоянной составляющей, получим:

$$\begin{aligned}
 F^0(A, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\phi_1}^{\pi - \phi_1} k[A \sin \psi - (b - x^0)] d\psi - \int_{\phi_2}^{\pi - \phi_2} k[A \sin \psi - (b + x^0)] d\psi \right\} = \\
 &= \frac{kA}{\pi} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) + kx^0 + \frac{k}{\pi} [b(\phi_1 - \phi_2) - x^0(\phi_1 + \phi_2)].
 \end{aligned}$$

что после подстановки значений соответствующих углов дает

$$F^0(A, x^0) = \frac{kA}{\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A^2}} \right) + \\ + kx^0 + \frac{k}{\pi} \left[b \left(\arcsin \frac{b-x^0}{A} - \arcsin \frac{b+x^0}{A} \right) - \right. \\ \left. - x^0 \left(\arcsin \frac{b-x^0}{A} + \arcsin \frac{b+x^0}{A} \right) \right] \quad (5.119) \\ \text{при } A \geq b + |x^0|.$$

Вычисляя коэффициент $q(A, x^0)$, получаем:

$$q(A, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi A} \left\{ \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_1} k [A \sin \psi - \right. \\ \left. - (b-x^0)] \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi-\psi_2} k [A \sin \psi - (b+x^0)] \sin \psi d\psi \right\} = \\ = \frac{k}{\pi} \left[\pi - (\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{2} (\sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2) \right] - \frac{2k}{\pi A} [(b-x^0) \cos \psi_1 + \\ + (b+x^0) \cos \psi_2],$$

что с учетом значений углов дает

$$q(A, x^0) = k - \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b-x^0}{A} + \arcsin \frac{b+x^0}{A} + \right. \\ \left. + \frac{b-x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} + \frac{b+x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A^2}} \right) \quad (5.120) \\ \text{при } A \geq b + |x^0|.$$

Нелинейная характеристика без зоны нечувствительности с насыщением. Для нелинейной характеристики без зоны нечувствительности с насыщением (рис. 3.5, д) при несимметричных колебаниях следует в (5.117) и (5.118) положить $b_1 = 0$, $b_2 = b$, $c = kb$. Тогда получим следующие значения постоянной составляющей F^0 и коэффициента гармонической линеаризации q :

$$F^0(A, x^0) = \frac{k}{\pi} \left[A \left(\sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} \right) + \right. \\ \left. + (b+x^0) \arcsin \frac{b+x^0}{A} - (b-x^0) \arcsin \frac{b-x^0}{A} \right] \quad (5.121) \\ \text{при } A \geq b + |x^0|;$$

$$q(A, x^0) = \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b-x^0}{A} + \arcsin \frac{b+x^0}{A} + \right. \\ \left. + \frac{b-x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A^2}} + \frac{b+x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A^2}} \right) \quad (5.122) \\ \text{при } A \geq b + |x^0|.$$

Проиллюстрируем на примере данной нелинейной характеристики графики $\frac{F^0}{b} = f\left(\frac{x^0}{b}\right)$ при $\frac{A}{b} = \text{const}$ и $q = f\left(\frac{A}{b}\right)$ при $\frac{x^0}{b} = \text{const}$,

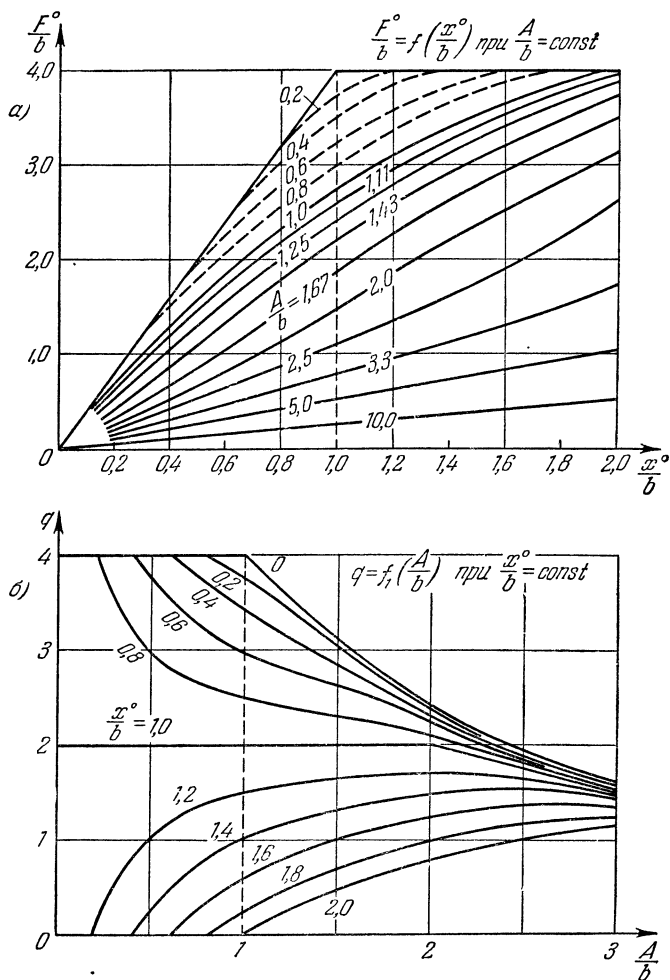


Рис. 5.19.

вычисленные по формулам (5.121), (5.122) и представленные на рис. 5.19, а и б.

Из графиков $\frac{F^0}{b} = f\left(\frac{x^0}{b}\right)$ (рис. 5.19, а) видно, что при наличии колебаний входной величины нелинейного звена его статическая характеристика для медленно меняющегося воздействия (функция сме-

щения) сглаживается, причем увеличение амплитуды колебаний входной величины приводит к уменьшению коэффициента усиления нелинейного звена по постоянному или медленно меняющемуся входному воздействию.

Графики $q(A) = f_1\left(\frac{A}{b}\right)$ (рис. 5.19, б) характеризуют прохождение через нелинейное звено колебательной составляющей в зависимости

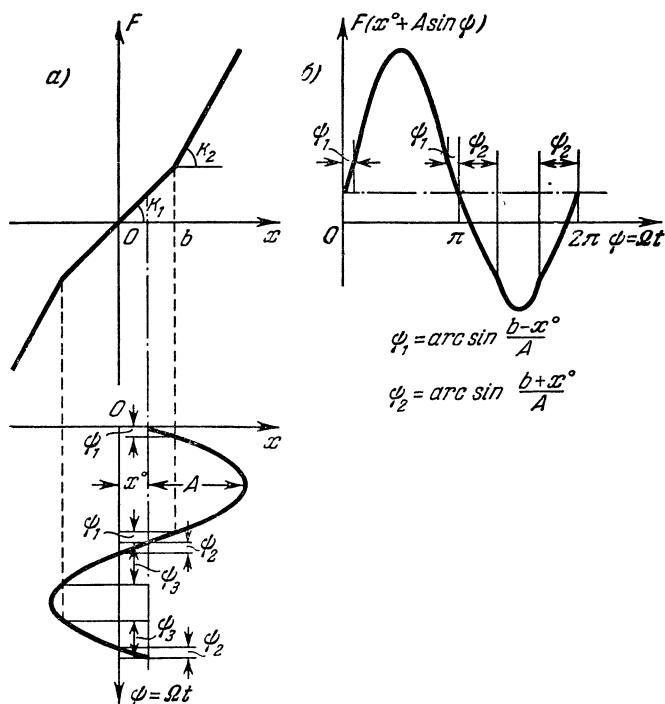


Рис. 5.20.

от амплитуды на входе и смещения центра колебаний. Как видно, увеличение смещения приводит к уменьшению коэффициента усиления для колебательной составляющей.

Нелинейная характеристика с переменным коэффициентом усиления. Нелинейная характеристика с переменным коэффициентом усиления при несимметричных колебаниях входной величины нелинейного звена представлена на рис. 5.20, а. Так как характеристика однозначная, то коэффициент $q'(A) = 0$. Вычислим в соответствии со значениями функции $F(x^0 + A \sin \psi)$, показанной на рис. 5.20, б, значения $F^0(A, x^0)$ и $q(A, x^0)$.

Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ имеем:

$$F^0(A, x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \int_0^{\psi_1} k_1(x^0 + A \sin \psi) d\psi + \right. \\ \left. + 2 \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} k_1 b d\psi + 2 \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} k_2 [A \sin \psi - (b - x^0)] d\psi + 2 \int_0^{\psi_2} k_1(x^0 - A \sin \psi) d\psi - \right. \\ \left. - 2 \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} k_1 b d\psi - 2 \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} k_2 [A \sin \psi - (b + x^0)] d\psi \right\}.$$

Выполняя интегрирование и подставляя значения соответствующих углов, получим:

$$F^0(A, x^0) = k_2 x^0 + \frac{k_2 - k_1}{\pi} \left[A \left(\sqrt{1 - \frac{(b - x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b + x^0)^2}{A^2}} \right) + \right. \\ \left. + (b - x^0) \arcsin \frac{b - x^0}{A} + (b + x^0) \arcsin \frac{b + x^0}{A} \right] \quad (5.123) \\ \text{при } A \geq b + |x^0|.$$

Для коэффициента $q(A, x^0)$ имеем:

$$q(A, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi A} \left\{ 2 \int_0^{\psi_1} k_1(x^0 + A \sin \psi) \times \right. \\ \times \sin \psi d\psi + 2 \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} k_1 b \sin \psi d\psi + 2 \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} k_2 [A \sin \psi - (b - x^0)] \sin \psi d\psi - \\ \left. - 2 \int_0^{\psi_2} k_1(x^0 - A \sin \psi) \sin \psi d\psi + 2 \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} k_1(A \sin \psi - x^0) \sin \psi d\psi + \right. \\ \left. + 2 \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} k_2 [A \sin \psi - (b + x^0)] \sin \psi d\psi \right\}.$$

Выполняя интегрирование и подставляя значения соответствующих углов, получим:

$$q(A, x_0) = k_2 - \frac{k_2 - k_1}{\pi A} \left[(b - x^0) \sqrt{1 - \frac{(b - x^0)^2}{A^2}} + \right. \\ \left. + (b + x^0) \sqrt{1 - \frac{(b + x^0)^2}{A^2}} + A \left(\arcsin \frac{b - x^0}{A} + \arcsin \frac{b + x^0}{A} \right) \right] \quad (5.124) \\ \text{при } A \geq b + |x^0|.$$

Нелинейная характеристика с гистерезисной петлей и насыщением. Нелинейная характеристика с гистерезисной петлей и насыщением при несимметричных колебаниях входной величины нелинейного звена

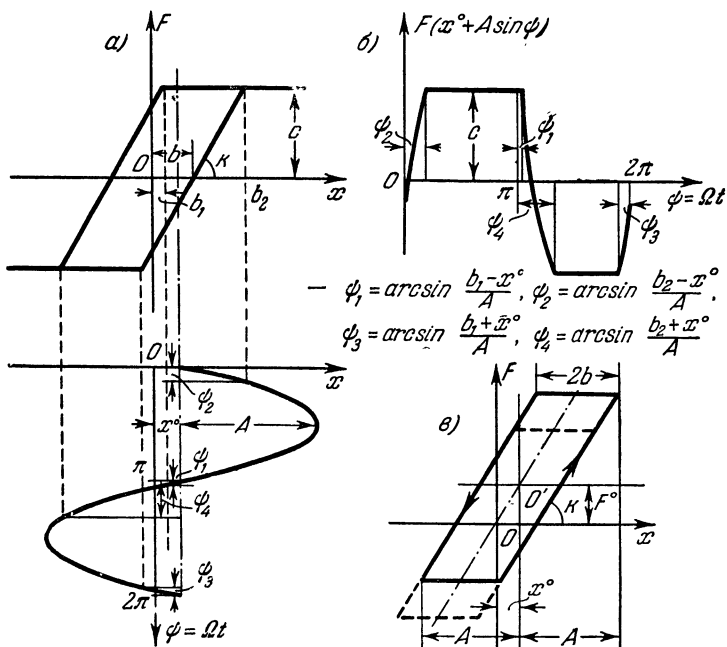


Рис. 5.21.

представлена на рис. 5.21, а. Вычислим значения постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ и коэффициентов $q(A, x^0)$ и $q'(A)$ по формулам (5.86) — (5.88) в соответствии с видом функции $F(x^0 + A \sin \psi)$ (рис. 5.21, б).

Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$, согласно (5.86), имеем:

$$\begin{aligned}
 F^0(A, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\psi_2} k(x^0 + A \sin \psi - b) d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi + \psi_1} c d\psi + \right. \\
 &+ \int_{\pi + \psi_1}^{\pi + \psi_4} k(x^0 + A \sin \psi + b) d\psi - \int_{\pi + \psi_4}^{2\pi - \psi_3} c d\psi + \left. \int_{2\pi - \psi_3}^{2\pi} k(x^0 + A \sin \psi - b) d\psi \right] = \\
 &= \frac{k}{2\pi} [(x^0 - b)(\psi_2 + \psi_3) + (x^0 + b)(\psi_4 - \psi_1)] + \frac{c}{2\pi} (\psi_1 - \psi_2 + \\
 &+ \psi_3 + \psi_4) + \frac{kA}{2\pi} (\cos \psi_3 - \cos \psi_1 - \cos \psi_2 + \cos \psi_4).
 \end{aligned}$$

Подставляя значения соответствующих углов (рис. 5.21, б), получим:

$$\begin{aligned}
 F^0(A, x^0) = & \frac{k}{2\pi} \left[(x^0 + b) \left(\arcsin \frac{b_1 - x^0}{A} + \arcsin \frac{b_2 + x^0}{A} \right) + (x^0 - b) \times \right. \\
 & \times \left(\arcsin \frac{b_1 + x^0}{A} + \arcsin \frac{b_2 - x^0}{A} \right) \Big] - \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b_1 - x^0}{A} + \right. \\
 & \left. + \arcsin \frac{b_2 - x^0}{A} - \arcsin \frac{b_1 + x^0}{A} - \arcsin \frac{b_2 + x^0}{A} \right) - \\
 & - \frac{kA}{2\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{(b_1 - x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b_1 + x^0)^2}{A^2}} - \right. \\
 & \left. - \sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b_2 + |x^0|. \quad (5.125)
 \end{aligned}$$

Для коэффициента $q(A, x^0)$ в соответствии с (5.87) имеем:

$$\begin{aligned}
 q(A, x^0) = & \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\
 = & \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^{\psi_2} k(x^0 + A \sin \psi - b) \sin \psi d\psi + \right. \\
 & + \int_{\psi_2}^{\pi + \psi_1} c \sin \psi d\psi + \int_{\pi + \psi_1}^{\pi + \psi_4} k(x^0 + A \sin \psi + b) \sin \psi d\psi - \\
 & - \int_{\pi + \psi_4}^{2\pi - \psi_3} c \sin \psi d\psi + \left. \int_{2\pi - \psi_3}^{2\pi} k(x^0 + A \sin \psi - b) \sin \psi d\psi \right] = \\
 = & \frac{k}{\pi A} [(x^0 + b)(\cos \psi_4 - \cos \psi_1) - (x^0 - b)(\cos \psi_2 - \cos \psi_3)] + \\
 & + \frac{c}{\pi A} (\cos \psi_1 + \cos \psi_2 + \cos \psi_3 + \cos \psi_4) + \\
 & + \frac{k}{2\pi} \left(-\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_3 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sin 2\psi_4 \right).
 \end{aligned}$$

Подставляя значения соответствующих углов (рис. 5.21, б), получим:

$$\begin{aligned}
 q(A, x^0) = & \frac{k}{\pi A} \left[(x^0 + b) \left(\sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b_1 - x^0)^2}{A^2}} \right) - \right. \\
 & \left. - (x^0 - b) \left(\sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b_1 + x^0)^2}{A^2}} \right) \right] + \\
 & + \frac{c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \frac{(b_1 - x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b_1 + x^0)^2}{A^2}} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} \right) + \frac{k}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b_1 - x^0}{A} + \arcsin \frac{b_2 - x^0}{A} + \right. \\
 & \left. + \arcsin \frac{b_1 + x^0}{A} + \arcsin \frac{b_2 + x^0}{A} - \frac{b_1 - x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_1 - x^0)^2}{A^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{b_2 - x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_2 - x^0)^2}{A^2}} - \frac{b_1 + x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_1 + x^0)^2}{A^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{b_2 + x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b_2 + x^0)^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b_2 + |x^0|. \quad (5.126)
 \end{aligned}$$

Для коэффициента $q'(A)$ в соответствии с (5.88) имеем:

$$\begin{aligned}
 q'(A) = & \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^{\psi_2} k(x^0 + A \sin \psi - b) \times \right. \\
 & \times \cos \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi + \psi_1} c \cos \psi d\psi + \int_{\pi + \psi_1}^{\pi + \psi_4} k(x^0 + A \sin \psi + b) \cos \psi d\psi - \\
 & \left. - \int_{\pi + \psi_4}^{2\pi - \psi_3} c \cos \psi d\psi + \int_{2\pi - \psi_3}^{2\pi} k(x^0 + A \sin \psi - b) \cos \psi d\psi \right] = \\
 = & \frac{k}{\pi A} [(x^0 - b)(\sin \psi_2 + \sin \psi_3) + (x^0 + b)(\sin \psi_1 - \sin \psi_4)] - \\
 & - \frac{c}{\pi A} (\sin \psi_1 + \sin \psi_2 - \sin \psi_3 + \sin \psi_4) + \\
 & + \frac{k}{2\pi} (-\sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2 - \sin^2 \psi_3 + \sin^2 \psi_4).
 \end{aligned}$$

Подставляя значения соответствующих углов (рис. 5.21, б), получим:

$$q'(A) = -\frac{4bc}{\pi A^2} \quad \text{при } A \geq b_2 + |x^0|. \quad (5.127)$$

Нелинейная характеристика типа люфта или зазора. В случае несимметричных колебаний нелинейная характеристика типа люфта или зазора (рис. 5.21, в) смещается вдоль средней линии, так что ее прежний центр O переходит в положение O' . Постоянная составляющая функция $F(x)$ в этом случае определяется соотношением

$$F^0 = kx^0.$$

Изменение колебательной составляющей функции $F(x^0 + A \sin \psi)$ относительно нового центра колебаний не зависит от величины смещения x^0 и будет протекать так же, как если бы этого смещения не было. Так, например, шестеренчатая пара, имеющая люфт, передает движение с тем же передаточным числом для любых углов поворота ведущей шестерни. В случае колебаний в кинематической передаче, включающей данную шестеренчатую пару, люфт будет проявлять себя одинаково для любых углов поворота.

Поэтому для коэффициентов гармонической линейаризации характеристики типа люфта или зазора в случае смещенного центра колебаний относительно начала отсчета будем иметь те же формулы (3.28) и (3.29), что и для случая симметричных колебаний:

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right] \text{ при } A \geq b \quad (5.128)$$

$$q'(A) = -\frac{4kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A} \right) \text{ при } A \geq b. \quad (5.129)$$

§ 5.8. Гармоническая линейаризация степенных нелинейных характеристик

Степенные нелинейные характеристики вида $F(x) = kx^n$ при n целых нечетных, или $F(x) = kx^n \operatorname{sign} x$ при n целых четных, для случая несимметричных колебаний входной величины нелинейного звена изображены в виде графика (рис. 5.22, а). Периодическая функция $F(x^0 + A \sin \psi)$ аргумента $\psi = \Omega t$ представлена для этого случая на рис. 5.22, б.

Так как степенные характеристики однозначны, то при всех n будем иметь $q'(A) = 0$. При $n = 1$ получим линейную характеристику.

Вычислим значения постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ и коэффициента $q(A, x^0)$ симметричных и несимметричных (имеющих одну ветвь) степенных характеристик при несимметричных колебаниях входной величины нелинейного звена для значений $n = 2$ и $n = 3$.

Степенная симметричная характеристика $F(x) = kx^2 \operatorname{sign} x$. Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ в соответствии с (5.86) и рис. 5.22, б находим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \\ = \frac{k}{2\pi} \left[\int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} (x^0 + A \sin \psi)^2 d\psi - \int_{\pi + \psi_1}^{2\pi - \psi_1} (x^0 + A \sin \psi)^2 d\psi \right] = \\ = \frac{k}{\pi} \left\{ [2(x^0)^2 + A^2] \psi_1 - \frac{A^2}{2} \sin 2\psi_1 + 4x^0 A \cos \psi_1 \right\}.$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$, получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{2k}{\pi} \left\{ [(x^0)^2 + \frac{A^2}{2}] \arcsin \frac{x^0}{A} + \frac{3}{2} x^0 A \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right\}. \quad (5.130)$$

Для коэффициента $q(A, x^0)$ в соответствии с (5.87) и рис. 5.22, б находим:

$$\begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{k}{\pi A} \left[\int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} (x^0 + A \sin \psi)^2 \sin \psi d\psi - \int_{\pi + \psi_1}^{2\pi - \psi_1} (x^0 + A \sin \psi)^2 \sin \psi d\psi \right] = \\ &= \frac{k}{\pi A} \left[4(x^0)^2 \cos \psi_1 + 4x^0 A \psi_1 - 2x^0 A \sin 2\psi_1 + 4A^2 \cos \psi_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} A^2 \cos^3 \psi_1 \right]. \end{aligned}$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$, получим:

$$q(A, x^0) = \frac{4k}{\pi} \left\{ x^0 \arcsin \frac{x^0}{A} + \left[\frac{2A}{3} + \frac{(x^0)^3}{3A} \right] \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right\}. \quad (5.131)$$

Степенная симметричная характеристика $F(x) = kx^3$. Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ в соответствии с (5.86) и рис. 5.22, б находим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x^0 + A \sin \psi)^3 d\psi.$$

Интегрируя, получим:

$$F^0(A, x^0) = k \left[(x^0)^3 + \frac{3}{2} x^0 A^2 \right]. \quad (5.132)$$

Для коэффициента $q(A, x^0)$ в соответствии с (5.87) и рис. 5.22, б находим:

$$q(A, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} (x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{k}{\pi A} \int_0^{2\pi} (x^0 + A \sin \psi)^3 \sin \psi d\psi.$$

Интегрируя, получим:

$$q(A, x^0) = 3k \left[(x^0)^2 + \frac{A^2}{4} \right]. \quad (5.133)$$

Степенная несимметричная характеристика $F(x) = kx^2 \cdot 1(x)^1$.
 Степенная несимметричная характеристика $F(x) = kx^2 \cdot 1(x)$ представлена на рис. 5.22, в.

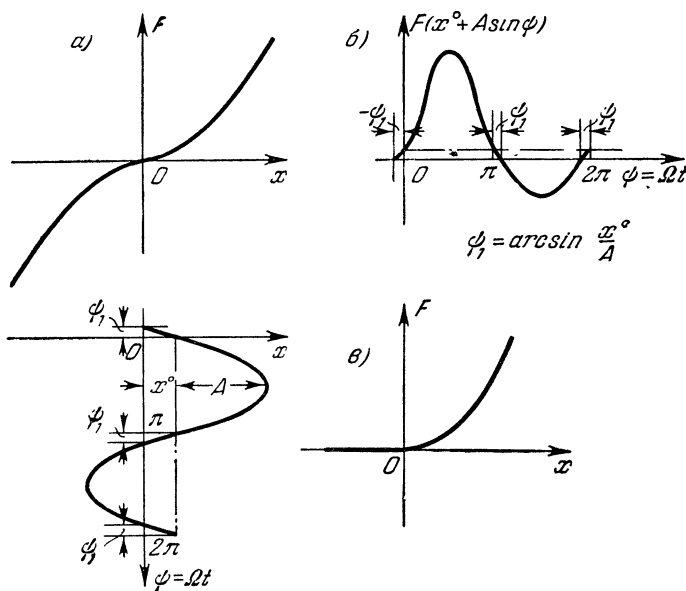


Рис. 5.22.

Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ в соответствии с (5.86) и значением функции $F(x^0 + A \sin \psi)$ находим:

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{k}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} (x^0 + A \sin \psi)^2 d\psi = \\ &= \frac{k}{\pi} \left\{ \left[(x^0)^2 + \frac{A^2}{2} \right] \left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 \right) + 2x^0 A \cos \psi_1 - \frac{A^2}{4} \sin 2\psi_1 \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая значения $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$, получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{k}{\pi} \left\{ \left[(x^0)^2 + \frac{A^2}{2} \right] \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x^0}{A} \right) + \frac{3}{2} x^0 A \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right\}. \quad (5.134)$$

¹⁾ Через $1(x)$ обозначается ступенчатая функция, равная 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$.

Для коэффициента $q(A, x^0)$ в соответствии с (5.87) и значением функции $F(x^0 + A \sin \psi)$ находим:

$$\begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{k}{\pi A} \int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} (x^0 + A \sin \psi)^2 \sin \psi d\psi = \frac{k}{\pi A} \left[x^0 \pi A + 2(x^0)^2 \cos \psi_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2x^0 A \psi_1 - x^0 A \sin 2\psi_1 + 2A^2 \cos \psi_1 - \frac{2}{3} A^2 \cos^3 \psi_1 \right]. \end{aligned}$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$, получим:

$$q(A, x^0) = \frac{2k}{\pi} \left\{ x^0 \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x^0}{A} \right) + \left[\frac{2A}{3} + \frac{(x^0)^2}{3A} \right] \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right\}. \quad (5.135)$$

Степенная несимметричная характеристика $F(x) = kx^3 \cdot 1(x)$. Степенная несимметричная характеристика $F(x) = kx^3 \cdot 1(x)$, так же как и характеристика $F(x) = kx^2 \cdot 1(x)$, имеет одну ветвь (рис. 5.22, в).

Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ в соответствии с (5.86) и значением функции $F(x^0 + A \sin \psi)$ находим:

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{k}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} (x^0 + A \sin \psi)^3 d\psi = \\ &= \frac{k}{2\pi} \left\{ [2(x^0)^3 + 3x^0 A^2] \left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 \right) + 3[2(x^0)^2 A \cos \psi_1 - \right. \\ &\quad \left. - x^0 A^2 \sin \psi_1 \cos \psi_1] + 2A^3 \left(\cos \psi_1 - \frac{\cos^3 \psi_1}{3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$, получим:

$$\begin{aligned} F^0(A, x^0) &= \frac{k}{2\pi} \left\{ [2(x^0)^3 + 3x^0 A^2] \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x^0}{A} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{4}{3} A^2 + \frac{11}{3} (x^0)^2 \right] A \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right\}. \quad (5.136) \end{aligned}$$

Для коэффициента $q(A, x^0)$ в соответствии с (5.87) и значением функции $F(x^0 + A \sin \psi)$ находим:

$$\begin{aligned} q(A, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{k}{\pi A} \int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} (x^0 + \\ &\quad + A \sin \psi)^3 \sin \psi d\psi = \frac{k}{\pi A} \left\{ \left[3(x^0)^2 A + \frac{3}{4} A^3 \right] \left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + [2(x^0)^3 + 6x^0 A^2] \cos \psi_1 - \left[\frac{3}{2} (x^0)^2 A + \frac{1}{2} A^3 \right] \sin 2\psi_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2x^0 A^2 \cos^3 \psi_1 + \frac{1}{16} A^3 \sin 4\psi_1 \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$ и выполняя преобразования, получим:

$$q(A, x^0) = \frac{k}{\pi} \left\{ \left[3(x^0)^2 + \frac{3}{4}A^2 \right] \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x^0}{A} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{13}{4}x^0A + \frac{(x^0)^3}{2A} \right) \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right\}. \quad (5.137)$$

§ 5.9. Гармоническая линейзация несимметричных кусочно-линейных характеристик

Несимметричные кусочно-линейные характеристики, представленные на рис. 5.23, часто встречаются в нелинейных задачах при учете силы реакции контактных пружин или других упругих элементов.

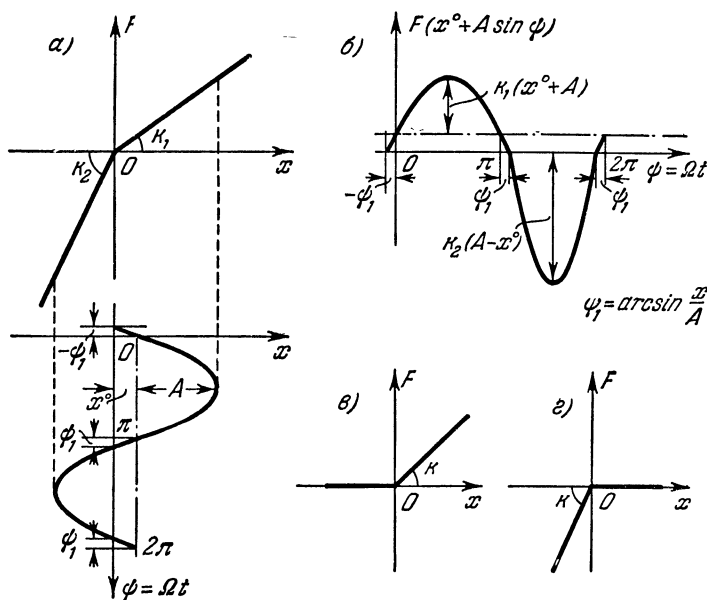


Рис. 5.23.

Кроме того, такие характеристики удобно применять для аппроксимации криволинейных несимметричных характеристик.

Вследствие несимметрии указанных характеристик колебательное движение в системе, имеющей звенья с подобными характеристиками, будет несимметричным даже при отсутствии внешнего воздействия на систему. Гармоническую линейзацию таких характеристик необходимо выполнять для несимметричных колебаний.

Приведенные на рис. 5.23 характеристики однозначны, и поэтому коэффициент гармонической линейзации $q'(A)$ будет обращаться

в нуль. Вычислим значения постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ и коэффициента $q(A, x^0)$ для кусочно-линейных характеристик.

Характеристики типа двусторонней реакции упругого элемента с различной жесткостью. Характеристика типа двусторонней реакции упругого элемента с различной жесткостью при несимметричных колебаниях входной величины x нелинейного звена представлена на рис. 5.23, а. Периодическая функция $F(x^0 + A \sin \psi)$ от аргумента ψ изображена на рис. 5.23, б.

Для постоянной составляющей $F^0(A, x^0)$ в соответствии с (5.86) и рис. 5.23, б находим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} k_1(x^0 + A \sin \psi) d\psi + \int_{\pi + \psi_1}^{2\pi - \psi_1} k_2(x^0 + A \sin \psi) d\psi \right] = \frac{k_1 + k_2}{2} x^0 + \frac{k_1 - k_2}{\pi} (x^0 \psi_1 + A \cos \psi_1).$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$, получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{k_1 + k_2}{2} x^0 + \frac{k_1 - k_2}{\pi} \left(x^0 \arcsin \frac{x^0}{A} + A \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right). \quad (5.138)$$

Для коэффициента $q(A, x^0)$ в соответствии с (5.87) и рис. 5.23, б находим:

$$q(A, x^0) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi A} \left[\int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} k_1(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi + \int_{\pi + \psi_1}^{2\pi - \psi_1} k_2(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi \right] = \\ = \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{\pi A} (2x^0 \cos \psi_1 + A \psi_1 - \frac{A}{2} \sin 2\psi_1).$$

Учитывая значение $\psi_1 = \arcsin \frac{x^0}{A}$, получим:

$$q(A, x^0) = \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{\pi} \left(\arcsin \frac{x^0}{A} + \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right). \quad (5.139)$$

Характеристики типа односторонней реакции упругого элемента. Характеристики типа односторонней реакции упругого элемента представлены на рис. 5.23, в и г. Такие характеристики будут соответствовать, например, зависимости силы реакции неподвижного контакта реле на подвижный от перемещения последнего.

Для характеристики рис. 5.23, в из (5.138) и (5.139) при $k_1 = k$ и $k_2 = 0$ получим значения постоянной составляющей и коэффициента гармонической линеаризации:

$$F^0(A, x^0) = \frac{kx^0}{2} + \frac{k}{\pi} \left(x^0 \arcsin \frac{x^0}{A} + A \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right), \quad (5.140)$$

$$q(A, x^0) = \frac{k}{2} + \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x^0}{A} + \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right). \quad (5.141)$$

Для характеристики рис. 5.23, г, полагая в (5.138) и (5.139) $k_1 = 0$, $k_2 = k$, получим:

$$F^0(A, x^0) = \frac{kx^0}{2} - \frac{k}{\pi} \left(x^0 \arcsin \frac{x^0}{A} + A \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right), \quad (5.142)$$

$$q(A, x^0) = \frac{k}{2} - \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x^0}{A} + \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right). \quad (5.143)$$

Определим также коэффициенты гармонической линеаризации других нелинейных функций, встречающихся в примерах исследования нелинейных систем, рассматриваемых в главе VI.

Обозначим несимметричную релейную идеальную характеристику через $F_1(x)$ и характеристику односторонней реакции упругого элемента через $F_2(x)$ (рис. 5.24, а и б).

Нелинейная функция $F(x, px) = F_1(x)px$. Отыскивая решение для x в виде

$$x = x^0 + A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t, \quad (5.144)$$

имеем:

$$px = A\Omega \cos \psi$$

и, следовательно,

$$F_1(x)px = F_1(x^0 + A \sin \psi) A\Omega \cos \psi.$$

Вычисляя постоянную составляющую $F^0(A, \Omega, x^0)$, получим:

$$\begin{aligned} F^0(A, \Omega, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A\Omega \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{cA\Omega}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} \cos \psi d\psi = \frac{cA\Omega}{2\pi} (-\sin \psi_1 + \sin \psi_1) = 0. \end{aligned}$$

Для коэффициента q имеем:

$$\begin{aligned} q(A, \Omega, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A\Omega \cos \psi \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{c\Omega}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi + \psi_1} \sin 2\psi d\psi = \frac{c\Omega}{4\pi} (-\cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_1) = 0. \end{aligned}$$

Коэффициент q' равен

$$\begin{aligned} q'(A, \Omega, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A \Omega \cos \psi \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{c\Omega}{\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi+\psi_1} \cos^2 \psi d\psi. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и учитывая значение ψ_1 , получим:

$$q'(A, \Omega, x^0) = \frac{c\Omega}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x^0}{A} + \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}} \right). \quad (5.145)$$

Нелинейная функция $F_1(x)p^2x$. В соответствии с (5.144) имеем:

$$p^2x = -A\Omega^2 \sin \psi$$

и, следовательно,

$$F_1(x)p^2x = -F_1(x^0 + A \sin \psi) A\Omega^2 \sin \psi.$$

Вычислим значения постоянной составляющей F^0 и коэффициентов q, q' . Для F^0 находим:

$$\begin{aligned} F^0(A, \Omega, x^0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A\Omega^2 \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{cA\Omega^2}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi+\psi_1} \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и учитывая значение ψ_1 , получим:

$$F^0(A, \Omega, x^0) = -\frac{cA\Omega^2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}}. \quad (5.146)$$

Для $q(A, \Omega, x^0)$ находим:

$$\begin{aligned} q(A, \Omega, x^0) &= -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A\Omega^2 \sin \psi \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{c\Omega^2}{\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi+\psi_1} \sin^2 \psi d\psi. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и учитывая значение ψ_1 , получим:

$$q(A, \Omega, x^0) = -\frac{c\Omega^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x^0}{A} - \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right). \quad (5.147)$$

Для $q'(A, \Omega, x^0)$ имеем:

$$\begin{aligned} q'(A, \Omega, x^0) &= -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A \Omega^2 \sin \psi \cos \psi d\psi = \\ &= -\frac{c\Omega^2}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi+\psi_1} \sin 2\psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Нелинейная функция $F_1(x)p^3x$. В соответствии с (5.144) имеем:

$$p^3x = -A\Omega^3 \cos \psi$$

и, следовательно,

$$F_1(x)p^3x = -F_1(x^0 + A \sin \psi) A \Omega^3 \cos \psi.$$

Вычислим значение F^0 , q и q' . Для F^0 находим:

$$\begin{aligned} F^0(A, \Omega, x^0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A \Omega^3 \cos \psi d\psi = \\ &= -\frac{cA\Omega^3}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi+\psi_1} \cos \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Для $q(A, \Omega, x^0)$ получаем:

$$\begin{aligned} q(A, \Omega, x^0) &= -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A \Omega^3 \cos \psi \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{c\Omega^3}{2\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi+\psi_1} \sin 2\psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Для коэффициента $q'(A, \Omega, x^0)$ имеем:

$$\begin{aligned} q'(A, \Omega, x^0) &= -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_1(x^0 + A \sin \psi) A \Omega^3 \cos \psi \cos \psi d\psi = \\ &= -\frac{c\Omega^3}{\pi} \int_{-\psi_1}^{\pi+\psi_1} \cos^2 \psi d\psi. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и учитывая значение ψ_1 , получим:

$$q'(A, \Omega, x^0) = -\frac{c\Omega^3}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x^0}{A} + \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right). \quad (5.148)$$

Нелинейная функция $F(x, px) = \frac{dF_2(x)}{dx} px$. В случае нелинейной функции $F_2(x)$ типа односторонней реакции упругого элемента

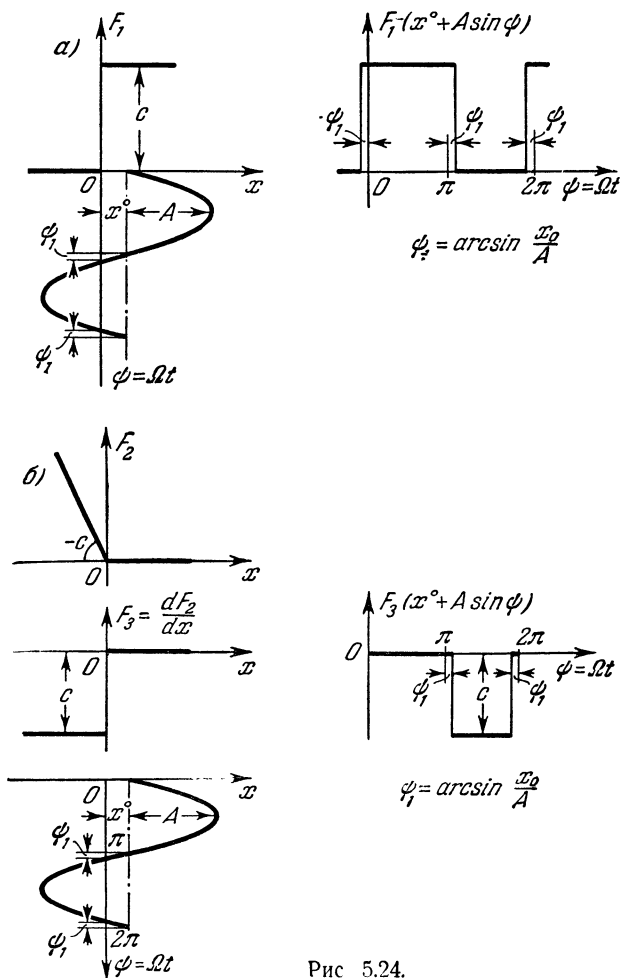


Рис 5.24.

$F_3(x) = \frac{dF_2(x)}{dx}$ изобразится в виде релейной несимметричной характеристики (рис. 5.24, б). В соответствии с (5.144) имеем:

$$px = A\Omega \cos \phi$$

и, следовательно,

$$F_3(x) px = F_3(x^0 + A \sin \phi) A\Omega \cos \phi.$$

Вычислим значения F^0 , q , q' . Для F^0 находим:

$$\begin{aligned} F^0(A, \Omega, x^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_3(x^0 + A \sin \psi) A \Omega \cos \psi d\psi = \\ &= -\frac{cA\Omega}{2\pi} \int_{\pi+\psi_1}^{2\pi-\psi_1} \cos \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Для коэффициента $q(A, \Omega, x^0)$ получаем:

$$\begin{aligned} q(A, \Omega, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_3(x^0 + A \sin \psi) A \Omega \cos \Omega \sin \psi d\psi = \\ &= -\frac{c\Omega}{2\pi} \int_{\pi+\psi_1}^{2\pi-\psi_1} \sin 2\psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Для коэффициента $q'(A, \Omega, x^0)$ имеем:

$$\begin{aligned} q'(A, \Omega, x^0) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F_3(x^0 + A \sin \psi) A \Omega \cos \psi \cos \psi d\psi = \\ &= -\frac{c\Omega}{\pi} \int_{\pi+\psi_1}^{2\pi-\psi_1} \cos^2 \psi d\psi. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и учитывая значение ψ_1 , получим:

$$q'(A, \Omega, x^0) = -\frac{c\Omega}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x^0}{A} - \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(x^0)^2}{A^2}} \right). \quad (5.149)$$

Г Л А В А VI

АВТОКОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЯХ И ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

§ 6.1. Исследование несимметричных автоколебаний

В главе IV рассматривалось исследование нелинейных автоматических систем при условии симметрии статических характеристик нелинейных звеньев и отсутствии внешнего воздействия на систему. В этом случае автоколебания, если они возникали в системе, были симметричными относительно равновесного состояния, т. е. отсутствовала постоянная составляющая во всех периодически изменяющихся переменных. Условие отсутствия постоянной составляющей

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) d\psi = 0$$

может нарушаться либо тогда, когда характеристика нелинейного звена несимметрична относительно начала координат, либо когда к системе приложено медленно меняющееся внешнее воздействие при любом виде нелинейных характеристик. Под медленным изменением внешнего воздействия здесь понимается изменение, практически неощутимое за один период автоколебаний системы. Вопрос же учета периодических внешних воздействий с частотами, близкими к частоте собственного движения системы, в данной главе не рассматривается. Он отнесен в специальную главу, посвященную вынужденным колебаниям в нелинейных системах.

Нарушение симметрии колебаний в системе при наличии несимметричных характеристик в нелинейных звеньях можно пояснить следующим образом. Допустим, что в системе (рис. 6.1, а) возникают автоколебания и при этом угловая координата некоторого элемента системы (вал B с рычагом P) совершает симметричные колебания с амплитудой A (рис. 6.1, в) относительно равновесного положения OO_1 . Равновесное положение будем называть в дальнейшем

центром колебаний. Введем теперь в ту же систему односторонний пружинящий упор (рис. 6.1, б). К валу будет прикладываться момент реакции упора, который можно учесть в виде статической несимметричной характеристики, изображенной на рис. 6.1, д. За счет односторонней реакции упора колебания вала деформируются и при этом центр колебаний займет новое положение OO_2 (рис. 6.1, б).

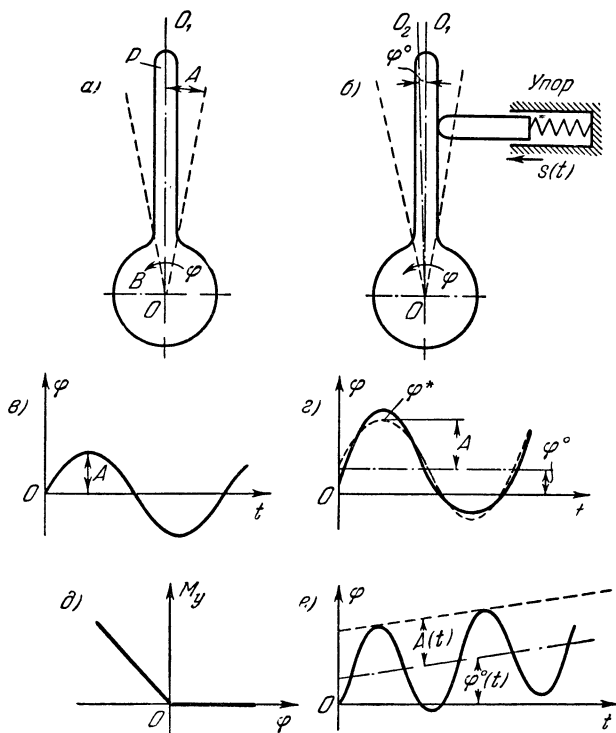


Рис. 6.1.

Относительно прежнего равновесного состояния колебания теперь приближенно можно рассматривать состоящими из постоянной составляющей φ^0 и периодической составляющей $\varphi^* = A \sin \Omega t$ (рис. 6.1, г). В данном случае значение момента реакции упора не зависит явно от времени, а определяется координатой φ .

Предположим, что в той же системе упор медленно перемещается вместе с основанием влево по некоторому закону $s(t)$. Тогда на вал будет действовать момент реакции упора, зависящий явно от времени. В этом случае его нельзя учесть в виде одной статической характеристики, а необходимо ввести в рассмотрение еще внешнее воздействие, приложенное к системе, медленно меняющееся во вре-

мени. Ясно, что и в этом случае будет происходить деформация колебаний. В отличие от случая простой несимметричной нелинейности теперь частота, амплитуда и смещение центра колебаний зависят не только от параметров системы, но и являются функциями времени (рис. 6.1, е).

Исследование автоколебаний при учете внешних воздействий представляет более полную задачу, так как учет несимметрии статических характеристик нелинейных звеньев, по сути дела, равноценен случаю приложения постоянного внешнего воздействия. Поэтому рассмотрим задачу исследования нелинейных автоматических систем при наличии внешних воздействий, зависящих от времени, и при любом виде статических характеристик нелинейных звеньев.

Допустим, что в любом месте системы вводится медленно изменяющееся внешнее воздействие (возмущающее или задающее) $f(t)$ (рис. 6.2), причем уравнение линейной части системы имеет вид

$$Q(p)x_1 = -R(p)x_2 + S(p)f(t). \quad (6.1)$$

Это очень часто имеет место в следящих автоколебательных системах (и программных системах регулирования), когда $f(t)$ обозначает задающее внешнее воздействие на входе системы, а также в интеграторах и других счетно-решающих устройствах, работающих в автоколебательном режиме, где $f(t)$ обозначает интегрируемую или другую входную функцию. Это же самое может иметь место и в обычных системах регулирования, где $f(t)$ обозначает внешнее возмущающее воздействие (изменение нагрузки и пр.).

В общем случае будем считать, что сама функция $f(t)$ и все ее производные, входящие в уравнение (6.1), изменяются настолько медленно, чтобы при определении автоколебаний их можно было бы все считать постоянными за время одного периода автоколебаний. Если сама функция $f(t)$ имеет колебательный характер, то частота ее изменения предполагается во много раз меньшей, чем частота автоколебаний данной системы. В частном случае внешнее воздействие $f(t)$ может быть постоянной величиной:

$$f(t) = \text{const}$$

или может меняться с постоянной скоростью:

$$f(t) = c_1 t + c_2.$$

Нелинейное звено системы может относиться к первому или второму классу, т. е. оно может описываться, например, любым из уравнений вида

$$\begin{aligned} x_2 &= F(x_1), & F(\dot{x}_2, x_2) &= c_1 x_1, & F_1(\ddot{x}_2, \dot{x}_1) + F_2(x_2) &= c_1 x_1, \\ x_2 &= F(x_1, \dot{x}_1), & x_2 &= F_1(x_1) + F_2(\dot{x}_1), \\ F_2(\dot{x}_2, x_2) &= F_1(x_1), & F_3(\dot{x}_2) + F_2(x_2) &= F_1(x_1), \\ F(\dot{x}_2, x_2, \dot{x}_1) &= 0, & F_2(x_2) + F_1(x_2, x_1) &= 0. \end{aligned}$$

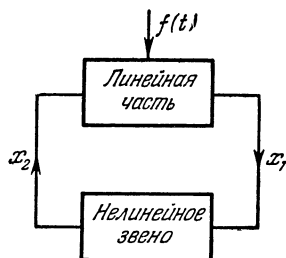


Рис. 6.2.

Тот же метод может быть распространен и на нелинейные системы третьего класса (с несколькими нелинейными звеньями, которые разделены линейными частями). При этом нелинейные звенья могут иметь как симметричные, так и несимметричные нелинейные характеристики.

Периодическое решение в гармоническом виде удобно искать для той переменной, которая стоит под знаком нелинейной функции. Когда и входная и выходная величины нелинейного звена находятся под знаком нелинейной функции (нелинейность второго класса), то, как и для симметричных характеристик, отыскивая выходную величину нелинейного звена в гармоническом виде, входную пересчитывают в значения выходной через передаточную функцию линейной части системы.

Пусть, например, нелинейная функция первого класса имеет вид

$$x_2 = F(x_1, px_1); \quad (6.2)$$

тогда с учетом уравнения линейной части (6.1), получим уравнение системы

$$Q(p)x_1 + R(p)F(x_1, px_1) = S(p)f(t). \quad (6.3)$$

В отличие от случая симметричных нелинейностей и отсутствия внешнего воздействия здесь решение для переменной x_1 (или x_2) будем искать в гармоническом виде с учетом постоянной составляющей:

$$x_1 = x_1^0 + A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t. \quad (6.4)$$

Формула гармонической линеаризации нелинейностей при учете постоянной составляющей и первой гармоники разложения в ряд Фурье нелинейной функции будет иметь вид

$$F(x_1^0 + A \sin \psi) = F^0(A, \Omega, x_1^0) + \left[q(A, \Omega, x_1^0) + \frac{q'(A, \Omega, x_1^0)}{\Omega} p \right] (x_1 - x_1^0), \quad (6.5)$$

где F^0 , q и q' — постоянная составляющая и коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые формулами (5.86) — (5.88). Аналогично производится гармоническая линеаризация и для нелинейностей других видов.

После замены нелинейной функции в уравнении (6.3) линейным соотношением (6.5) получим гармонически линеаризованное уравнение системы:

$$Q(p)x_1 + R(p) \left[F^0 + \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) (x_1 - x_1^0) \right] = S(p)f(t), \quad (6.6)$$

или, если периодическую составляющую обозначить через $x_1^* = x_1 - x_1^0$:

$$Q(p)(x_1^0 + x_1^*) + R(p) \left[F^0 + \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) x_1^* \right] = S(p)f(t). \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7), учитывая, что $S(p)f(t)$ — медленно изменяющаяся величина, можно представить в виде двух уравнений:

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) \right] x_1^* = 0, \quad (6.8)$$

$$Q(p)x_1^0 + R(p)F^0 = S(p)f(t). \quad (6.9)$$

Уравнение (6.8) описывает периодическое движение системы (если оно возможно) по координате x_1^* относительно меняющего свое положение центра колебаний x_1^0 . Уравнение (6.9) описывает движение центра колебаний относительно начала отсчета в зависимости от внешнего воздействия $f(t)$. Применяя подстановку $p = j\Omega$, из (6.8) получим два уравнения. В результате будем иметь три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(A, \Omega, x_1^0) &= 0, \\ Y(A, \Omega, x_1^0) &= 0, \\ Q(p)x_1^0 + R(p)F^0 &= S(p)f(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

с тремя неизвестными A , Ω и x_1^0 . Уравнения (6.10) позволяют найти эти величины по известным параметрам системы и заданному внешнему воздействию. В зависимости от значений параметров и внешнего воздействия здесь также определяются области периодического решения и области отсутствия этого решения. Устойчивость периодических решений определяется приведенными ранее методами.

Заметим, что уравнения вида (6.10) можно получить из уравнения (6.6), записанного для переменной x_1 , не прибегая к введению дополнительной переменной x_1^* . Первое и второе уравнения получаются из характеристического уравнения для (6.6) после подстановки $p = j\Omega$. Третье уравнение (6.10) соответствует частному решению $x_1 = x_1^0$ уравнения (6.6).

Величины A , Ω и x_1^0 определяются по уравнениям (6.10) в виде функций времени при заданном медленно меняющемся внешнем воздействии $f(t)$, как было описано в общем виде в главе V. Во многих же случаях достаточно бывает найти автоколебания системы при различных постоянных значениях f^0 внешнего воздействия. Тогда уравнения (6.10) примут вид

$$\left. \begin{aligned} X(A, \Omega, x_1^0) &= 0, \\ Y(A, \Omega, x_1^0) &= 0, \\ Q(0)x_1^0 + R(0)F^0 &= S(0)f^0, \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

где $Q(0)$, $R(0)$ и $S(0)$ — свободные члены соответствующих операторных многочленов. В этом случае искомые величины A , Ω и x_1^0 являются постоянными и решение значительно упрощается.

В случае отсутствия внешнего воздействия при несимметричных нелинейностях уравнения (6.11) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} X(A, \Omega, x_1^0) &= 0, \\ Y(A, \Omega, x_1^0) &= 0, \\ Q(0) x_1^0 + R(0) F^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

При наличии нелинейностей второго класса, например,

$$F_2(p x_2, x_2) = F_1(x_1), \quad (6.13)$$

гармоническая линеаризация выполняется при условии, что решение для x_2 и x_1 ищется в виде

$$x_2 = A_2 \sin \Omega t, \quad x_1 = A_1 \sin (\Omega t + \beta). \quad (6.14)$$

Тогда нелинейное уравнение (6.13) заменится следующим приближенным уравнением:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{q'_2(A_2, \Omega, x_2^0)}{\Omega} p + q_2(A_2, \Omega, x_2^0) \right] (x_2 - x_2^0) + F_2^0(A_2, \Omega, x_2^0) = \\ & = \left[q_1(A_1, \Omega, x_1^0) + \frac{q'_1(A_1, \Omega, x_1^0)}{\Omega} p \right] (x_1 - x_1^0) + F_1^0(A_1, \Omega, x_1^0). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Обозначая $x_2 - x_2^0 = x_2^*$ и $x_1 - x_1^0 = x_1^*$ и опуская обозначения переменных, от которых зависят коэффициенты гармонической линеаризации, можно (6.15) переписать в виде

$$\left(\frac{q'_2}{\Omega} p + q_2 \right) x_2^* + F_2^0 = \left(q_1 + \frac{q'_1}{\Omega} p \right) x_1^* + F_1^0. \quad (6.16)$$

Уравнение (6.1) линейной части системы после подстановки $x_1 = x_1^0 + x_1^*$ и $x_2 = x_2^0 + x_2^*$ запишется в виде

$$Q(p) x_1^* + Q(p) x_1^0 = -R(p) x_2^* - R(p) x_2^0 + S(p) f(t). \quad (6.17)$$

На основании (6.16) и (6.17) запишем уравнения для постоянных составляющих:

$$\left. \begin{aligned} F_2^0 &= F_1^0, \\ Q(p) x_1^0 + R(p) x_2^0 &= S(p) f(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

и уравнения для периодических составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{q'_2}{\Omega} p + q_2 \right) x_2^* &= \left(q_1 + \frac{q'_1}{\Omega} p \right) x_1^*, \\ Q(p) x_1^* &= -R(p) x_2^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Для двух последних уравнений можно написать характеристическое уравнение

$$Q(p) \left(\frac{q'_2}{\Omega} p + q_2 \right) + R(p) \left(q + \frac{q'_1}{\Omega} p \right) = 0. \quad (6.20)$$

Применяя подстановку $p = j\Omega$, из (6.20) получим два уравнения, к которым присоединяются уравнения (6.18). В результате получим четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(A_1, A_2, \Omega, x_1^0, x_2^0) &= 0, \\ Y(A_1, A_2, \Omega, x_1^0, x_2^0) &= 0, \\ F_2^0(A_2, \Omega, x_2^0) &= F_1^0(A_1, \Omega, x_1^0), \\ Q(p) x_1^0 + R(p) x_2^0 &= S(p) f(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

с пятью неизвестными $A_1, A_2, \Omega, x_1^0, x_2^0$. Значения A_1 и A_2 связаны соотношением

$$\frac{A_1}{A_2} = \left| W_n(j\omega) \right|_{\omega=\Omega}, \text{ где } W_n(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)}.$$

Таким образом, уравнения (6.21) с привлечением амплитудно-частотных соотношений линейной части позволяют определить все пять неизвестных A_2, A_1, Ω, x_1^0 и x_2^0 в зависимости от значений параметров системы и от внешнего воздействия.

Для линейных систем третьего класса задача решается аналогично. В этом случае в дополнение к уравнениям привлекаются амплитудные и фазовые соотношения для линейных частей, разделяющих нелинейности, входящие в систему.

§ 6.2. Ошибки автоколебательных систем

Установившаяся ошибка системы, работающей в автоколебательном режиме, складывается нелинейным образом (см. главу V) из ошибки смещения центра колебаний и ошибки периодического изменения рассматриваемой переменной относительно центра колебаний:

$$x_{\text{уст}} = x^0 + x^*.$$

Для случая наличия симметричных нелинейностей и при отсутствии внешнего воздействия остается установившаяся ошибка, определяемая периодической составляющей (автоколебаниями):

$$x_{\text{уст}} = x^*.$$

Уменьшение установившейся ошибки в этом случае решается подбором параметров системы из условия получения наименьшей амплитуды и наибольшей частоты автоколебаний. При рациональном выборе параметров можно x^* сделать практически ничтожно малой, не

оказывающей влияния на работу системы. Так, например, автоколебания постоянного напряжения в самолетной сети относительно установившегося значения с частотой $50 \div 100$ гц, обусловленные работой вибрационного регулятора, практически не влияют на работу потребителей постоянного тока.

Ошибка смещения центра колебаний является аналогом статической или установившейся ошибки линейных систем. Будем ее называть в дальнейшем *статической ошибкой автоколебательной системы*. Такая ошибка в системах регулирования практически всегда является нежелательной¹⁾. Так, в системе регулирования напряжения с вибрационным регулятором в зависимости от величины нагрузки она обуславливает изменение напряжения в пределах $2 \div 3$ в. Уничтожение статической ошибки в автоколебательных системах связано с необходимостью не только рационального выбора параметров, но часто с изменением структуры системы или применением специальных средств компенсации.

Будем называть автоколебательную систему *астатической*, если по принципу работы в ней с достаточной для практики точностью для регулируемой или отрабатываемой величины при постоянном внешнем воздействии $f(t) = \text{const} = f^0$ обеспечивается условие

$$x^0 = 0,$$

и *статической*, если

$$x^0 \neq 0.$$

Перемещение центра автоколебаний в нелинейной системе аналогично поведению равновесного состояния линейной системы. Обычно разница состоит лишь в наличии соответствующих нелинейных зависимостей и в том, что относительно равновесного состояния совершаются автоколебания. Поэтому для получения астатических автоколебательных систем можно применить приемы, аналогичные приемам для получения астатических линейных систем, хотя возможны и другие методы.

Уничтожение статической ошибки особенно важно для автоматических измерительных и счетно-решающих систем, работающих по компенсационному принципу, равновесное состояние которых характеризуется нулевыми значениями всех переменных. В этом случае статическая ошибка будет приводить к неустойчивости нуля системы, а это крайне нежелательно для счетно-решающих и других точных устройств.

Обратимся к той же системе, состоящей из линейной части и нелинейного звена (рис. 6.2). Рассмотрим случай наличия в системе несимметричной нелинейности при отсутствии внешнего воздействия. Будем считать, что переменная x_1 является регулируемой величиной.

¹⁾ Вообще же в следящих системах и системах автоматического управления величина x^0 включает в себя также полезный управляющий сигнал.

Из третьего уравнения (6.12) следует, что статическая ошибка системы будет определяться соотношением

$$x_1^0 = -\frac{R(0)}{Q(0)} F^0. \quad (6.22)$$

Соотношение (6.22) означает, что несимметричная нелинейность при колебательном режиме приводит к выделению постоянной составляющей F^0 выходной величины нелинейного звена, которая равносильна «ложному» сигналу. Это вызывает статическую ошибку регулируемой величины, обратную по знаку постоянной составляющей. Величина этой ошибки пропорциональна величине постоянной составляющей с коэффициентом пропорциональности, определяемым передаточными числами линейных звеньев.

Для того чтобы статическая ошибка равнялась нулю, необходимо выполнение одного из двух условий

$$F^0 = 0 \quad \text{или} \quad R(0) = 0.$$

Условие $F^0 = 0$ означает (при отсутствии воздействия)

приведение характеристики нелинейного звена к симметричной или линейной. Это иногда можно выполнить несложными конструктивными приемами. Пусть, например, контактное устройство (рис. 6.3, а) в некоторой нелинейной системе обеспечивает управление по идеальной релейной характеристике. Вследствие соприкосновения контакта с пружиной на элемент, несущий подвижный контакт, будет воздействовать момент реакции M_p , являющийся нелинейной функцией от перемещения φ (рис. 6.3, б). Данная нелинейность несимметрична и, следовательно, при автоколебательном режиме работы вызовет статическую ошибку. Если с другой стороны подвижного контакта установить «ложный» контакт с жесткостью пружины, равной жесткости рабочего контакта, то момент реакции ложного контакта $M_{л.к}$ (рис. 6.3, б) в совокупности с моментом рабочего контакта даст линейную характеристику. Система не будет иметь статической ошибки.

Условие $R(0) = 0$ означает, что операторный многочлен линейной части системы не должен иметь свободного члена, т. е. чтобы в нем оператор p выносился за скобки. Линейная часть в этом случае должна описываться уравнением вида

$$Q(p) x_1 = -p R_1(p) x_2,$$

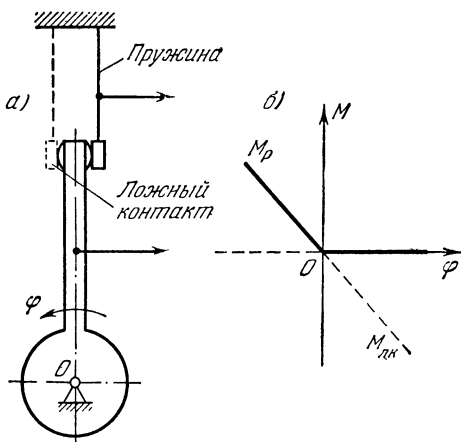


Рис. 6.3.

или

$$Q(p) \frac{1}{p} x_1 = -R_1(p) x_2. \quad (6.23)$$

Из (6.23) следует, что ликвидацию статической ошибки автоколебательной системы, происходящей от несимметрии нелинейности, можно осуществить введением интеграла в закон регулирования от отклонения регулируемой величины (т. е. тем средством, которое в линейных системах применяется для получения астатичности системы по отношению к внешнему воздействию).

Обратимся к более общему случаю, когда на автоколебательную систему воздействует постоянное внешнее воздействие при любом виде статической характеристики нелинейного звена. Из третьего уравнения (6.11) имеем:

$$x_1^0 = -\frac{R(0)}{Q(0)} F^0 + \frac{S(0)}{Q(0)} f^0. \quad (6.24)$$

В этом случае статическая ошибка системы складывается из ошибки, обусловленной несимметрией нелинейных характеристик, и ошибки, вызванной внешним воздействием.

При определенном сочетании несим-

метрии статической характеристики и внешнего воздействия возможна взаимокompенсация этих ошибок

$$\frac{R(0)}{Q(0)} F^0 = \frac{S(0)}{Q(0)} f^0$$

и тогда $x_1^0 = 0$.

Такая взаимокompенсация возможна только для одного режима, так как F^0 зависит от амплитуды и частоты автоколебаний.

Вторым возможным условием получения астатической автоколебательной системы будет

$$R(0) = 0 \quad \text{и} \quad S(0) = 0,$$

т. е. в этом случае операторный многочлен при входной величине линейной части и операторный многочлен при внешнем воздействии не должны иметь свободных членов.

Выполнение второго условия также связано с введением интеграла от отклонения регулируемой величины в закон регулирования. Покажем это на примере. Пусть нелинейная система состоит из линейного регулируемого объекта и регулятора, имеющего линейную часть и нелинейное звено (рис. 6.4). Соответствующие дифференциальные уравнения запишем в общем виде:

для регулируемого объекта

$$Q_1(p) x_1 = -R_1(p) \xi + S_1(p) f^0, \quad (6.25)$$

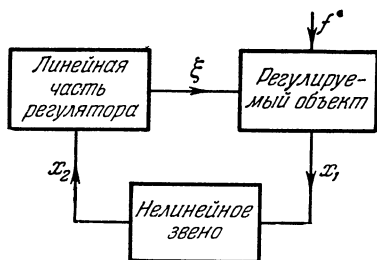


Рис. 6.4.

для линейной части регулятора

$$Q_2(p)\xi = R_2(p)x_2 \quad (6.26)$$

и для нелинейного звена с введением интеграла от входной величины¹⁾

$$x_2 = F(x_1) + \frac{k}{p} x_1. \quad (6.27)$$

Объединяя (6.26) и (6.27), получим уравнение регулятора

$$Q_2(p)\xi = R_2(p)F(x_1) + \frac{kR_2(p)}{p} x_1. \quad (6.28)$$

Закон регулирования в соответствии с (6.28) будет

$$\xi = R_2(p)F(x_1) + \frac{kR_2(p)}{p} x_1.$$

Объединяя уравнение регулятора (6.28) и уравнение объекта (6.25) и полагая, что нелинейная функция гармонически линеаризуется по формуле

$$F(x_1) = F^0 + \left(q + \frac{q'}{\Omega} p\right)(x_1 - x_1^0),$$

получим уравнение системы

$$\begin{aligned} [pQ(p) + kR(p)]x_1 + \left(q + \frac{q'}{\Omega} p\right)R(p)p(x_1 - x_1^0) = \\ = -pR(p)F^0 + pS(p)f^0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где

$$Q(p) = Q_1(p)Q_2(p), \quad S(p) = S_1(p)Q_2(p), \quad R(p) = R_1(p)R_2(p).$$

Из (6.29) при $x_1 = x_1^0$ получим уравнение для медленно меняющихся составляющих

$$[pQ(p) + kR(p)]x_1^0 = -pR(p)F^0 + pS(p)f^0.$$

Следовательно, при постоянных значениях F^0 и f^0 при $R(0) \neq 0$ статическая ошибка системы будет равна нулю:

$$x_1^0 = \frac{0}{kR(0)} = 0.$$

В случае же изменения внешнего воздействия по времени появится установившаяся ошибка как за счет изменения самой величины $f(t)$, так и за счет изменения режима автоколебаний, а значит и изменения $F^0(t)$.

¹⁾ Если же ввести интеграл обычным способом в линейную часть, т. е. $pQ_2(p)\xi = R_2(p)x_2$, то будет достигнута астатичность по внешнему воздействию, но сохранится статическая ошибка, происходящая от несимметрии нелинейности.

Аналогично можно получать и астатические автоколебательные системы с высоким порядком астатизма для обеспечения нулевой статической ошибки при переменном внешнем воздействии.

Следует иметь в виду, что введение дополнительных интегрирующих устройств в систему вызывает ухудшение переходного процесса и установившегося режима автоколебаний. Если за область автоколебаний лежит область неустойчивости, то введение интегрирующих устройств может привести к неустойчивости системы. Для избежания этого могут оказаться очень полезными известные приемы введения дополнительных цепей регулирования по возмущению вместо введения интеграла.

§ 6.3. Гиромаятник при внешнем воздействии

В § 4.2 было проведено исследование автоколебаний гиромаятника, обусловленных системой стабилизации гироскопа, при отсутствии внешнего воздействия. В результате проведенного исследования были получены рекомендации по выбору параметров гиромаятника из условия получения наименьшей амплитуды и наибольшей частоты автоколебаний. Проведем теперь исследование автоколебаний гиромаятника с учетом внешнего воздействия постоянной величины μ_0 [185].

При учете внешнего воздействия уравнение движения гироскопа относительно оси внутренней рамки в соответствии с (4.3) запишется в виде

$$[A_0 B_0 p^3 + (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) p^2 + H^2 p] \beta = -HF(\beta) + n_\alpha \mu_0. \quad (6.30)$$

Из-за наличия внешнего воздействия μ_0 центр колебаний гироскопа по углу β будет смещаться на величину β_0 . Гармоническая линеаризация для идеальной релейной статической характеристики $F(\beta)$ будет теперь выполняться по формуле

$$F(\beta) = F^0(A, \beta_0) + q(A, \beta_0)(\beta - \beta_0), \quad (6.31)$$

где в соответствии с (5.101) и (5.102)

$$F^0 = \frac{2m_0}{\pi} \arcsin \frac{\beta_0}{A},$$

$$q = \frac{4m_0}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{A^2}}.$$

С учетом (6.31) уравнение (6.30) перепишется в виде

$$[A_0 B_0 p^3 + (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) p^2 + H^2 p + Hq] \beta = -HF^0 + Hq\beta_0 + n_\alpha \mu_0. \quad (6.32)$$

Выполняя замену p на $j\Omega$ в характеристическом уравнении

$$A_0 B_0 p^3 + (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) p^2 + H^2 p + Hq = 0,$$

из условия $X(A, \Omega, \beta_0) = 0$ и $Y(A, \Omega, \beta_0) = 0$ получим два уравнения. Третье уравнение запишем как частное решение дифференциального уравнения (6.32) при $\beta = \beta_0$. Указанные три уравнения для определения амплитуды и частоты автоколебаний будут:

$$\left. \begin{aligned} Hq - (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) \Omega^2 &= 0, \\ H^2 - A_0 B_0 \Omega^2 &= 0, \\ HF^0 &= n_\alpha \mu_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Проанализируем эти уравнения. Из второго уравнения (6.33) видно, что частота автоколебаний гиromаятника не зависит от внешнего воздействия и остается той же, что и в случае $\mu_0 = 0$, т. е.

$$\Omega = \frac{H}{\sqrt{A_0 B_0}}.$$

Первое и третье уравнения позволяют найти зависимости изменения амплитуды A и смещения центра колебаний β_0 от параметров системы и внешнего воздействия μ_0 . Влияние параметров системы на амплитуду автоколебаний при отсутствии внешнего воздействия было определено ранее.

Подставив значения коэффициентов гармонической линеаризации в (6.33), запишем два уравнения для определения зависимостей $A = A(\mu_0)$ и $\beta_0 = \beta_0(\mu_0)$:

$$\left. \begin{aligned} (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) \Omega^2 &= \frac{4Hm_0}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{A^2}}, \\ \frac{2Hm_0}{\pi} \arcsin \frac{\beta_0}{A} &= n_\alpha \mu_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Определим из второго уравнения допустимый максимальный измеряемый момент, приложенный к гиromаятнику, из условия срыва автоколебаний. Автоколебания гиromаятника будут срываться при некотором значении $\mu_0 = \mu_{\max}$, когда смещение центра колебаний станет равным значению амплитуды, т. е. $\beta_0 = A$. Тогда из второго уравнения (6.34) получим формулу для определения предельно допустимого момента, приложенного к гиromаятнику:

$$\mu_{\max} = \frac{Hm_0}{n_\alpha}. \quad (6.35)$$

При $\mu_0 > \mu_{\max}$ автоколебания в системе невозможны и, следовательно, нарушается принцип работы гиromаятника.

Из первого уравнения (6.34) с учетом значения Ω видно, что амплитуда автоколебаний будет иметь максимальное значение при $\beta_0 = 0$, когда $\mu_0 = 0$:

$$A_{\max} = \frac{4m_0 A_0 B_0}{\pi (A_0 n_\beta + B_0 n_\alpha) H}. \quad (6.36)$$

Значение амплитуды при любом значении $0 \leq \mu_0 \leq \mu_{\max}$ определится из первого уравнения (6.34) по формуле

$$A = A_{\max} \cos \arcsin \frac{\beta_0}{A}, \quad (6.37)$$

так как

$$\sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{A^2}} = \cos \arcsin \frac{\beta_0}{A}.$$

Подставляя из второго уравнения (6.34) в уравнение (6.37) значение

$$\arcsin \frac{\beta_0}{A} = \frac{\pi n_a \mu_0}{2 H m_0},$$

получим формулу для определения амплитуды автоколебаний гиromаятника в зависимости от внешнего момента:

$$A = A_{\max} \cos \frac{\pi n_a \mu_0}{2 H m_0} \quad \text{при} \quad 0 \leq \mu_0 \leq \mu_{\max}. \quad (6.38)$$

Как видно, амплитуда автоколебаний изменяется в зависимости от приложенного внешнего момента по закону косинуса.

Для определения $\beta_0 = \beta_0(\mu_0)$ запишем выражение для β_0 из второго уравнения (6.34):

$$\beta_0 = A \sin \frac{\pi n_a \mu_0}{2 H m_0}. \quad (6.39)$$

Подставляя значение A из (6.38) в (6.39) и выполняя преобразования, получим формулу для определения смещения центра колебаний в зависимости от приложенного внешнего момента:

$$\beta_0 = \frac{A_{\max}}{2} \sin \frac{\pi n_a \mu_0}{H m_0} \quad \text{при} \quad 0 \leq \mu_0 \leq \mu_{\max}. \quad (6.40)$$

Как видно из (6.40), смещение центра колебаний изменяется по закону синуса от внешнего момента μ_0 , но с периодом, в два раза меньшим периода изменения амплитуды автоколебаний. Максимальное значение смещения центра колебаний будет

$$\beta_{\max} = \frac{A_{\max}}{2} \quad \text{при} \quad \mu_0 = \frac{\mu_{\max}}{2}.$$

Графически зависимости (6.38) и (6.39) представлены на рис. 6.5 для случая ранее принятых значений параметров гиromаятника:

$$\begin{aligned} H &= 400 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}, & A_0 &= 2 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2, & B_0 &= 2 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2, \\ n_a &= 2 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}, & n_\beta &= 1 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}, & m_0 &= 30 \text{ г} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

Предельно допустимый измеряемый момент при выбранных значениях параметров

$$\mu_{\max} = 6000 \text{ г} \cdot \text{см}.$$

Наличие смещения центра колебаний будет вызывать ошибку в измерении момента μ_0 даже в том случае, если гиromаятник установить на стабилизированном в горизонте основании, так как на маятник будет действовать составляющая от силы земного тяготения.

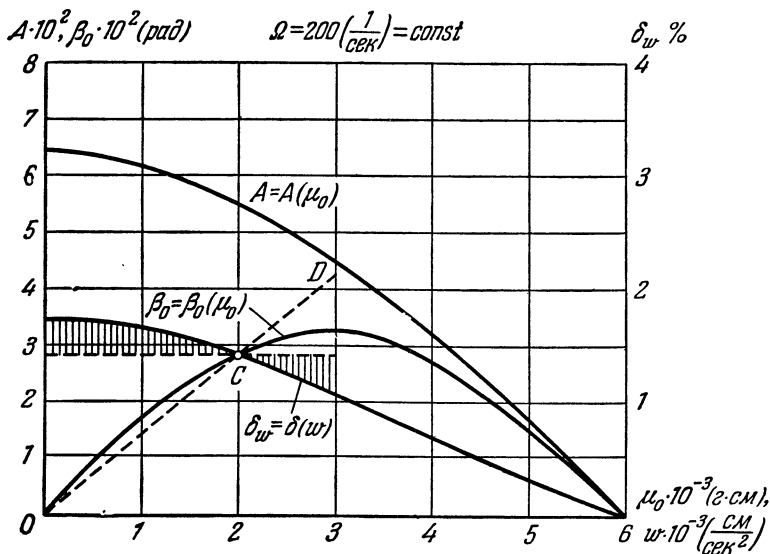


Рис. 6.5.

Для малых углов смещения центра колебаний при условии

$$\beta_0 = \sin \beta_0$$

абсолютная ошибка гиromаятника в измерении момента будет

$$\Delta \mu = mgl\beta_0, \quad (6.41)$$

где m — масса гироскопа вместе с внутренней рамкой, l — плечо гиromаятника, g — ускорение от сил земного тяготения.

Относительная погрешность гиromаятника будет

$$\delta_\mu = \frac{\Delta \mu}{\mu_0}. \quad (6.42)$$

Если гиromаятник использовать для измерения горизонтальных инерционных ускорений, то внешний момент, прикладываемый к гиromаятнику, будет пропорционален инерционному ускорению:

$$\mu_0 = ml\omega, \quad (6.43)$$

где ω — инерционное ускорение.

С учетом (6.40), (6.41) и (6.43) из (6.42) получим формулу для определения относительной погрешности гиromаятника в измерении инерционных ускорений

$$\delta_w = \frac{gA_{\max}}{2w} \sin \frac{\pi n_a m l w}{H m_0}. \quad (6.44)$$

Максимальное значение относительной погрешности будет иметь место при $w=0$ ($\mu_0=0$). Это значение определится как предел величины δ_w при стремлении w к нулю с учетом значения A_{\max} (6.36):

$$\delta_{w \max} = \lim_{w \rightarrow 0} \delta_w = \frac{2n_a m l g A_0 B_0}{(A_0 n_p + B_0 n_a) H^2}. \quad (6.45)$$

Из (6.45) следует, что для уменьшения относительной погрешности гиromаятника желательно уменьшать трение в оси подвеса внешней рамки, массу гироскопа с внутренней рамкой и плечо разбаланса и увеличивать кинетический момент гироскопа. Наиболее целесообразно увеличивать кинетический момент гироскопа, не увеличивая его массы, так как H входит в знаменатель формулы (6.45) в квадрате.

На рис. 6.5 приведен график относительной погрешности гиromаятника, подсчитанной по формуле (6.44) при ранее принятых значениях параметров и величине $ml=1 \text{ г} \cdot \text{сек}^2$. Максимальная относительная погрешность в соответствии с формулой (6.45) составляет $\delta_{w \max} \approx 1,7\%$.

Из графиков $A(\mu_0)$ и $\beta_0(\mu_0)$ видно, что при больших значениях μ_0 величины амплитуды A и смещения центра колебаний β_0 близки друг к другу. Вследствие этого нельзя гарантировать надежную работу прибора при больших μ_0 , так как возможен срыв автоколебаний от случайных воздействий на гиromаятник. Можно рекомендовать допустимое значение измеряемого момента

$$\mu_{0 \text{ доп}} \approx \frac{\mu_{0 \max}}{2}. \quad (6.46)$$

При этом выбором точки тарирования прибора может быть уменьшена относительная погрешность гиromаятника. Если при условии (6.46) тарирование гиromаятника выполнить при $\mu_{0 \text{ тар}} = \frac{1}{3} \mu_{0 \max}$ (для нашего случая $\mu_{0 \text{ тар}} = 200 \text{ г} \cdot \text{см}$), то при $\mu_0 = \mu_{0 \text{ тар}}$ абсолютная и относительная погрешности будут равны нулю. Для других значений измеряемого момента относительная погрешность будет определяться разностью кривой $\delta_w = \delta_w(w)$ и горизонтальной прямой, проведенной через точку C (заштрихованные ординаты). При этом относительная погрешность уменьшается примерно в пять раз. В нашем случае максимальная относительная погрешность составляет $0,34\%$.

Следует иметь в виду, что приведенный расчет выполнен не для оптимального значения параметров гиromаятника. Практически можно получить автоколебания гиromаятника с амплитудой в единицы угло-

вых минут. При максимальной амплитуде колебаний гироскопа $A_{\max} = 6'$ относительная погрешность с учетом выбора выгодной точки тарирования не превосходит в данном случае $0,01\%$.

Если выбором параметров не удается уменьшить погрешность, обусловленную смещением центра колебаний, то ее можно компенсировать, так как известен закон ее изменения в зависимости от измеряемой величины.

Наибольшую неприятность в приборах подобного типа представляет погрешность, обусловленная нестабильностью нуля. При работе контактов, управляющих стабилизирующим двигателем, вследствие их эрозии и окисления нельзя получить стабильной релейной характеристики. Характеристика будет смещаться с течением времени вправо или влево от своего начального положения (рис. 6.6). Смещение характеристики является незаконномерным и, следовательно, будет появляться незаконмерный «дрейф нуля» гиromаятника. Погрешность гиromаятника, обусловленную смещением характеристики, нельзя уменьшить тарированием или скомпенсировать. Для того чтобы уменьшить погрешность «дрейфа нуля», необходимо применить высоко стабильные контакты либо перейти на бесконтактное коммутационное устройство со стабильной идеальной релейной характеристикой.

Следует иметь в виду, что к указанным погрешностям будут добавляться погрешности неточности стабилизации основания, на которое устанавливается гиromаятник, и погрешность за счет неточности стабилизации собственной скорости вращения гироскопа.

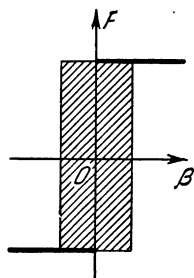


Рис. 6.6.

§ 6.4. Вибрационный измеритель ускорений

Принцип работы измерителя ускорений. Вибрационный измеритель ускорений схематически представлен на рис. 6.7. Магнитная система измерителя состоит из постоянного цилиндрического магнита 1 с магнитопроводами 2 и 3. В цилиндрическом воздушном зазоре находится чувствительная катушка 5, подвешенная на рычаге 4. Ось катушки опирается на подшипники 6, так что катушка имеет возможность совершать колебания в плоскости чертежа. На рычаге 4 укреплен контакт 7 с пружиной 9, изолированный от корпуса прибора. Подвижный контакт 7 работает в паре с неподвижным контактом 8. Обмотка чувствительной катушки питается от источника постоянного тока 11 через электронный коммутатор 10. Электронный коммутатор управляется контактной парой 7, 8. В зависимости от замкнутого или разомкнутого состояния контактов электронный коммутатор подает напряжение на катушку различной полярности. Прибор регулируется так, что соприкосновение контактов 7 и 8 соответствует равновесному положению катушки. Малейшее отклонение катушки

в ту или другую сторону приводит к появлению на катушке напряжения соответствующей полярности. Протекающий по катушке ток, взаимодействуя с полем магнита, создает электромагнитный момент, приложенный к катушке. Катушка подключается так, что электромагнитный момент, вызванный замыканием контактов, приводит ее в движение в сторону размыкания контактов. Таким образом, из принципа работы измерителя видно, что катушка будет совершать колебания относительно равновесного состояния.

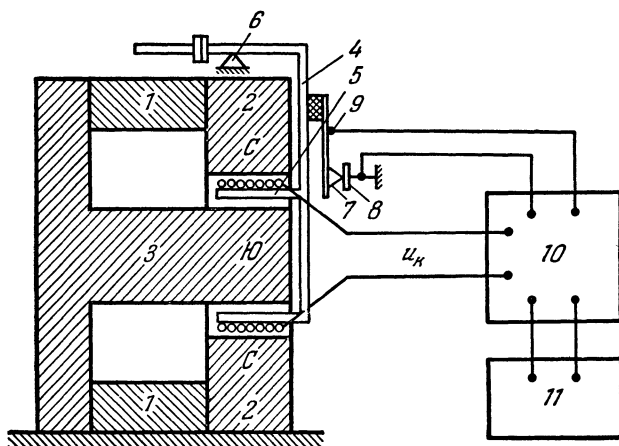


Рис. 6.7.

Для измерения ускорений в определенном направлении прибор обычно устанавливается на стабилизированной в горизонтальной плоскости платформе. Если платформу с прибором поместить на подвижный объект, то при движении объекта с ускорением на катушку будут воздействовать силы инерции в направлении оси симметрии катушки. Приложенное к автоколебательной системе внешнее воздействие деформирует колебания и изменяет значение постоянной составляющей периодически меняющегося тока катушки. Так как катушка совершает колебательное движение относительно некоторого равновесного состояния, то за период колебаний момент от силы инерции компенсируется создаваемым постоянной составляющей тока.

Момент, создаваемый постоянной составляющей тока в катушке при равномерном магнитном поле, будет

$$M_z = c B_z W_k i_k^0, \quad (6.47)$$

где B_z — индукция в воздушном зазоре, W_k — число витков катушки, i_k^0 — постоянная составляющая тока, протекающего по катушке, c — коэффициент пропорциональности, включающий конструктивные величины измерителя.

Момент от силы инерции будет

$$M_{\text{и}} = ml\omega(t), \quad (6.48)$$

где m — масса катушки, l — плечо приложения силы инерции, $\omega(t)$ — ускорение подвижного объекта в направлении оси симметрии катушки.

При точной взаимной компенсации указанных моментов можно приравнять (6.47) и (6.48); в результате получим:

$$i_{\text{к}}^0 = k\omega(t), \quad (6.49)$$

где

$$k = \frac{ml}{cB_{\delta}W_{\text{к}}}.$$

Следовательно, измерение ускорений возможно за счет измерения постоянной составляющей тока катушки.

За счет приложения внешнего воздействия и наличия несимметричной нелинейности в виде односторонней реакции неподвижного контакта на подвижный контакт центр колебаний будет смещаться. Это вызовет погрешность в соотношении (6.49) вследствие появления дополнительных моментов от проекции силы тяжести и реакции пружины.

Смещение центра колебаний при автоколебательном режиме работы не может превзойти значения амплитуды колебаний чувствительной катушки (в противном случае контакты не будут касаться друг друга и колебания сорвутся). Следовательно, для обеспечения малой погрешности измерения ускорений необходимо добиваться малых амплитуд автоколебаний катушки. При этом для повышения допустимых скоростей изменения измеряемых ускорений желательно повысить частоту автоколебаний.

Проведем исследование по выбору оптимальных значений параметров прибора из условия получения малой амплитуды и большой частоты автоколебаний, а также проанализируем возможные погрешности прибора.

Исследование устойчивости получаемого периодического решения проводить не будем, так как в этом случае из самого принципа работы прибора очевиден автоколебательный установившийся режим.

Дифференциальное уравнение движения чувствительной катушки. Предположим, что прибор переносится в пространстве в плоскости горизонта вправо и влево с линейным ускорением $\omega(t)$. Угловое положение катушки в движении относительно оси подвеса обозначим через φ , причем за положительное значение угла будем принимать отклонение катушки от равновесного состояния в сторону замыкания контактов.

Будем полагать, что катушка совершает движение в пределах малых углов. Силами сухого трения в оси подвеса катушки будем пренебрегать. Это оправдывается тем, что сухое трение при колебаниях катушки значительно уменьшается. Тогда с учетом указанных

допущений уравнение моментов при движении катушки запишется в виде

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k_{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + k_g \varphi + F_2(\varphi) = -k_3 i_k + k_w \omega(t), \quad (6.50)$$

где J [г·см·сек²] — момент инерции катушки относительно оси подвеса; k_{φ} [г·см·сек] — коэффициент демпфирования; k_g [г·см] — коэффициент пропорциональности между углом отклонения катушки и моментом, создаваемым составляющей силы тяжести; $k_3 \left[\frac{\text{г·см}}{a} \right]$ — коэффициент пропорциональности между током катушки и электромагнитным моментом; k_w [г·сек²] — коэффициент пропорциональности между инерционным ускорением и моментом, приложенным к катушке за счет сил инерции; i_k [а] — ток, протекающий по катушке; $F_2(\varphi)$ [г·см] — нелинейно изменяющийся момент от сил реакции неподвижного контакта на подвижный.

Уравнение равновесия напряжений, действующих в замкнутом контуре, включающем катушку, будет

$$L_k \frac{di_k}{dt} + R_k i_k + k_e \dot{\varphi} = -F_1(\varphi), \quad (6.51)$$

где L_k [гн] — индуктивность цепи катушки, R_k [ом] — активное сопротивление цепи катушки, k_e [в·сек] — коэффициент пропорциональности между скоростью перемещения катушки и наводимой в ней э. д. с. индукции, $F_1(\varphi)$ [в] — нелинейно изменяющееся напряжение, приложенное к катушке от электронного коммутатора.

Вводя новые обозначения, уравнение (6.50) перепишем в виде

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \varphi = \frac{k_3}{k_g} i_k - \frac{F_2(\varphi) - k_w \omega(t)}{k_g}, \quad (6.52)$$

где

$$T_2^2 = \frac{J}{k_g} [\text{сек}^2]; \quad T_1 = \frac{k_{\varphi}}{k_g} [\text{сек}]$$

и уравнение (6.51) — в виде

$$(T_k p + 1) i_k = - \frac{F_1(\varphi) + k_e p \varphi}{R_k}, \quad (6.53)$$

где $T_k = \frac{L_k}{R_k} [\text{сек}]$ — электрическая постоянная цепи катушки.

Объединяя (6.52) и (6.53), получим уравнение движения катушки для угла отклонения ее от начального положения:

$$\begin{aligned} [T_2^2 T_k p^3 + (T_2^2 + T_1 T_k) p^2 + (T_1 + T_k + T_e) p + 1] \varphi = \\ = k_1 F_1(\varphi) - (T_k p + 1) [k_2 F_2(\varphi) - k_3 \omega(t)], \end{aligned} \quad (6.54)$$

где

$$\begin{aligned} T_e = \frac{k_3 k_e}{k_g R_k} [\text{сек}], \quad k_1 = \frac{k_3}{R_k k_g} \left[\frac{1}{\text{в}} \right], \\ k_2 = \frac{1}{k_g} \left[\frac{1}{\text{г·см}} \right], \quad k_3 = \frac{k_w}{k_g} \left[\frac{\text{сек}^2}{\text{см}} \right]. \end{aligned}$$

Нелинейно изменяющееся напряжение, прикладываемое к чувствительной катушке от коммутатора, будем учитывать в виде статической характеристики, приведенной на рис. 6.8, а, а нелинейно изменяющийся момент от сил реакции неподвижного контакта на подвижный — в виде статической характеристики, показанной на рис. 6.8, б. На этих рисунках обозначено: U — постоянное значение напряжения, подаваемого от коммутатора, c_1 — жесткость пружины подвижного контакта по углу поворота катушки.

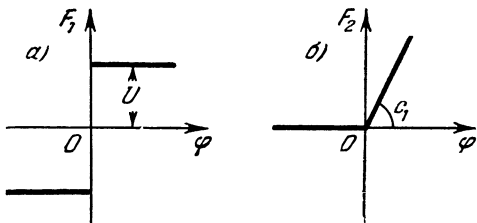


Рис. 6.8.

Так как в системе имеется несимметричная нелинейность и характеристики $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ однозначны, то гармоническая линеаризация нелинейных статических характеристик будет выполняться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} F_1(\varphi) &= F_1^0(A, \varphi_0) + q_1(A, \varphi_0)(\varphi - \varphi_0), \\ F_2(\varphi) &= F_2^0(A, \varphi_0) + q_2(A, \varphi_0)(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

где в соответствии с формулами (5.101), (5.102), (5.141), (5.142) постоянные составляющие и коэффициенты гармонической линеаризации будут иметь значения:

$$\left. \begin{aligned} F_1^0(A, \varphi_0) &= \frac{2U}{\pi} \arcsin \frac{\varphi_0}{A}, \\ q_1(A, \varphi_0) &= \frac{4U}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}}, \\ F_2^0(A, \varphi_0) &= \frac{cA}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} + \frac{c\varphi_0}{2\pi} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{\varphi_0}{A} \right), \\ q_2(A, \varphi_0) &= \frac{c}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\varphi_0}{A} + \frac{\varphi_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

где A , φ_0 — соответственно амплитуда колебаний и смещение центра колебаний чувствительной катушки.

Подставляя выражения для $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ из (6.55) в (6.54), получим гармонически линеаризованное дифференциальное уравнение движения чувствительной катушки:

$$\begin{aligned} [T_2^* T_K p^3 + (T_2^* + T_1 T_K) p^2 + (T_1 + T_K + T_c + k_2 T_K q_2) p + \\ + k_1 q_1 + k_2 q_2 + 1] \varphi = -k_1 (F_1^0 - q_1 \varphi_0) - k_2 (T_K p + 1) (F_2^0 - q_2 \varphi_0) + \\ + k_2 (T_K p + 1) \omega(t). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Уравнения для определения автоколебаний. Операторный многочлен при φ в (6.57) есть левая часть соответствующего характеристического уравнения. Тогда на основании подстановки $p = j\Omega$ из характеристического уравнения получим два уравнения: $X(A, \Omega, \varphi_0) = 0$ и $Y(A, \Omega, \varphi_0)$. Третье уравнение получим как частное решение дифференциального уравнения (6.57) при $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 — медленно меняющаяся составляющая. Указанные три уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} -(T_2^2 + T_1 T_K) \Omega^2 + k_1 q_1(A, \varphi_0) + k_2 q_2(A, \varphi_0) + 1 &= 0, \\ -T_2^2 T_K \Omega^2 + T_1 + T_K + T_e + k_2 T_K q_2(A, \varphi_0) &= 0, \\ [T_2^2 T_K p^3 + (T_2^2 + T_1 T_K) p^2 + (T_1 + T_K + T_e) p + 1] \varphi_0 + \\ + k_1 F_1^0(A, \varphi_0) + k_2 (T_K p + 1) F_2^0(A, \varphi_0) - \\ - k_3 (T_K p + 1) \omega(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

Полученные уравнения позволяют найти амплитуду A , частоту Ω и смещение центра колебаний φ_0 при заданных параметрах системы и заданном внешнем воздействии (измеряемом ускорении $\omega(t)$) как функции времени. Однако решение этих уравнений в общем виде затруднительно, так как при подстановке коэффициентов гармонической линеаризации первые два уравнения (6.58) будут алгебраическими и трансцендентными, а третье уравнение (6.58) — дифференциальным. Практически проще выполнить решение при постоянных величинах измеряемого ускорения $\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$ для интересующих при исследовании значений. Это решение будет пригодно так же и для достаточно медленного изменения внешнего входного воздействия¹⁾. В этом случае третье уравнение (6.58) будет алгебраическим и все три уравнения перепишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} -(T_2^2 + T_1 T_K) \Omega^2 + k_1 q_1(A, \varphi_0) + k_2 q_2(A, \varphi_0) + 1 &= 0, \\ -T_2^2 T_K \Omega^2 + T_1 + T_K + T_e + k_2 T_K q_2(A, \varphi_0) &= 0, \\ \varphi_0 + k_1 F_1^0(A, \varphi_0) + k_2 F_2^0(A, \varphi_0) - k_3 \omega_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

Погрешности прибора. Из третьего уравнения (6.59) видно, что постоянная составляющая F_1^0 периодически меняющегося напряжения на катушке пропорциональна измеряемому ускорению ω_0 с некоторой погрешностью, определяемой первым и третьим членами уравнения. Следовательно, соотношение (6.49), определяющее принцип работы прибора, не выполняется точно.

¹⁾ Полный расчет динамики системы при произвольно заданном во времени медленно меняющемся $\omega(t)$ можно произвести по методу, изложенному в § 5.3.

Относительная погрешность в измерении ускорений в соответствии с третьим уравнением (6.59) будет

$$\delta_w = \frac{\varphi_0 \pm k_2 F_2^0(A, \varphi_0)}{k_3 \omega_0}. \quad (6.60)$$

Знак \pm при F_2^0 означает, что постоянная составляющая, обусловленная нелинейной функцией $F_2(\varphi)$, меняет знак при изменении знака ускорений, тогда как φ_0 всегда имеет один и тот же знак.

Если объект движется с положительным ускорением (ускорение отклоняет катушку в сторону отрицательных углов), то будет справедлива формула

$$\delta_w = \frac{\varphi_0 + k_2 F_2^0(A, \varphi_0)}{k_3 \omega_0},$$

а при отрицательном ускорении

$$\delta_w = \frac{\varphi_0 - k_2 F_2^0(A, \varphi_0)}{k_3 \omega_0}. \quad (6.61)$$

Из (6.60) следует, что даже если бы управление коммутатором от катушки выполнялось бесконтактным устройством с идеальной релейной характеристикой, то и в этом случае имела бы относительная погрешность в измерении ускорений, пропорциональная отклонению центра колебаний от начального положения:

$$\delta_w = \frac{\varphi_0}{k_3 \omega_0}. \quad (6.62)$$

В случае измерения ускорений, имеющих один знак, выгодно установить прибор так, чтобы от действующих ускорений катушка отклонялась в сторону неподвижного контакта. В этом случае, как видно из (6.61), для одной величины ускорения можно получить взаимокompенсацию составляющих относительной ошибки

$$\frac{\varphi_0}{k_3 \omega_0} \quad \text{и} \quad \frac{k_2 F_2^0(A, \varphi_0)}{k_3 \omega_0}.$$

Для количественной оценки погрешности прибора необходимо найти зависимости φ_0 и F_2^0 от ускорения.

Из формулы (6.60) видно, что для уменьшения погрешности прибора необходимо избавиться от несимметричной нелинейности $F_2(\varphi)$. Это практически можно осуществить за счет применения пружины подвижного контакта с очень малой жесткостью, за счет установки ложного контакта и применения бесконтактного устройства, обеспечивающего идеальную релейную характеристику.

Исследование автоколебаний сначала проведем при условии $F_2(\varphi) = 0$. Уравнения (6.59) в этом случае переписутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} (T_2^2 + T_1 T_K) \Omega^2 &= k_1 q_1(A, \varphi_0) + 1, \\ T_2^2 T_K \Omega^2 &= T_1 + T_K + T_e, \\ \varphi_0 + k_1 F_1^0(A, \varphi_0) &= k_3 \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

Выбор параметров измерителя. Уравнения (6.63) позволяют определить изменение амплитуды A , частоты Ω и смещения центра колебаний φ_0 в зависимости от параметров прибора и величин измеряемых ускорений. Получение зависимости $\varphi_0 = \varphi_0(\omega_0)$ при выбранных параметрах системы важно для количественной оценки погрешности измерителя ускорений.

Для выбора параметров измерителя достаточно рассмотреть случай, когда $\omega_0 = 0$. Тогда и постоянная составляющая F_1^0 будет равна нулю (по принципу работы прибора) и, следовательно, φ_0 обратится в нуль.

Коэффициент гармонической линеаризации q_1 в соответствии с (6.56) будет иметь значение

$$q_1(A) = \frac{4U}{\pi A}. \quad (6.64)$$

Из (6.63) с учетом (6.64) получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (T_2^2 + T_1 T_K) \Omega^2 &= \frac{4k_1 U}{\pi A} + 1, \\ T_2^2 T_K \Omega^2 &= T_1 + T_K + T_e. \end{aligned} \right\} \quad (6.65)$$

На основании уравнений (6.65) получим формулы для определения частоты и амплитуды через значения параметров прибора:

$$\Omega = \sqrt{\frac{T_1 + T_K + T_e}{T_2^2 T_K}} = \sqrt{\frac{T_1 + T_e}{T_2^2 T_K} + \frac{1}{T_2^2}}, \quad (6.66)$$

$$A = \frac{4k_1 T_2^2 T_K U}{\pi [T_1 (T_2^2 + T_1 T_K + T_K T_e + T_K^2) + T_2^2 T_e]}. \quad (6.67)$$

Из (6.66) видно, что для увеличения частоты автоколебаний желательно увеличивать постоянную демпфирования T_1 и постоянную T_e , обусловленную индуктируемой обратной э. д. с. в катушке, а также уменьшать инерционную постоянную T_2 и электрическую постоянную катушки T_K . Увеличение постоянных T_1 и T_e , как видно из (6.67), обеспечивает уменьшение амплитуды автоколебаний чувствительной катушки. Для уменьшения амплитуды желательно также уменьшать коэффициент усиления в замкнутой системе (параметр k_1) и U .

Для выбора параметров измерителя можно построить кривые изменения амплитуды и частоты автоколебаний при изменении каждого параметра и постоянных других параметрах. Для расчетов примем следующие значения параметров (примерно соответствующих выполненному макету измерителя ускорений): $T_1 = 0,6$ сек, $T_K = 0,0001$ сек, $T_2^2 = 0,007$ сек², $T_e = 0,004$ сек, $k_1 = 0,7$ 1/а, $k_3 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ сек²/с.м, $U = 1$ в.

Построенные кривые $A(T_1)$ и $\Omega(T_1)$ при принятых значениях параметров представлены на рис. 6.9. Как видно, демпфирование является

эффективным средством уменьшения амплитуды и увеличения частоты автоколебаний.

Подобные кривые легко построить и для других параметров.

Для принятых значений параметров частота автоколебаний будет $f = 148$ гц и амплитуда колебаний $A = 0,148 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 0,5$.

Определение зависимости смещения центра колебаний и амплитуды от величины ускорения. Определение зависимости смещения центра колебаний от величины измеряемого ускорения важно для количественной оценки погрешности прибора.

Подставив значения $F_1^0(A, \varphi_0)$ и коэффициента

гармонической линеаризации $q_1(A, \varphi_0)$ из (6.56) в (6.63), перепишем уравнения для определения автоколебаний в виде

$$\left. \begin{aligned} (T_2^2 + T_1 T_k) \Omega^2 &= \frac{4k_1 U}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} + 1, \\ T_2^2 T_k \Omega^2 &= T_1 + T_k + T_e, \\ \varphi_0 + \frac{2k_1 U}{\pi} \arcsin \frac{\varphi_0}{A} &= k_3 \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

Из второго уравнения (6.68) следует, что частота автоколебаний Ω не зависит от величины измеряемого ускорения и определяется соотношением (6.66).

Срыв автоколебаний наступает при $\varphi_0 = A$. Из первого уравнения (6.68) видно, что при постоянных параметрах системы и стремлении отношения $\frac{\varphi_0}{A}$ к единице амплитуда A и смещение центра колебаний φ_0 должны стремиться к нулю. При этом из третьего уравнения (6.68) можно получить условие срыва автоколебаний:

$$\omega_{\max} = \frac{k_1}{k_3} U. \quad (6.69)$$

Для принятых значений параметров ускорение, вызывающее срыв автоколебаний, равно $\omega_{\max} \approx 580 \text{ см/сек}^2$.

Для определения зависимостей $A(\omega_0)$ и $\varphi_0(\omega_0)$ будем задавать в первом уравнении (6.68) значения $\frac{\varphi_0}{A}$ и определять $A\left(\frac{\varphi_0}{A}\right)$ и $\varphi_0\left(\frac{\varphi_0}{A}\right)$ при заданных параметрах прибора. Из третьего уравнения (6.68)

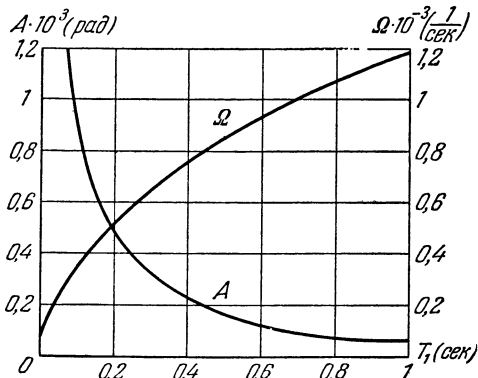


Рис. 6.9.

при тех же значениях $\frac{\varphi_0}{A}$ и полученных значениях φ_0 определим соответствующие значения ускорений ω_0 . Выполненные вычисления для принятых значений параметров представлены в виде графиков на рис. 6.10.

Из графиков видно, что амплитуда автоколебаний имеет наибольшее значение при $\omega_0 = 0$ и уменьшается с увеличением измеряемого ускорения. Отклонение центра колебаний вначале нарастает, а затем уменьшается. Срыв автоколебаний происходит при $A = \varphi_0 = 0$ и

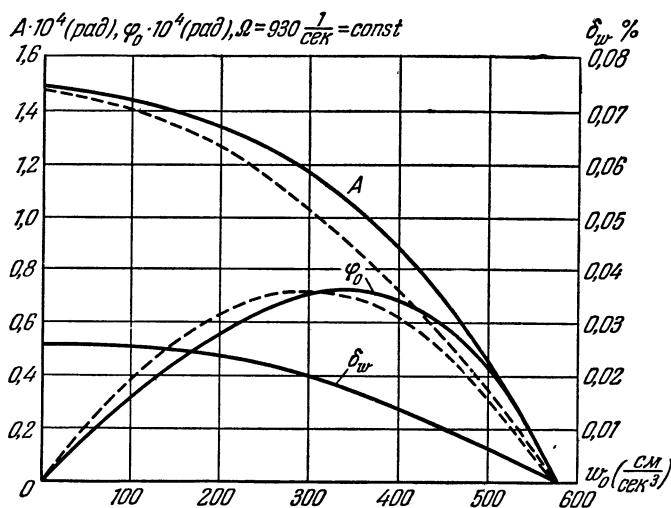


Рис. 6.10.

$\omega_0 = \omega_{\max}$. На рис. 6.10 представлена также относительная ошибка δ_{ω}^0 , подсчитанная по формуле (6.62). Относительная погрешность прибора, обусловленная принципом его работы, как видно, не превосходит 0,03%.

При больших значениях ускорений смещение центра колебаний и амплитуда автоколебаний мало отличаются друг от друга. В этом случае возможен срыв автоколебаний от случайных воздействий. Поэтому для обеспечения надежной устойчивой работы прибор следует рассчитывать на измерение ускорений, меньших ω_{\max} , а именно на

$$\omega_{\text{доп}} = (0,5 \div 0,6) \omega_{\max}.$$

Тогда в рабочем диапазоне относительная погрешность будет близкой к постоянному значению и ее можно уменьшить выбором тарировочного ускорения прибора.

Таким образом, если выбором параметров амплитуда колебаний будет доведена до десятых долей и даже единиц угловых минут, то погрешность, обусловленная принципом работы прибора, будет практически ничтожной (тысячные доли процента).

Погрешность подобных приборов будет определяться, в основном, стабильностью релейной характеристики и точностью стабилизации прибора в плоскости горизонта. Здесь, так же как и в гироскопе, представляется целесообразным перейти от контактной пары к бесконтактному управляющему устройству.

Учет двух нелинейностей. Определим теперь зависимости изменения амплитуды, частоты и смещения центра колебаний от величины измеряемого ускорения при учете момента реакции неподвижного контакта на подвижный. При подстановке значений F^0 и коэффициентов гармонической линеаризации (6.56) в уравнения (6.59) получим уравнения для определения амплитуды и частоты автоколебаний:

$$\left. \begin{aligned} (T_2^2 + T_1 T_K) \Omega^2 &= \frac{4k_1 U}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} + \\ &+ \frac{k_2 c}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\varphi_0}{A} + \frac{\varphi_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} \right) + 1, \\ T_2^2 T_K \Omega^2 &= T_1 + T_K + T_e + \\ &+ \frac{k_2 T_K c}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\varphi_0}{A} + \frac{\varphi_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} \right), \\ \varphi_0 + \frac{2k_1 U}{\pi} \arcsin \frac{\varphi_0}{A} + \\ &+ \frac{k_2 c}{\pi} \left[A \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} + \frac{\varphi_0}{2} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{\varphi_0}{A} \right) \right] = k_3 \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.70)$$

Задаваясь значениями $0 \leq \frac{\varphi_0}{A} \leq 1$ при известных параметрах, из второго уравнения (6.70) будем определять значения частоты Ω . При тех же значениях $\frac{\varphi_0}{A}$ и полученных значениях Ω из первого уравнения (6.70) будем определять значения амплитуды A и, следовательно, значения смещения колебаний φ_0 .

Подставляя значения $\frac{\varphi_0}{A}$, A , φ_0 в третье уравнение (6.70), получим соответствующие значения ω_0 . Таким образом определяются зависимости $A(\omega_0)$, $\Omega(\omega_0)$ и $\varphi_0(\omega_0)$. Соответствующие расчетные формулы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{T_1 + T_K + T_e}{T_2^2 T_K} + \frac{k_2 c}{\pi T_2^2} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\varphi_0}{A} + \frac{\varphi_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} \right), \\ A &= \frac{4k_1 U \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}}}{\pi \left[(T_2^2 + T_1 T_K) \Omega^2 - \frac{k_2 c}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\varphi_0}{A} + \frac{\varphi_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} \right) - 1 \right]}, \\ \omega_0 &= \frac{\varphi_0}{k_3} + \frac{2k_1 U}{\pi k_3} \arcsin \frac{\varphi_0}{A} + \\ &+ \frac{k_2 c}{\pi k_3} \left[A \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{A^2}} + \frac{\varphi_0}{2} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{\varphi_0}{A} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

Выполненные по формулам (6.71) расчеты при принятых ранее значениях параметров, коэффициенте жесткости пружины подвижного контакта $c = 1000 \text{ г} \cdot \text{см}/\text{рад}$ и $k_2 = 0,0715 \cdot 10^{-3} \text{ 1/г} \cdot \text{см}$, представлены графиками на рис. 6.10 (пунктирные кривые). Как видно из графиков, за счет реакции неподвижного контакта на подвижный кривые $A(\omega_0)$ и $\varphi_0(\omega_0)$ несколько деформируются. Однако при малой жесткости пружины подвижного контакта погрешность прибора практически не изменяется по сравнению со случаем учета одной нелинейной функции $F_1(\varphi)$. Частота автоколебаний и в этом случае примерно остается постоянной и равной $\Omega \approx 930 \text{ 1/сек}$.

§ 6.5. Интегрирующее устройство

Принцип действия интегрирующего устройства. Принципиальная схема интегрирующего устройства представлена на рис. 6.11. Устройство предназначено для интегрирования медленно меняющейся функции времени. Интегрируемая функция вводится в виде угла

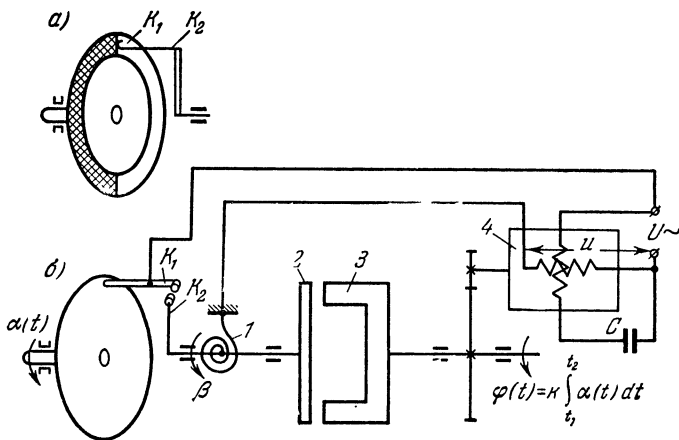


Рис. 6.11.

поворота $\alpha(t)$, а результат интегрирования получается в виде угла поворота оси магнита $\varphi(t)$.

Интегрирующее устройство работает по принципу следящей системы с двигателем, управляемым в релейном режиме, и с обратной связью в виде магнитного тахометра.

Управление двигателем может быть осуществлено как посредством скользящих контактов (рис. 6.11, а), так и посредством соударяющихся контактов (рис. 6.11, б).

Устройство регулируется так, что при $\alpha(t) = 0$ контакт K_1 , укрепленный на задающем диске, соприкасается с контактом K_2 , укрепленным на оси чувствительного элемента магнитного тахометра. При

повороте задающего диска на угол $\alpha(t)$ за счет давления контакта K_1 на контакт K_2 пружина 1 будет закручиваться. Двигатель 4 подключится и через шестеренчатую передачу приведет в движение магнит 3. При вращении магнита на диске 2 за счет вихревых токов будет развиваться момент. Когда момент, развиваемый на диске 2, будет равен моменту закрученной на угол $\alpha(t)$ пружины, контакты K_1 и K_2 разомкнутся. Двигатель начнет тормозиться, и контакты замкнутся снова.

Как видно, интегрирующее устройство работает в режиме автоколебаний. Среднее значение угловой скорости ω_m оси, несущей магнит, будет пропорционально значению $\alpha(t)$, а угол поворота оси магнита (рис. 6.11) пропорционален интегралу от $\alpha(t)$:

$$\varphi = k \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) dt.$$

Достоинством такого интегрирующего устройства является то, что интегрирование функции, задаваемой в виде угла поворота с выдачей результата также в виде угла поворота, происходит без промежуточных преобразований в другие физические величины. На точность работы интегрирующего устройства не оказывают влияния колебания напряжения источника, питающего двигатель, и изменение нагрузки, приложенной к двигателю.

Очевидно, что для получения высокой точности интегрирования необходимо обеспечить колебания чувствительного элемента тахометра и скорости двигателя с малой амплитудой и высокой частотой. Поэтому представляет практический интерес определить, как каждый из параметров интегрирующего устройства влияет на амплитуду и частоту автоколебаний, а также исследовать влияние задающего воздействия $\alpha(t)$ на параметры автоколебаний.

Применение различных контактных устройств существенно изменяет частоту и амплитуду автоколебаний. Ввиду этого исследование выполним для обоих вариантов исполнения интегрирующего устройства: со скользящими управляющими контактами и с соударяющимися управляющими контактами [174].

Исследование автоколебаний при скользящих управляющих контактах. Уравнение двигателя в соответствии со схемой интегрирующего устройства (рис. 6.11) при пренебрежении моментом сухого трения будет

$$J_1 \dot{\omega}_{дв} + n_1 \omega_{дв} + \frac{c}{i} (\omega_{дв} - i \dot{\beta}) = M, \quad (6.72)$$

где $\omega_{дв}$ — скорость вращения двигателя, J_1 — приведенный к оси двигателя момент инерции всех вращающихся от двигателя масс, c — коэффициент передачи момента на чувствительный элемент тахометра, i — передаточное число от двигателя к оси магнита, $\dot{\beta}$ — угловая скорость чувствительного элемента.

Вращающий момент двигателя можно приближенно представить в виде

$$M = c_1 u - c_2 \omega_{\text{дв}}, \quad (6.73)$$

где u — напряжение, приложенное к управляющей обмотке двигателя, $c_1 = \frac{M}{u} \left[\frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{в}} \right]$, $c_2 = \frac{M_0}{\omega_0} [\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}]$ — коэффициенты, получаемые из механических характеристик двигателя, M_0 — момент двигателя в тормозном режиме, ω_0 — угловая скорость холостого хода двигателя.

Управляющее напряжение на обмотке двигателя будет изменяться по нелинейному закону от угла поворота чувствительного элемента магнитного тахометра (рис. 6.12, а):

$$u = F_1(\beta) = \begin{cases} U & \text{при } \beta \leq 0, \\ 0 & \text{при } \beta \geq 0, \end{cases} \quad (6.74)$$

где U — напряжение питания управляющей обмотки.

С учетом (6.73) и (6.74) уравнение двигателя (6.72) запишется в виде

$$T_1 \dot{\omega}_{\text{дв}} + \omega_{\text{дв}} - \eta_1 \dot{\beta} = k_1 F_1(\beta), \quad (6.75)$$

где $T_1 = \frac{J_1}{n_1 + \frac{c}{i} + c_2} [\text{сек}]$ — электромеханическая постоянная времени

двигателя, $\eta_1 = \frac{c}{n_1 + \frac{c}{i} + c_2}$ — коэффициент относительного скольжения

чувствительного элемента тахометра, $k_1 = \frac{c}{n_1 + \frac{c}{i} + c_2} \left[\frac{1}{\text{сек} \cdot \text{в}} \right]$ —

передаточное число двигателя.

Уравнение чувствительного элемента тахометра при пренебрежении сухим трением будет

$$J_2 \ddot{\beta} + n_2 \dot{\beta} + c_{1п}(\alpha + \beta) = c(\omega_m - \dot{\beta}), \quad (6.76)$$

где α — интегрируемое значение входного угла, β — угол поворота, отсчитываемый от положения чувствительного элемента тахометра, при котором контакты K_1 и K_2 касаются друг друга без давления, J_2 — момент инерции чувствительного элемента тахометра, n_2 — коэффициент вязкого трения, $c_{1п}$ — коэффициент жесткости спиральной пружины, ω_m — скорость вращения магнита.

Уравнение (6.76) перепишем в виде

$$T_2 \ddot{\beta} + T_3 \dot{\beta} + \beta = k_2 \omega_m - \alpha, \quad (6.77)$$

где $T_2 = \sqrt{\frac{J_2}{c_{1п}}} [\text{сек}]$ — инерционная постоянная времени чувствительного элемента тахометра, $T_3 = \frac{c + n_2}{c_{1п}} [\text{сек}]$ — постоянная времени

демпфирования. $k_2 = \frac{c}{c_{1п}}$ [сек] — передаточное число магнитного тахометра.

Кроме того, следует учесть кинематическое уравнение редуктора

$$\omega_m = k_3 \omega_{дв}. \quad (6.78)$$

Уравнения (6.75), (6.77) и (6.78) приведем к одному для переменной β , которое запишем в операторной форме:

$$[T_1 T_2^2 p^3 + (T_1 T_3 + T_2^2) p^2 + (T_1 + T_3 - k\eta) p + 1] \beta = \\ = k F_1(\beta) - (T_1 p + 1) \alpha, \quad (6.79)$$

где $\eta = \frac{\tau_1}{k_1}$ [в · сек], а $k = k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{в} \right]$ — передаточное число интегрирующего устройства.

Для макета интегрирующего устройства, выполненного по приведенной схеме с двигателем ДИД-0,5, значение $k\eta \ll T_1 + T_3$, так как $T_1 = 0,33$ сек, $T_2^2 = 0,0017$ сек,

$$T_3 = 0,017 \text{ сек}, \quad k = 0,098 \frac{1}{в},$$

$\eta = 0,039$ в · сек. Поэтому в уравнении (6.79) можно пренебречь значением $k\eta$ по сравнению с $T_1 + T_3$ и записать его в виде

$$[T_1 T_2^2 p^3 + (T_1 T_3 + T_2^2) p^2 + \\ + (T_1 + T_3) p + 1] \beta = \\ = k F_1(\beta) - (T_1 p + 1) \alpha. \quad (6.80)$$

Уравнение (6.80) будем использовать для исследования автоколебаний интегрирующего устройства. В данном случае вследствие наличия несимметричной нелинейной статической характеристики $F_1(\beta)$ и внешнего воздействия α автоколебания будут несимметричными. Но

среди несимметричных режимов при различных постоянных значениях α можно указать один симметричный режим автоколебаний. Максимальное значение α , при котором происходит срыв автоколебаний, обозначим α_{\max} . Если задать $\alpha_0 = \frac{\alpha_{\max}}{2}$, то постоянная составляющая периодически меняющегося напряжения на управляющей обмотке двигателя будет $u_0 = \frac{U}{2}$. При этом момент на чувствительном элементе магнита от постоянной составляющей напряжения будет

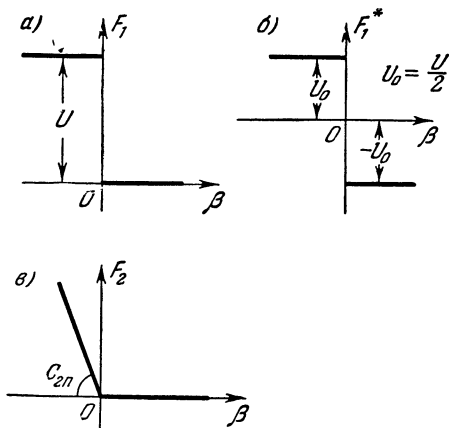


Рис. 6.12.

уравновешиваться моментом закрученной на угол α_0 спиральной пружины и, следовательно,

$$ku_0 = \alpha_0.$$

Тогда уравнение (6.80) можно записать в виде (при $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$):

$$[T_1 T_2^2 p^3 + (T_1 T_3 + T_2^2) p^2 + (T_1 + T_3) p + 1] \beta = k F_1^*(\beta), \quad (6.81)$$

где $F_1^*(\beta) = F(\beta) - u_0$ изобразится в виде симметричной идеальной релейной характеристики (рис. 6.12, б).

Таким образом, для одного значения $\alpha = \alpha_0$ можно провести исследования, как для симметричных автоколебаний. Для выбора параметров системы из условия получения малой амплитуды и большой частоты автоколебаний исследования при одном значении α будет достаточно. При решении задачи выбора параметров к такому приему следует прибегать и в других случаях, где это возможно.

Для данного варианта интегрирующего устройства со скользящими управляющими контактами ограничимся выбором параметров. Исследование автоколебаний при различных значениях α проведем в дальнейшем для случая соударяющихся управляющих контактов.

Следуя методу гармонической линеаризации, будем искать автоколебания чувствительного элемента тахометра в виде

$$\beta = A \sin \Omega t.$$

Тогда в соответствии с формулой (3.14) получим формулу гармонической линеаризации нелинейной функции $F_1^*(\beta)$ в виде

$$F_1^*(\beta) = -\frac{2U}{\pi A} \beta. \quad (6.82)$$

Подставляя это в (6.81), получим гармонически линеаризованное уравнение для определения симметричных автоколебаний:

$$\left[T_1 T_2^2 p^3 + (T_1 T_3 + T_2^2) p^2 + (T_1 + T_3) p + 1 + \frac{2kU}{\pi A} \right] \beta = 0. \quad (6.83)$$

Подставляя $p = j\Omega$ в характеристический полином уравнения (6.83), из условия $X = 0$ и $Y = 0$ получим два уравнения для определения частоты и амплитуды периодического решения:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{2kU}{\pi A} - (T_1 T_3 + T_2^2) \Omega^2 &= 0, \\ T_1 + T_3 - T_1 T_2^2 \Omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.84)$$

Разрешая уравнения (6.84) относительно Ω и A , получим:

$$\Omega = \sqrt{\frac{T_1 + T_3}{T_1 T_2^2}}, \quad A = \frac{2kU T_1 T_2^2}{\pi T_3 (T_1^2 + T_1 T_3 + T_2^2)}. \quad (6.85)$$

Устойчивость периодического решения определим по приближенному критерию (2.125):

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0.$$

Из (6.83) получаем значения $X(a, \omega)$ и $Y(a, \omega)$:

$$X(a, \omega) = \frac{2kU}{\pi a} - (T_1 T_3 + T_2^2) \omega^2 + 1,$$

$$Y(a, \omega) = (T_1 + T_3) \omega - T_1 T_2^2 \omega^3.$$

Значения соответствующих производных будут:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* = -\frac{2kU}{\pi A^2} < 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* = 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* = -2(T_1 T_3 + T_2^2) \Omega < 0,$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = (T_1 + T_3) - 3T_1 T_2^2 \Omega^2.$$

С учетом значения Ω^2 из (6.85) получим:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = -2(T_1 + T_3) < 0.$$

Таким образом, критерий устойчивости выполняется.

Для определения амплитуды колебаний угловой скорости магнита A_ω воспользуемся уравнением (6.77) без учета внешнего воздействия. Передаточная функция в соответствии с (6.77) имеет вид

$$W(p) = \frac{\beta}{\omega_m} = \frac{k_2}{T_2^2 p^2 + T_3 p + 1},$$

и, следовательно, модуль комплексного коэффициента усиления при $\omega = \Omega$ будет

$$|W(j\omega)| = \frac{k_2}{\sqrt{(1 - T_2^2 \Omega^2)^2 + T_3^2 \Omega^2}}.$$

Так как $A = |W(j\omega)| A_\omega$, то

$$A_\omega = \frac{A}{k_2} \sqrt{(1 - T_2^2 \Omega^2)^2 + T_3^2 \Omega^2}. \quad (6.86)$$

Определяя частоту и амплитуду автоколебаний для ранее принятых значений параметров интегрирующего устройства $U = 30$ в и $k_2 = 0,0156$ сек, получим:

$$\Omega = 24,85 \text{ 1/сек}; \quad A = 0,53 \text{ рад}, \quad A_\omega = 14,3 \text{ 1/сек}.$$

Очевидно, что для точного интегрирования нельзя удовлетвориться полученными значениями частоты и амплитуд.

Для определения возможностей получения приемлемого режима автоколебаний рассматриваемого устройства построим кривые изменения частоты и амплитуд в зависимости от параметров устройства. Выполненные по формулам (6.85) и (6.86) построения для параметров T_1 , T_2 , T_3 и k_1 представлены на рис. 6.13. Приведенные графики

позволяют получить практические рекомендации для улучшения интегрирующего устройства. Как видно, наиболее эффективным средством уменьшения амплитуд и увеличения частоты автоколебаний является увеличение демпфирования чувствительного элемента тахометра (увеличение параметра T_3). Однако это требует конструктивного усложнения интегрирующего устройства.

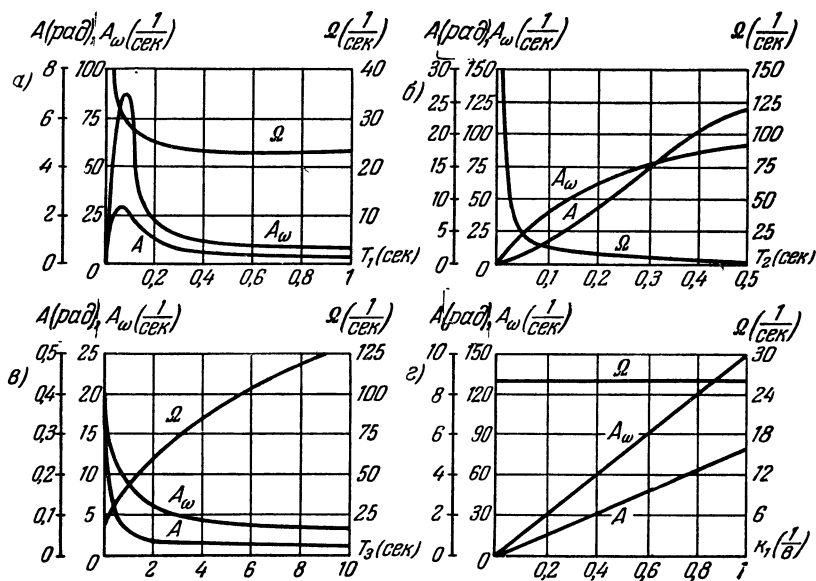


Рис. 6.13.

Полученные результаты исследования автоколебаний приближенным методом гармонической линеаризации сравнивались с результатами построения процесса установления автоколебаний графоаналитическим методом Д. А. Башкирова и с результатами экспериментальных измерений на макете. Результаты вычислений и измерений приведены в таблице 6.1.

Т а б л и ц а 6.1

Метод исследования	Ω [1/сек]	A [рад]	A_ω [1/сек]
Графоаналитический . .	21,1	0,54	17
Гармонической линеаризации	24,8	0,53	14,3
Экспериментальные измерения	26,4	0,60	—

Из приведенного в табл. 6.1 сравнения видно, что метод гармонической линеаризации дает достаточно точный результат.

Исследование автоколебаний интегрирующего устройства при соударяющихся управляющих контактах. При замене скользящих управляющих контактов в виде щетки и диска «да — нет» (рис. 6.11, а) на соударяющиеся контакты (рис. 6.11, б) при тех же параметрах устройства, что и в предыдущем случае, автоколебания резко изменяются в сторону увеличения частоты и уменьшения амплитуды. Это дает наиболее простой конструктивный путь улучшения характеристик интегрирующего устройства.

В отличие от предыдущего случая на чувствительный элемент тахометра при автоколебаниях теперь будет воздействовать дополнительный момент, вызываемый давлением контакта K_1 на контакт K_2 и заданный в виде нелинейной функции $F_2(\beta)$ (рис. 6.12, в). При этом будем считать, что жесткость державки контакта K_1 по углу прогиба несравнимо больше жесткости пружины чувствительного элемента тахометра, а жесткость державки контакта K_2 сравнима с жесткостью пружины тахометра.

Исследуем автоколебания при учете входного воздействия α . Запишем уравнения двигателя, чувствительного элемента тахометра и кинематическое уравнение редуктора (при прежнем способе отсчета углов β с учетом $\eta_1 \approx 0$) в виде:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) \omega_{\text{дв}} &= k_1 F_1(\beta), \\ (T_2^2 p^2 + T_3 p + 1) \beta &= k_3 \omega_{\text{м}} + \frac{F_2(\beta)}{c_{1\text{п}}} - \alpha, \\ \omega_{\text{м}} &= k_3 \omega_{\text{дв}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.87)$$

Из уравнений (6.87) после исключения переменных $\omega_{\text{дв}}$ и $\omega_{\text{м}}$ и условия $\alpha = \text{const}$ получим уравнение интегрирующего устройства относительно переменной β :

$$(T_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + T_3 p + 1) \beta = k F_1(\beta) + \frac{(T_1 p + 1) F_2(\beta)}{c_{1\text{п}}} - \alpha, \quad (6.88)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 \left[\frac{1}{s} \right]$.

Так как в замкнутой системе интегрирующего устройства имеются несимметричные нелинейные функции и учитывается внешнее воздействие, то автоколебания будут несимметричными. Решение для переменной β будем искать в виде

$$\beta = \beta_0 + A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t. \quad (6.89)$$

Нелинейные функции в (6.88) по методу гармонической линеаризации заменим соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} F_1(\beta) &= F_1^0(A, \beta_0) + q_1(A, \beta_0)(\beta - \beta_0), \\ F_2(\beta) &= F_2^0(A, \beta_0) + q_2(A, \beta_0)(\beta - \beta_0), \end{aligned} \right\} \quad (6.90)$$

где значения постоянных составляющих и коэффициентов гармонической линеаризации в соответствии с (5.115), (5.116), (5.142) и (5.143) и статическими нелинейными характеристиками (рис. 6.12) будут:

$$\left. \begin{aligned} F_1^0(A, \beta_0) &= \frac{U}{2} - \frac{U}{\pi} \arcsin \frac{\beta_0}{A}, \quad q_1(A, \beta_0) = -\frac{2U}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{A^2}}, \\ F_2^0(A, \beta_0) &= -\frac{c_{2n}\beta_0}{2} + \frac{c_{2n}}{\pi} \left(\beta_0 \arcsin \frac{\beta_0}{A} + A \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{A^2}} \right), \\ q_2(A, \beta_0) &= -\frac{c_{2n}}{2} + \frac{c_{2n}}{\pi} \left(\arcsin \frac{\beta_0}{A} + \frac{\beta_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\beta_0^2}{A^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.91)$$

Подставляя выражения $F_1(\beta)$ и $F_2(\beta)$ из (6.90) в (6.88), получим гармонически линеаризованное уравнение системы:

$$\begin{aligned} \left[T_1 T_2^2 p^3 + (T_1 T_3 + T_2^2) p^2 + \left(T_1 + T_3 - \frac{T_1}{c_{1n}} q_2 \right) p + \right. \\ \left. + 1 - k q_1 - \frac{1}{c_{1n}} q_2 \right] \beta = \frac{1}{c_{1n}} T_1 p (F_2^0 - q_2 \beta_0) + k (F_1^0 - q_1 \beta_0) + \\ + \frac{1}{c_{1n}} (F_2^0 - q_2 \beta_0) - \alpha. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Выполняя подстановку $p = j\Omega$ в характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (6.92) и разделяя вещественную и мнимую части, получим два уравнения. Третье уравнение получим как частное решение уравнения (6.92) при $\beta = \beta_0$. Указанные три уравнения для $\beta_0 = \text{const}$, $F_1^0 = \text{const}$ и $F_2^0 = \text{const}$ запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} 1 - k q_1 - \frac{1}{c_{1n}} q_2 - (T_1 T_3 + T_2^2) \Omega^2 &= 0, \\ T_1 + T_3 - \frac{T_1}{c_{1n}} q_2 - T_1 T_2^2 \Omega^2 &= 0, \\ \beta_0 &= k F_1^0 + \frac{1}{c_{1n}} F_2^0 - \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

Уравнения (6.93) трансцендентные и их решение можно выполнить лишь графически. Из первых двух уравнений (6.93) следует:

$$\Omega^2 = -\frac{k q_1(A, \beta_0)}{T_1 T_3} - \frac{1}{T_1^2}. \quad (6.94)$$

Исключая из второго уравнения (6.93) Ω^2 , получим:

$$T_1 + T_3 + \frac{T_2^2}{T_1} + \frac{k T_2^2}{T_3} q_1(A, \beta_0) - \frac{T_1}{c_{1n}} q_2(A, \beta_0) = 0. \quad (6.95)$$

По уравнению (6.95) можно построить кривую $A(\beta_0)$, а по третьему уравнению (6.93) — семейство кривых $A(\beta_0)$ при различных зна-

чениях α . Точки пересечения указанных кривых дают решение $A(\alpha)$ и $\beta_0(\alpha)$, а значения $\Omega(\alpha)$ определяются из (6.94) при известных A и β_0 . Результаты решения представлены в виде графиков (рис. 6.14) для значений параметров, соответствующих выполненному макету:

$$T_1 = 0,33 \text{ сек}, T_2^2 = 0,0017 \text{ сек}^2, T_3 = 0,017 \text{ сек}, k = 0,098 \frac{1}{\text{с}}, U = 30\text{в},$$

$\frac{c_{2n}}{2c_{1n}} = 84,4$. На этом же рисунке приведены экспериментально снятые зависимости $A(\alpha)$ и $\Omega(\alpha)$ (пунктирные кривые). Если учесть, что

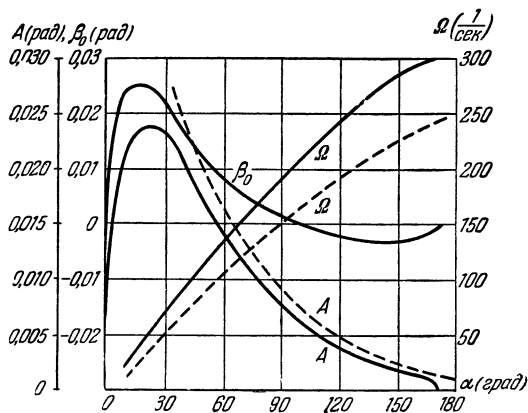


Рис. 6.14.

вводимые в уравнения значения параметров измерялись на макете с точностью порядка 10% , то, как видно, исследование автоколебаний методом гармонической линеаризации в данном случае дает достаточную точность.

Исследование устойчивости получаемого периодического решения можно было выполнить аналогично предыдущему примеру, но в таком исследовании нет необходимости, так как автоколебательный установившийся режим очевиден из принципа работы интегрирующего устройства.

Исследование влияния параметров устройства на частоту и амплитуду автоколебаний проведем для значения α , при котором $\beta_0 = 0$, т. е. используем для этого единственно возможный режим симметричных колебаний. Полагая в (6.92) $\beta_0 = 0$, получаем уравнение

$$\left[T_1 T_2^2 p^3 + (T_1 T_3 + T_2^2) p^2 + \left(T_1 + T_3 - \frac{T_1}{c_{1n}} q_2 \right) p + 1 - k q_1 - \frac{1}{c_{1n}} q_2 \right] \beta = k F_1^0 + \frac{1}{c_{1n}} F_2^0 - \alpha. \quad (6.96)$$

Из уравнения (6.96) получим три уравнения для определения автоколебаний: два уравнения при $p = j\Omega$ из условия равенства нулю

вещественной и мнимой части характеристического уравнения и третье уравнение как частное решение уравнения (6.96) при $\beta = 0$. Указанные три уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} 1 - kq_1 - \frac{1}{c_{1n}} q_2 - (T_1 T_3 + T_2^2) \Omega^2 &= 0, \\ T_1 + T_3 - \frac{T_1}{c_{1n}} q_2 - T_1 T_2^2 \Omega^2 &= 0, \\ kF_1^0 + \frac{1}{c_{1n}} F_2^0 - \alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.97)$$

где постоянные составляющие и коэффициенты гармонической линеаризации в соответствии с (6.91) при $\beta_0 = 0$ будут иметь значения:

$$\left. \begin{aligned} F_1^0 &= \frac{U}{2}, & q_1(A) &= -\frac{2U}{\pi A}, \\ F_2^0(A) &= \frac{c_{2n}}{\pi} A, & q_2(A) &= -\frac{c_{2n}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.98)$$

Подставив значения постоянных составляющих и коэффициентов гармонической линеаризации из (6.98) в (6.97), получаем:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{2kU}{\pi A} + \frac{c_{2n}}{2c_{1n}} - (T_1 T_3 + T_2^2) \Omega^2 &= 0, \\ T_1 + T_3 + \frac{T_1 c_{2n}}{2c_{1n}} - T_1 T_2^2 \Omega^2 &= 0, \\ \frac{kU}{2} + \frac{c_{2n}}{\pi c_{1n}} A - \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

Вводя обозначение $\delta_n = \frac{c_{2n}}{2c_{1n}}$ из второго уравнения (6.99), получим формулу для определения частоты автоколебаний

$$\Omega = \sqrt{\frac{T_1(1 + \delta_n) + T_3}{T_1 T_2^2}}. \quad (6.100)$$

Подставляя значение Ω в первое уравнение (6.99), получим формулу для определения амплитуды автоколебаний

$$A = \frac{2kUT_1 T_2^2}{\pi T_3 [T_1^2(1 + \delta_n) + T_1 T_3 + T_2^2]}. \quad (6.101)$$

Из уравнения (6.87) без учета внешнего воздействия α и постоянной составляющей $F_2^0(A)$ гармонически линеаризованной нелинейной функции $F_2(\beta)$ можно получить передаточную функцию чувствительного элемента магнитного тахометра:

$$W(p) = \frac{\beta}{\omega_m} = \frac{k_2}{T_2^2 p^2 + T_3 p + 1 + \delta_n}.$$

Тогда для пересчета амплитуд колебаний чувствительного элемента тахометра в амплитуды угловой скорости магнита получим формулу

$$A_{\omega} = \frac{A}{k_2} \sqrt{(1 + \delta_{\Pi} - T_2^2 \Omega^2)^2 + T_3^2 \Omega^2}. \quad (6.102)$$

Формулы (6.100) — (6.102) позволяют построить графики изменения частоты Ω и амплитуд A , A_{ω} в зависимости от каждого параметра

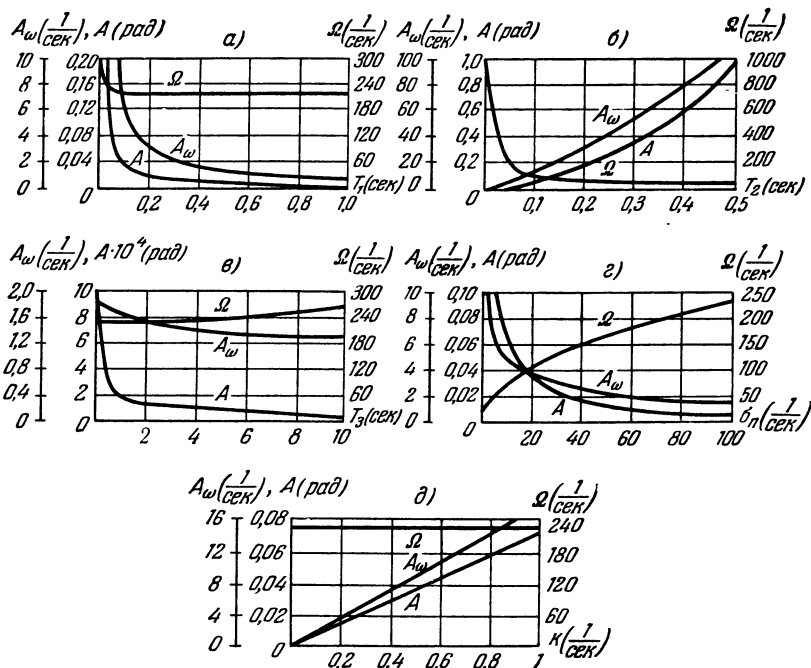


Рис. 6.15.

интегрирующего устройства. Выполненное построение представлено на рис. 6.15. При ранее указанных значениях параметров, соответствующих макету, $k_2 = 0,0156$ сек и $\beta_0 = 0$ получаем следующие значения частоты и амплитуд автоколебаний: $\Omega = 224$ 1/сек ($f = 35,6$ гц), $A = 0,0066$ рад, $A_{\omega} = 1,61$ 1/сек.

В результате замены скользящих контактов соударяющимися контактами получился значительный эффект повышения частоты и уменьшения амплитуд автоколебаний. Построенные графики (рис. 6.15) позволяют сделать практические выводы для выбора параметров интегрирующего устройства.

Для оценки точности метода гармонической линейаризации при одном значении α был построен процесс установления автоколебаний графоаналитическим методом Д. А. Башкирова и произведены

экспериментальные измерения на макете. Результаты вычислений и измерений представлены в таблице 6.2.

Т а б л и ц а 6.2

Метод исследования	Ω [1/сек]	A [рад]	A_ω [1/сек]
Графоаналитический	230	0,0083	1,60
Гармонической линейаризации	195	0,0077	1,84
Экспериментальные измерения	—	0,0070	—

Из таблицы 6.2 видно, что метод гармонической линейаризации дает достаточную точность и при наличии в системе двух несимметричных нелинейностей.

Сравнивая полученные результаты исследования автоколебаний двух вариантов интеграла, можно сделать вывод, что с точки зрения простоты конструкции более рациональным является вариант интегрирующего устройства с соударяющимися управляющими контактами, так как в этом случае получение большой частоты и малых амплитуд автоколебаний обеспечивается выбором жесткости державок управляющих контактов без дополнительного демпфирования.

§ 6.6. Система регулирования скорости электродвигателя с центробежным релейным регулятором

Принцип работы системы. Принципиальная схема электродвигателя с центробежным релейным регулятором скорости вращения представлена на рис. 6.16. На валу якоря двигателя крепится шайба III центробежного регулятора (на рисунке для наглядности шайба отнесена от якоря). На шайбе имеется контактное устройство с неподвижным контактом K_1 и подвижным контактом K_2 . За счет пружины P , натяжение которой регулируется настроечным винтом $HВ$, контактная пара K_1 и K_2 удерживается в замкнутом состоянии при скорости двигателя, меньшей номинальной. Если скорость двигателя превысит номинальное значение, то при заданной настройке под действием центробежной силы, воздействующей на массу m подвижного контакта, контактная пара размыкается. При размыкании контактов в цепь якоря двигателя включается добавочное сопротивление R_d и вследствие этого скорость двигателя уменьшается. Это приводит к замыканию контактов, и сопротивление R_d шунтируется контактами. Таким образом, по самому принципу система работает в режиме автоколебаний. За счет периодического подключения и отключения сопротивления к якорю регулируется скорость двигателя при переменном моменте нагрузки на валу двигателя. При постоянной величине сопротивления

регулирование осуществляется за счет различного времени замкнутого и разомкнутого состояний контактов.

Центробежные релейные регуляторы нашли широкое применение для регулирования скорости электродвигателей благодаря конструктивной простоте. Поддержание заданной скорости с помощью таких регуляторов обеспечивается с точностью порядка 1—5% по относительной погрешности.

Повышение точности работы центробежных релейных регуляторов может быть достигнуто правильным выбором их конструкции и

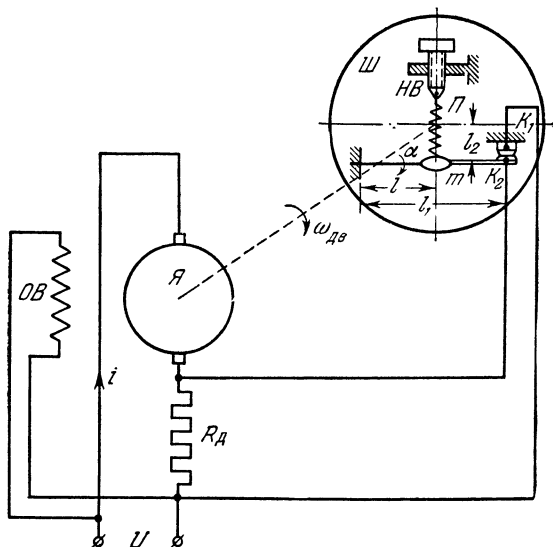


Рис. 6.16.

параметров. Это требует исследования автоколебаний системы двигатель — регулятор [184].

При исследовании данной системы, как нелинейной с автоколебательным установившимся режимом, необходимо получить рекомендации по выбору параметров из условия получения малой амплитуды колебаний скорости двигателя относительно ее среднего значения и наименьших отклонений среднего значения скорости (статической погрешности колебательной системы).

Составление уравнений системы регулирования. Составим уравнения звеньев системы.

Уравнение вращения вала двигателя будет

$$J_1 \dot{\omega}_{дв} = M_{дв} - M_c - M_{нг}, \quad (6.103)$$

где $\omega_{дв} \left[\frac{1}{сек} \right]$ — угловая скорость двигателя, $J_1 [г \cdot см \cdot сек^2]$ — момент инерции всех вращающихся от двигателя масс, приведенный к валу

двигателя, $M_{\text{дв}} [z \cdot \text{см}]$ — момент, развиваемый двигателем, $M_c [z \cdot \text{см}]$ — момент сопротивления, $M_{\text{нг}} [z \cdot \text{см}]$ — момент нагрузки.

Момент, развиваемый двигателем, при независимом возбуждении пропорционален току, протекающему в якоре двигателя:

$$M_{\text{дв}} = k_i i, \quad (6.104)$$

где $i [a]$ — ток якоря двигателя; $k_i \left[\frac{z \cdot \text{см}}{a} \right]$ — коэффициент пропорциональности, включающий конструктивные данные двигателя.

Пренебрегая индуктивностью в цепи якоря, уравнение (6.104) запишем в виде

$$M_{\text{дв}} = k_i \frac{U - e}{R + F_1(\alpha)}, \quad (6.105)$$

где $U [в]$ — напряжение питания, $e [в]$ — обратная э. д. с., развиваемая якорем, $R [ом]$ — активное сопротивление якоря, $F_1(\alpha) [ом]$ — нелинейная функция изменения сопротивления от углового перемещения

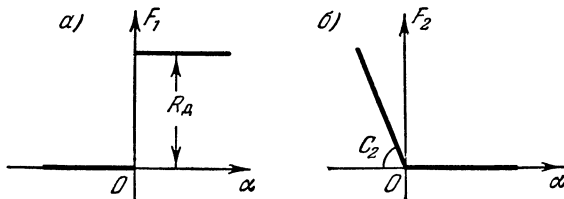


Рис. 6.17.

подвижного контакта α , представленная статической характеристикой (рис. 6.17, а). За начало отсчета угла α принимается положение подвижного контакта, при котором происходит касание с неподвижным контактом без давления.

Момент нагрузки $M_{\text{нг}}$ есть величина, произвольная во времени, и изменение его от номинального значения является основным возмущением в системе. Момент сопротивления M_c включает момент от сил сухого и вязкого трения и изменяется во времени и от скорости двигателя. Полагая $M_{\text{нг}} \gg M_c$, будем считать весь суммарный момент

$$M(t) = M_{\text{нг}} + M_c \quad (6.106)$$

изменяющимся только во времени.

Обратная э. д. с. двигателя пропорциональна скорости вращения:

$$e = k_e \omega_{\text{дв}}, \quad (6.107)$$

где $k_e [в \cdot \text{сек}]$ — коэффициент пропорциональности.

Учитывая (6.105) — (6.107), уравнение двигателя (6.103) запишем в виде

$$\left[J_1 p + \frac{k_i k_e}{R + F_1(\alpha)} \right] \omega_{\text{дв}} = k_i \frac{U}{R + F_1(\alpha)} - M(t). \quad (6.108)$$

Величина $T_1(\alpha) = \frac{J_1 [R + F_1(\alpha)]}{k_i k_e} [\text{сек}]$ является электромеханической по-

стоянной времени двигателя, нелинейно изменяющейся в зависимости от перемещения подвижного контакта. Поэтому уравнение двигателя оставим в виде (6.108), не приводя его к стандартной форме.

Уравнение движения подвижного контакта запишем в виде

$$J_2 \ddot{\alpha} + k_a \dot{\alpha} + c_1 l^2 \alpha + M_0 = m l l_2 \omega_{\text{дв}}^2 + F_2(\alpha), \quad (6.109)$$

где α — угловое перемещение подвижного контакта, $J_2 [г \cdot см \cdot сек^2]$ — момент инерции подвижного контакта при движении его относительно точки закрепления, $k_a [г \cdot см \cdot сек]$ — коэффициент вязкого трения, $c_1 \left[\frac{г}{см} \right]$ — коэффициент жесткости основной пружины, $\mu_0 [г \cdot см]$ — момент, создаваемый за счет предварительного натяжения основной пружины, $m \left[\frac{г \cdot сек^2}{см} \right]$ — масса подвижного контакта, приведенная к точке закрепления основной пружины, $l, l_2 [см]$ — геометрические размеры (рис. 6.16), $F_2(\alpha) [г \cdot см]$ — нелинейно изменяющийся от α момент реакции неподвижного контакта на подвижный контакт, учитываемый статической характеристикой (рис. 6.17, б).

В уравнении (6.109) переменная $\omega_{\text{дв}}$ входит во второй степени. Заменим нелинейно изменяющийся от угловой скорости момент центробежных сил линейной зависимостью, т. е. параболу (рис. 6.18) заменим прямой, касательной в точке $(M_{\text{ц}}^0, \omega_{\text{дв}}^0)$, соответствующей номинальному режиму. Такая замена будет удовлетворительной для исследования автоколебаний вблизи номинального режима. Следовательно, вместо члена, представляющего момент центробежных сил

$$M_{\text{ц}} = m l l_2 \omega_{\text{дв}}^2,$$

примем

$$M_{\text{ц}} = 2 m l l_2 \omega_{\text{дв}}^0 \omega_{\text{дв}} - m l l_2 (\omega_{\text{дв}}^0)^2. \quad (6.110)$$

Учитывая (6.110), уравнение (6.109) запишем в виде

$$J_2 \ddot{\alpha} + k_a \dot{\alpha} + c_1 l^2 \alpha = 2 m l l_2 \omega_{\text{дв}}^0 \omega_{\text{дв}} - (m l l_2 (\omega_{\text{дв}}^0)^2 + \mu_0) + F_2(\alpha).$$

Введем обозначения:

$T_2 = \sqrt{\frac{J_2}{c_1 l^2}} [сек]$ — инерционная постоянная времени подвижного контакта,

$T_3 = \frac{k_a}{c_1 l^2} [сек]$ — постоянная времени демпфирования,

$k_2 = \frac{2 m l l_2 \omega_{\text{дв}}^0}{c_1 l^2} [сек]$ — передаточное число,

$\gamma = \frac{m l l_2 (\omega_{\text{дв}}^0)^2 + \mu_0}{c_1 l^2}$ — угол предварительного поджатия.

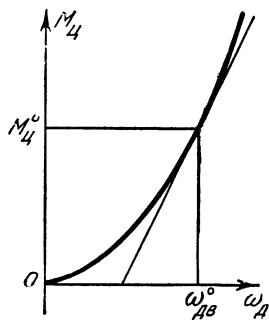


Рис. 6.18.

С учетом введенных обозначений уравнение движения подвижного контакта будет

$$(T_2^2 p^2 + T_3 p + 1) \alpha = k_2 \omega_{\text{дв}} - \gamma + \frac{F_2(\alpha)}{c_1 l^2}. \quad (6.111)$$

Уравнения (6.108) и (6.111) приведем к одному с переменной α . Из уравнения (6.108) получаем:

$$\omega_{\text{дв}} = \frac{k_i U - [R + F_1(\alpha)] M(t)}{J_1 [R + F_1(\alpha)] p + k_i k_e}.$$

Подставляя значение $\omega_{\text{дв}}$ в уравнение (6.111) и выполняя преобразования, получим:

$$\begin{aligned} J_1 R (T_2^2 p^2 + T_3 p + 1) p \alpha + J_1 [T_2^2 F_1(\alpha) p^3 \alpha + \\ + T_3 F_1(\alpha) p^2 \alpha + F_1(\alpha) p \alpha] + k_i k_e (T_2^2 p^2 + T_3 p + 1) \alpha = \\ = k_i (k_2 U - k_e \gamma) - k_2 R M(t) - k_2 F_1(\alpha) M(t) + \\ + \frac{J_1 R}{c_1 l^2} F_1(\alpha) p F_2(\alpha) + \left(\frac{J_1 R}{c_1 l^2} p + \frac{k_i k_e}{c_1 l^2} \right) F_2(\alpha). \end{aligned} \quad (6.112)$$

Гармоническая линейаризация нелинейностей и получение уравнений для исследования автоколебаний. В уравнении (6.112) имеются нелинейные функции

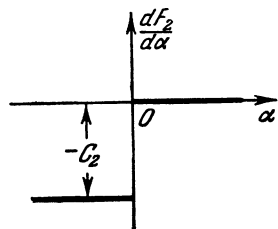


Рис. 6.19.

$$F_1(\alpha), \quad F_2(\alpha), \quad F_3(\alpha, p\alpha) = F_1(\alpha) p\alpha,$$

$$F_4(\alpha, p^2\alpha) = F_1(\alpha) p^2\alpha, \quad F_5(\alpha, p^3\alpha) = F_1(\alpha) p^3\alpha$$

и произведение нелинейных функций

$$F_1(\alpha) p F_2(\alpha) = F_1(\alpha) \frac{dF_2(\alpha)}{d\alpha} p\alpha.$$

Так как нелинейные функции несимметричны и имеется внешнее воздействие, то решение для α будем искать в виде

$$\alpha = \alpha_0 + A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t.$$

Нелинейные функции после гармонической линейаризации будут заменяться соотношениями вида

$$F_n(\alpha) = F_n^0(A, \Omega, \alpha_0) + \left[q_n'(A, \Omega, \alpha_0) + \frac{q_n''(A, \Omega, \alpha_0)}{\Omega} p \right] (\alpha - \alpha_0). \quad (6.113)$$

Нелинейная функция $\frac{dF_2(\alpha)}{d\alpha}$ как производная по α от функции $F_2(\alpha)$ (рис. 6.17, б) изобразится в виде статической характеристики,

представленной на рис. 6.19. Произведение данной функции на нелинейную функцию $F_1(\alpha)$ (рис. 6.17, а) дает нуль, т. е.

$$F_1(\alpha) p F_2(\alpha) = 0. \quad (6.114)$$

Постоянные составляющие и коэффициенты гармонической линеаризации в соответствии с формулами (5.115), (5.116), (5.142), (5.143), (5.145), (5.146), (5.147), (5.148) будут иметь значения:

$$\left. \begin{aligned} F_1^0(A, \alpha_0) &= \frac{R_d}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} \right), \\ q_1(A, \alpha_0) &= \frac{2R_d}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}}, \\ F_2^0(A, \alpha_0) &= -\frac{c_2 \alpha_0}{2} + \frac{c_2}{\pi} \left(\alpha_0 \arcsin \frac{\alpha_0}{A} + A \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right), \\ q_2(A, \alpha_0) &= -\frac{c_2}{2} + \frac{c_2}{\pi} \left(\arcsin \frac{\alpha_0}{A} + \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right), \\ q_3'(A, \Omega, \alpha_0) &= \frac{R_d \Omega}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} + \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right), \\ F_4^0(A, \Omega, \alpha_0) &= -\frac{R_d A \Omega^2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}}, \\ q_4(A, \Omega, \alpha_0) &= -\frac{R_d \Omega^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} - \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right), \\ q_5'(A, \Omega, \alpha_0) &= -\frac{R_d \Omega^2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} + \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.115)$$

Все другие коэффициенты обращаются в нуль.

Подставляя в уравнение (6.112) гармонически линеаризованные значения нелинейных функций с учетом (6.114) и выполняя преобразования, получим:

$$\begin{aligned} & \left[J_1 R T_3^2 p^3 + (J_1 R T_3 + k_i k_e T_2^2) p^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(J_1 R + k_i k_e T_3 + J_1 \frac{q_3'}{\Omega} + J_1 T_2^2 \frac{q_5'}{\Omega} - \frac{J_1 R}{c_1 l^2} q_2 \right) p + k_i k_e + \right. \\ & \quad \left. + J_1 T_3 q_4 - \frac{k_i k_e}{c_1 l^2} q_2 + k_2 q_1 M(t) \right] \alpha = \\ & = -J_1 T_3 F_4^0 + J_1 T_3 q_4 \alpha_0 + k_i (k_2 U - k_e \gamma) - k_2 R M(t) + \\ & \quad + k_2 q_1 \alpha_0 M(t) - k_2 F_1^0 M(t) + \frac{k_i k_e}{c_1 l^2} F_2^0 - \frac{k_i k_e}{c_1 l^2} q_2 \alpha_0. \quad (6.116) \end{aligned}$$

Из уравнения (6.116) получим три алгебраических уравнения для исследования автоколебаний. Два уравнения определяются условием равенства нулю вещественной и мнимой частей характеристического уравнения при подстановке $p = j\Omega$, а третье уравнение есть частное

решение уравнения (6.116) при $\alpha = \alpha_0$. Указанные три уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} k_i k_e + J_1 T_3 q_4 - \frac{k_i k_e}{c_1 l^2} q_2 + k_2 q_1 M(t) - \\ - (J_1 R T_3 + k_i k_e T_2^2) \Omega^2 = 0, \\ J_1 R + k_i k_e T_3 + J_1 \frac{q_3'}{\Omega} + \\ + J_1 T_2^2 \frac{q_5'}{\Omega} - \frac{J_1 R}{c_1 l^2} q_2 - J_1 R T_2^2 \Omega^2 = 0, \\ k_i k_e \left(\alpha_0 - \frac{F_2^0}{c_1 l^2} \right) + J_1 T_3 F_4^0 - \\ - k_i (k_2 U - k_e \gamma) + k_2 (R + F_1^0) M(t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.117)$$

Полученные уравнения (6.117) позволяют найти значения A , Ω и α_0 при заданных параметрах системы и значении момента $M(t)$, приложенного к двигателю.

Исследование устойчивости периодического решения, определяемого уравнениями (6.117), проводить нет необходимости, так как автоколебательный установившийся режим очевиден из принципа работы релейного регулятора.

Влияние параметров системы на автоколебания. Для выбора параметров системы важно определить влияние их на частоту и амплитуду автоколебаний. Такое исследование достаточно провести для постоянного значения внешнего воздействия $M(t) = M_0$.

Смещение центра колебаний α_0 определяется величиной внешнего воздействия $M(t)$. Будем считать за номинальный режим $M(t) = M_0$, при котором $\alpha_0 = 0$. Определим зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы для номинального режима.

Полагая в уравнениях (6.117) $M(t) = M_0$, $\alpha_0 = 0$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} k_i k_e + J_1 T_3 q_4 - \frac{k_i k_e}{c_1 l^2} q_2 + k_2 q_1 M_0 - \\ - (J_1 R T_3 + k_i k_e T_2^2) \Omega^2 = 0, \\ J_1 R + k_i k_e T_3 + J_1 \frac{q_3'}{\Omega} + J_1 T_2^2 \frac{q_5'}{\Omega} - \frac{J_1 R}{c_1 l^2} q_2 - J_1 R T_2^2 \Omega^2 = 0, \\ - \frac{k_i k_e F_2^0}{c_1 l^2} + J_1 T_3 F_4^0 - k_i (k_2 U - k_e \gamma) + k_2 (R + F_1^0) M_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.118)$$

где постоянные составляющие и коэффициенты гармонической линеаризации в соответствии с (6.115) теперь будут иметь значения:

$$\left. \begin{aligned} F_1^0(A) = \frac{R_d}{2}, \quad q_1(A) = \frac{2R_d}{\pi A}, \quad F_2^0(A) = \frac{c_2}{\pi} A, \\ q_2(A) = -\frac{c_2}{2}, \quad q_3'(\Omega) = \frac{R_d \Omega}{2}, \quad F_4^0(A, \Omega) = -\frac{R_d A \Omega^2}{\pi}, \\ q_4(\Omega) = -\frac{R_d \Omega^2}{2}, \quad q_5'(\Omega) = -\frac{R_d \Omega^3}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

Из второго уравнения (6.118) с учетом значений постоянных составляющих и коэффициентов гармонической линеаризации (6.119) получим формулу для определения частоты автоколебаний через параметры системы:

$$\Omega = \frac{1}{T_2} \sqrt{1 + \left(\frac{k_i k_e T_3}{J_1} + \frac{R c_2}{2 c_1 T^2} \right) \frac{1}{R + \frac{R_d}{2}}}. \quad (6.120)$$

Из первого уравнения (6.118) получим формулу для определения амплитуды автоколебаний через параметры системы при известных значениях Ω :

$$A = \frac{2 k_2 R_d M_0}{\pi \left\{ \left[J_1 T_3 \left(R + \frac{R_d}{2} \right) + k_i k_e T_3^2 \right] \Omega^2 - k_i k_e \left(1 + \frac{c_2}{2 c_1 T^2} \right) \right\}}. \quad (6.121)$$

Третье уравнение (6.118) есть уравнение постоянных составляющих, определяющее положение центра колебаний при номинальном режиме.

Формулы (6.120) и (6.121) позволяют построить зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от каждого параметра. Для построения этих зависимостей в области реальных значений параметров последние были определены экспериментально для двигателя МП-15 с центробежным релейным регулятором и составили: $J_1 = 0,084 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$, $T_2 = 0,0025 \text{ сек}$, $T_3 = 0,0053 \text{ сек}$, $k_i = 190 \text{ г} \cdot \text{см}/\text{а}$, $k_e = 0,022 \text{ в} \cdot \text{сек}$, $c_2 = 4600 \text{ г} \cdot \text{см}/\text{рад}$, $c_1 = 1000 \text{ г}/\text{см}$, $l = 1,8 \text{ см}$, $R = 1,7 \text{ ом}$, $R_d = 60 \text{ ом}$, $M_0 = 100 \text{ г} \cdot \text{см}$, $\omega_{дв}^0 = 283 \text{ 1/сек}$, $\gamma = 1,5$, $U = 24 \text{ в}$, $k_2 = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$.

Графики изменения амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы, рассчитанные по формулам (6.120) и (6.121), представлены на рис. 6.20. Приведенные графики позволяют сделать практические рекомендации по выбору параметров системы из условия получения меньшей амплитуды и большей частоты автоколебаний. Для номинального режима $A = 0,0029 \text{ рад}$, $\Omega = 410 \text{ 1/сек}$.

При исследовании представляет интерес получить зависимость изменения амплитуды колебаний скорости вращения электродвигателя от параметров системы. Для пересчета амплитуды колебаний подвижного контакта к амплитуде колебаний скорости двигателя воспользуемся уравнением движения подвижного контакта (6.111). Отбрасывая постоянные составляющие и учитывая значение нелинейной функции $F_2(\alpha) = -\frac{c_2}{2} \alpha$ для номинального режима, из (6.118) получим уравнение

$$\left(T_2^2 p^2 + T_3 p + 1 + \frac{c_2}{2 c_1 T^2} \right) \alpha = k_2 \omega_{дв}^*,$$

где $\omega_{дв}^* [1/\text{сек}]$ — отклонение угловой скорости двигателя от номинального значения за счет колебательного периодического движения

системы. Передаточная функция от $\Delta\omega^*$ к α будет

$$W(p) = \frac{\alpha}{\omega_{дв}^*} = \frac{k_2}{T_2^2 p^2 + T_3 p + 1 + \frac{c_2}{2c_1 l^2}}.$$

Для амплитуд в соответствии с передаточной функцией будем иметь соотношение

$$A_\omega = \frac{A}{k_2} \sqrt{\left(1 + \frac{c_2}{2c_1 l^2} - T_2^2 \Omega^2\right)^2 + T_3^2 \Omega^2}, \quad (6.122)$$

где A_ω — амплитуда колебаний угловой скорости двигателя.

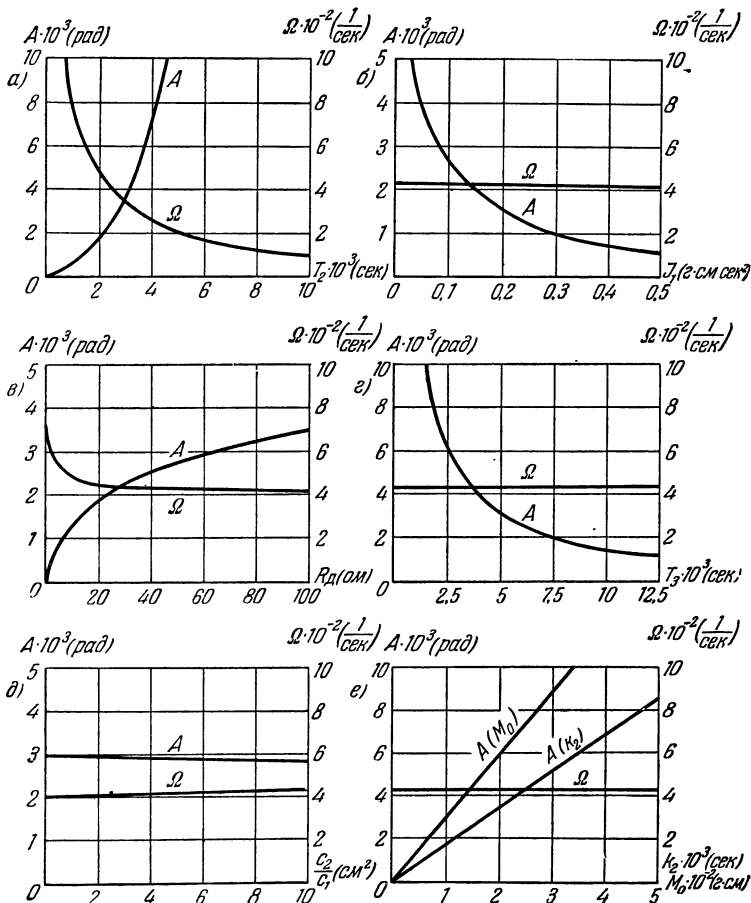


Рис. 6.20.

Так как частота автоколебаний мало меняется при изменении параметров системы (кроме параметра T_2), то графики изменения ампли-

туды скорости двигателя будут повторять в определенном масштабе графики изменения амплитуды колебаний подвижного контакта (за исключением графика рис. 6.20, а). Для номинального режима при $\Omega = 410$ 1/сек и $A = 0,0029$ рад в соответствии (6.122) получим:

$$A_{\omega} = 1240A = 3,6 \text{ 1/сек},$$

что при номинальной скорости двигателя $\omega_{\text{дв}}^0 = 283$ 1/сек дает периодическую относительную погрешность $\delta_{\text{пер}} = 1,27\%$.

Экспериментально замеренное значение частоты колебаний подвижного контакта дало совпадение с результатом теоретического исследования с точностью в 20% , что в данном случае вполне достаточно.

Установившаяся ошибка системы. Полная установившаяся ошибка колебательной системы складывается из ошибки, обусловленной смещением центра колебаний и периодической ошибки, обусловленной колебаниями регулируемой величины относительно центра колебаний. Для определения указанных ошибок необходимо решить систему трех уравнений (6.117) относительно переменных A , Ω , α_0 для различных постоянных значений $M(t) = M = \text{const}$. В результате получим зависимости $A(M)$, $\Omega(M)$ и $\alpha_0(M)$ для определенных выбранных параметров системы. Для определения ошибки регулируемой величины $\omega_{\text{дв}}$ необходимо пересчитать значения A в значения амплитуд колебаний скорости двигателя A_{ω} и значения α_0 — в значения статической ошибки по скорости $\Delta\omega_{\text{дв. ст}}$.

Перепишем уравнения (6.117) с подстановкой значений коэффициентов гармонической линеаризации и ранее принятых значений параметров системы. В результате получим три трансцендентных уравнения:

$$k_i k_e \left[1 + \frac{c_2}{2c_1 l^2} - \frac{c_2}{\pi c_1 l^2} \left(\arcsin \frac{\alpha_0}{A} + \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right) \right] + \\ + \frac{2k_2 R_d M}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} = \left[J_1 T_3 R + k_i k_e T_2^2 + \right. \\ \left. + \frac{J_1 T_3 R_d}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} - \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right) \right] \Omega^2, \quad (6.123).$$

$$k_i k_e T_3 + J_1 \left[R + \frac{R_d}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} + \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{R c_2}{\pi c_1 l^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\alpha_0}{A} - \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right) \right] = \\ = J_1 T_2^2 \left[R + \frac{R_d}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} + \frac{\alpha_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right) \right] \Omega^2, \quad (6.124)$$

$$k_i k_e \left[\alpha_0 + \gamma - \frac{k_2}{k_e} U + \frac{c_2 \alpha_0}{2c_1 l^2} - \frac{c_2}{\pi c_1 l^2} \left(\alpha_0 \arcsin \frac{\alpha_0}{A} + A \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right) \right] + \\ + k_2 \left[R + \frac{R_d}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha_0}{A} \right) \right] M = \frac{J_1 T_3 R_d A}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \Omega^2. \quad (6.125)$$

Трансцендентные уравнения (6.123)—(6.125) нельзя разрешить в явном виде относительно искомых A , Ω и α_0 при переменном значении M . Однако, не прибегая к графическому решению, здесь можно применить следующий прием. Задаваясь значениями $-1 < \frac{\alpha_0}{A} < 1$, из уравнения (6.124) получим значения частоты Ω . Для тех же значений $\frac{\alpha_0}{A}$ и Ω из уравнения (6.123) получим значения отношения $\frac{M}{A}$.

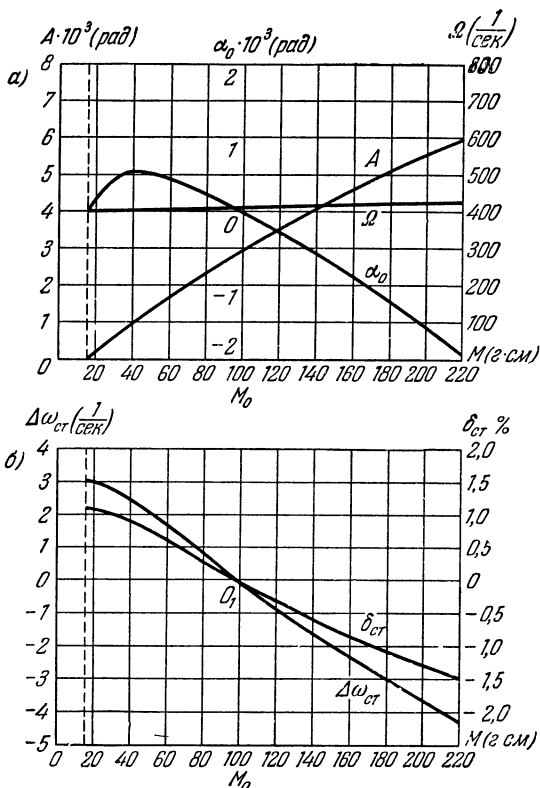


Рис. 6.21.

Поделив все члены уравнения (6.125) на A , при известных значениях $\frac{\alpha_0}{A}$, Ω и $\frac{M}{A}$ можно определить соответствующие значения амплитуды A . Перемножая значения $\frac{\alpha_0}{A}$ на значения амплитуды A , получим соответствующие значения смещения центра колебаний α_0 . Перемножая затем $\frac{M}{A}$ на A , получим значения приложенного к двигателю момента M . Выполненный таким методом расчет для ранее принятых значений параметров представлен графиками на рис. 6.21, а.

Как видно из графиков, при изменении внешнего момента в сторону уменьшения от номинального амплитуда колебаний подвижного контакта уменьшается и при некотором значении ($M \approx 17 \text{ г} \cdot \text{см}$) происходит срыв автоколебаний ($A=0$). При увеличении внешнего момента от номинального амплитуда возрастает. Центр колебаний при $M < M_0$ смещается в сторону положительных значений α (в сторону размыкания контактов), и к моменту срыва колебаний смещение центра колебаний равно нулю. При $M > M_0$ центр колебаний смещается в направлении отрицательных значений α (в сторону замыкания контактов). Частота автоколебаний незначительно увеличивается при возрастании внешнего момента.

Так как срыв автоколебаний при уменьшении внешнего момента от номинального происходит при $A = \alpha_0 = 0$, то в соответствии с третьим уравнением (6.118) получим условие срыва автоколебаний при $\alpha_0 = 0$, $F_2^0 = 0$, $F_4^0 = 0$ и $F_1^0 = R_d$:

$$k_i(k_2 U - k_e \gamma) = k_2(R + R_d) M_{\min}, \quad (6.126)$$

где M_{\min} — минимальный момент, при котором регулятор вступает в работу.

Из (6.126) следует, что для обеспечения работы регулятора во всем диапазоне изменения внешнего момента, т. е. в диапазоне

$$0 < M < M_{\max},$$

регулятор необходимо настраивать так, чтобы предварительным натяжением основной пружины обеспечивалось бы условие

$$k_2 U = k_e \gamma, \quad (6.127)$$

либо, не добиваясь выполнения условия (6.127), увеличивать добавочное сопротивление R_d . Однако увеличение R_d невыгодно, так как это вызывает увеличение амплитуды колебаний и, следовательно, увеличение периодической ошибки и статической ошибки системы. Поэтому для двигателей с ограниченным отклонением внешнего момента от номинального всегда следует уменьшать добавочное сопротивление в интересах повышения точности регулирования скорости.

Для того чтобы перейти от значений смещения центра колебаний к статической ошибке в регулировании скорости электродвигателя, запишем по уравнению (6.111) уравнение установившегося состояния подвижного контакта с учетом только постоянной составляющей нелинейной функции $F_2(\alpha)$. Указанное уравнение с учетом значения $F_2^0(A, \alpha_0)$ (6.115) будет

$$\alpha_0 = k_2 \omega_{\text{дв}} - \gamma - \frac{c_2 \alpha_0}{2c_1 l^2} + \frac{c_2}{\pi c_1 l^2} \left(\alpha_0 \arcsin \frac{\alpha_0}{A} + A \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right). \quad (6.128)$$

Для установившегося состояния при номинальном режиме имеем $\alpha_0 = 0$, $\omega_{\text{дв}} = \omega_{\text{дв}}^0$ и, следовательно,

$$0 = k_2 \omega_{\text{дв}}^0 - \gamma + \frac{c_2}{\pi c_1 l^2} A_0, \quad (6.129)$$

где A_0 — амплитуда колебаний для номинального режима. Вычитая из уравнения (6.128) уравнение (6.129) и разрешая полученное соотношение относительно $\Delta\omega_{\text{дв}}$, получим формулу для вычисления абсолютной статической ошибки для скорости двигателя по известным амплитуде колебаний и смещению центра колебаний подвижного контакта:

$$\Delta\omega_{\text{дв. ст}} = \frac{\alpha_0}{k_2} \left[1 + \frac{c_2}{c_1 l^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\alpha_0}{A} \right) \right] + \frac{c_2}{\pi c_1 l^2} \left(A_0 - A \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{A^2}} \right). \quad (6.130)$$

Выполненный по формуле (6.130) расчет представлен графиками абсолютной и относительной статической погрешности (рис. 6.21, б). К указанной погрешности добавляется периодическая погрешность. Так как частота мало изменяется с изменением момента, то пересчет амплитуд колебаний подвижного контакта в амплитуды колебаний угловой скорости можно выполнить по соотношению для установившегося номинального режима:

$$A_\omega = 1240 \text{ А.}$$

В результате выполненного исследования получены не только графики изменения амплитуды и частоты автоколебаний, но и определены периодическая и статическая погрешности для регулируемой величины — угловой скорости двигателя.

§ 6.7. Следящая система при внешнем воздействии

Исследуем автоколебания следящей системы при наличии внешнего непериодического задающего воздействия. Исследование выполним применительно к следящей системе, принципиальная схема которой представлена на рис. 6.22, где

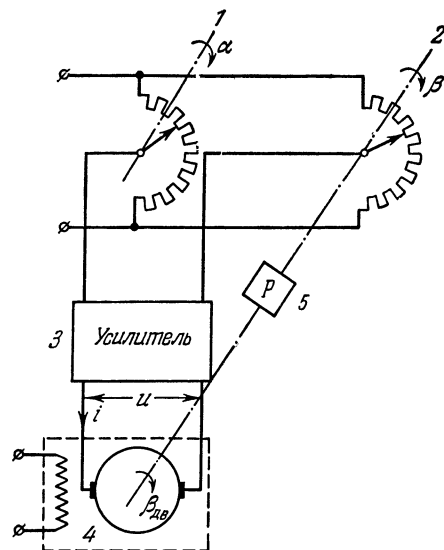


Рис. 6.22.

1 — задающая ось, 2 — охватываемая ось, 3 — усилитель, 4 — двигатель постоянного тока с независимым возбуждением и 5 — понижающий редуктор [188]. В качестве нелинейности будем учитывать насыщение в характеристике момента двигателя, зависящего от тока якоря (рис. 6.23).

Запишем уравнение моментов для электрического двигателя:

$$J\ddot{\beta} = c_1 i - c_2 \dot{\beta},$$

где J — приведенный к отработывающей оси момент инерции системы, i — ток в обмотке якоря двигателя, c_1 и c_2 — коэффициенты пропорциональности, получаемые из механической характеристики двигателя. В стандартной форме уравнение двигателя запишется в виде

$$(T_1 p + 1) p \beta = k_1 i, \quad (6.131)$$

где $T_1 = \frac{J}{c_2}$ — механическая постоянная времени двигателя, $k_1 = \frac{c_1}{c_2}$ — передаточное число двигателя.

Уравнение цепи усилителя будет

$$u = -k' \vartheta, \quad \vartheta = \beta - \alpha, \quad (6.132)$$

где k' — коэффициент усиления.

Для цепи якоря двигателя получаем:

$$(Lp + R) i = u - c_3 p \beta_{\text{дв}}, \quad (6.133)$$

где L и R — соответственно индуктивность и омическое сопротивление якоря, а $c_3 p \beta_{\text{дв}}$ — э. д. с., индуцированная в якоре.

Обозначив передаточное число редуктора через c_4 и подставив $\beta_{\text{дв}} = \frac{\beta}{c_4}$ в (6.133), с учетом (6.132) получим:

$$(T_2 p + 1) i = k_2 \alpha - (k_2 + k_3 p) \beta, \quad (6.134)$$

где $T_2 = \frac{L}{R}$ — электромагнитная постоянная времени двигателя,

$$k_2 = \frac{k'}{R}, \quad k_3 = \frac{c_3}{c_4 R}.$$

Уравнения (6.131) и (6.134) описывают движение следящей системы при значениях тока в якоре $i \leq b$ (рис. 6.23). При определенных значениях параметров возможна работа следящей системы при $i \geq b$, что приводит к автоколебаниям. Уравнения, описывающие движение следящей системы для этого случая, в соответствии с (6.131) и (6.134) будут:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) p \beta &= F(i) \quad \text{при} \quad i \geq b, \\ (T_2 p + 1) i &= k_2 \alpha - (k_2 + k_3 p) \beta, \end{aligned} \right\} \quad (6.135)$$

где $F(i)$ — нелинейная функция зависимости момента двигателя, приведенная к размерности скорости, от тока якоря.

При изменении задающего воздействия α с некоторой скоростью $p\alpha = \text{const}$ автоколебания будут несимметричными относительно равновесного состояния. Периодическое решение для входной величины нелинейного звена — тока якоря двигателя i — определим в синусоидальном виде с постоянной составляющей:

$$i = i^0 + A \sin \psi, \quad \psi = \Omega t.$$

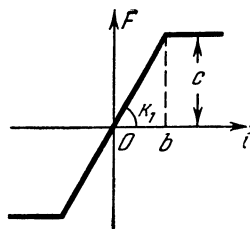


Рис. 6.23.

Гармоническая линеаризация нелинейной функции $F(i)$ дает

$$F(i) = F^0(A, i^0) + q(A, i^0) i^*, \quad (6.136)$$

где $i^* = i - i^0$ — периодическая составляющая искомого решения. В этом случае $\beta = \beta^0 + \beta^*$ при $p\beta^0 = \text{const}$.

Из (5.121) и (5.122) получаем значения постоянной составляющей и коэффициентов гармонической линеаризации для функции $F(i)$:

$$F^0(A, i^0) = \frac{k_1}{\pi} \left[A \left(\sqrt{1 - \frac{(b+i^0)^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b-i^0)^2}{A^2}} \right) + \right. \\ \left. + (b+i_0) \arcsin \frac{b+i^0}{A} - (b-i_0) \arcsin \frac{b-i^0}{A} \right] \quad (6.137) \\ \text{при } A \geq b + |i^0|,$$

$$q(A, i^0) = \frac{k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b-i^0}{A} + \arcsin \frac{b+i^0}{A} + \frac{b-i^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b-i^0)^2}{A^2}} + \right. \\ \left. + \frac{b+i^0}{A} \sqrt{1 - \frac{(b+i^0)^2}{A^2}} \right) \text{ при } A \geq b + |i^0|. \quad (6.138)$$

Будем предполагать, что задающее воздействие $\alpha(t)$ изменяется с постоянной скоростью $p\alpha = \text{const}$ (рис. 6.24, а) либо представляет

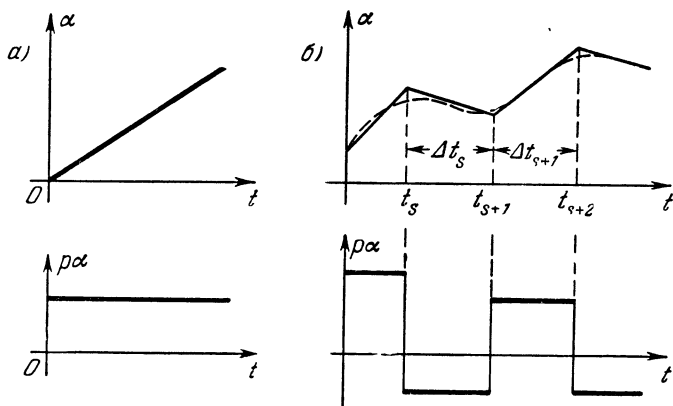


Рис. 6.24.

собой некоторую медленно изменяющуюся функцию, которая для практических расчетов может быть аппроксимирована отрезками ломаной (рис. 6.24, б). Во втором случае для отдельных участков времени решение задачи сводится к первому случаю равной скорости изменения задающего воздействия. Минимальная величина участков времени должна быть больше периода искомого периодического решения. Функция $p\alpha$ во втором случае кусочно-постоянна.

Таким образом, при замене внешнего воздействия кусочно-линейной функцией автоколебательный процесс на рассматриваемом интервале времени может быть представлен в виде последовательности квазистационарных процессов, продолжительность каждого из которых определяется временем Δt_{s+n} . При этом переход от одного квазистационарного режима к другому осуществляется как бы «мгновенно» на границе участков времени t_s, t_{s+1}, \dots, t_n . Внутри каждого участка времени величины A, Ω и i^0 принимаются постоянными.

Из уравнений (6.135) с учетом (6.136) получим гармонически линеаризованное уравнение для режима слежения с постоянной скоростью

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + k_3 q) p + k_2 q] i^* = k_2 (p\alpha - F^0). \quad (6.139)$$

Выполняя подстановку $p = j\Omega$ в характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (6.139), из условия равенства нулю вещественной и мнимой частей получим два уравнения. Третье уравнение получим как частное решение дифференциального уравнения (6.139) при $i^* = 0$ с учетом условия $p\alpha = \text{const}$. Указанные три уравнения для определения амплитуды и частоты периодического решения будут:

$$\left. \begin{aligned} k_2 q(A, i^0) - (T_1 + T_2) \Omega^2 &= 0, \\ 1 + k_3 q(A, i^0) - T_1 T_2 \Omega^2 &= 0, \\ p\alpha - F^0(A, i^0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.140)$$

Уравнения (6.140) позволяют определить амплитуду A , частоту Ω и смещение центра колебаний i^0 периодического решения для переменной i при заданных параметрах системы и величине скорости $p\alpha$ задатчика.

Исследование влияния параметров системы на амплитуду, частоту и смещение центра колебаний в данном случае проводить не будем, так как это удобно выполнить для симметричного режима при $p\alpha = 0$ и, следовательно, при $F^0(A, i^0) = 0$ и $i^0 = 0$. Подобные исследования проводились в главе IV.

В данной главе рассмотрим способ отыскания зависимостей амплитуды, частоты и смещения центра колебаний от величины скорости $p\alpha$ задатчика.

Из первых двух уравнений (6.140) видно, что при постоянных значениях параметров частота периодического решения будет постоянной и определится по формуле

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_2}{k_2 T_1 T_2 - k_3 (T_1 + T_2)}}. \quad (6.141)$$

Для определения A и i^0 исключим из первых двух уравнений (6.140) величину Ω^2 и, разрешая их относительно $q(A, i^0)$, получим:

$$q(A, i^0) = \frac{T_1 + T_2}{k T_1 T_2 - k_3 (T_1 + T_2)}. \quad (6.142)$$

Задавая значения A при различных постоянных значениях i^0 , построим по формуле (6.138) кривые $q(A)$ при $i^0 = \text{const}$ и в соответствии с (6.142) проведем прямую $q(A, i^0) = \text{const}$ (рис. 6.25). Точки пересечения кривых $q(A)$ с прямой дают значения амплитуды A в зависимости от смещения центра колебаний. Подставляя значения A и i^0 в формулу (6.137), определим, согласно (6.140), соответствующие

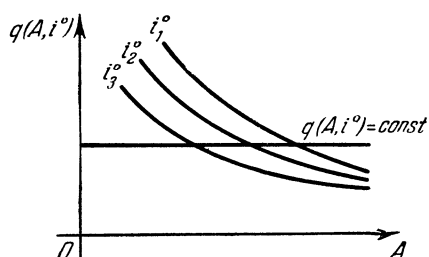


Рис. 6.25.

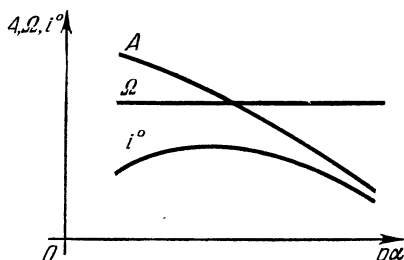


Рис. 6.26.

этим значениям скорости $p\alpha$ задатчика следящей системы. Таким образом решается задача определения зависимостей $A = A(p\alpha)$, $\Omega = \Omega(p\alpha)$ и $i^0 = i^0(p\alpha)$, которые могут быть представлены в виде некоторых кривых (рис. 6.26).

Практический интерес представляет отыскание смещения центра колебаний $\vartheta^0 = \beta - \alpha$ и амплитуды колебаний A_β для исполнительной оси, являющихся статической и периодической ошибками следящей системы. Для пересчета значения A в значения A_β необходимо воспользоваться вторым уравнением (6.135), из которого для периодических составляющих получается передаточная функция

$$W(p) = \frac{i^*}{\beta^*} = -\frac{k_2 + k_3 p}{T_2 p + 1}. \quad (6.143)$$

В соответствии с (6.135) для режима слежения с постоянной скоростью $p\alpha = p\beta = \text{const}$, получаем:

$$i^0 = -k_2 \vartheta^0 - k_3 p\alpha,$$

откуда получим формулу для установившейся статической ошибки по углу рассогласования ϑ :

$$\vartheta^0 = -\frac{k_3 p\alpha + i^0}{k_2}.$$

Для пересчета амплитуд периодического решения из (6.143) получим формулу

$$A_\beta = A \sqrt{\frac{T_2^2 \Omega^2 + 1}{k_2^2 + k_3^2 \Omega^2}}.$$

В результате получим кривые изменения статической и периодической ошибок следящей системы в зависимости от скорости слежения при автоколебательном режиме работы.

Для доказательства устойчивости периодического решения можно применить приближенный критерий устойчивости

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0.$$

Производные, входящие в неравенство критерия, определим из выражений:

$$\begin{aligned} X(a, \omega) &= k_2 q - (T_1 + T_2) \omega^2, \\ Y(a, \omega) &= (1 + k_3 q) \omega - T_1 T_2 \omega^3, \end{aligned}$$

соответствующих уравнению (6.139).

Выполняя вычисление производных, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* &= k_2 \left(\frac{dq}{da}\right)^*, & \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -2(T_1 + T_2) \Omega, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= k_3 \left(\frac{dq}{da}\right)^* \Omega, & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* &= 1 + k_3 q - 3T_1 T_2 \Omega^2. \end{aligned}$$

Так как из второго уравнения (6.140)

$$1 + k_3 q = T_1 T_2 \Omega^2,$$

то

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* = -2T_1 T_2 \Omega^2.$$

Подставляя значения производных в левую часть неравенства критерия, получаем:

$$-2 \left(\frac{dq}{da}\right)^* \Omega^2 [k_2 T_1 T_2 - k_3 (T_1 + T_2)].$$

Из (6.141) следует:

$$k_2 T_1 T_2 - k_3 (T_1 + T_2) = \frac{k_2}{\Omega^2}.$$

Учитывая знак производной $\left(\frac{dq}{da}\right)^*$ (см. рис. 3.7), получаем, что критерий устойчивости периодического решения выполняется:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* = -2k_2 \left(\frac{dq}{da}\right)^* > 0.$$

Таким образом, полученное периодическое решение устойчиво, т. е. система при $i \geq b + |i^0|$ и $p\alpha = \text{const}$ имеет автоколебательный установившийся режим.

§ 6.8. Система с несимметричной нелинейностью при внешнем воздействии

Приведем исследование нелинейной системы автоматического регулирования с запаздыванием, выполненное М. В. Стариковой [179]. В этой задаче определяется влияние параметров системы и медленно меняющегося возмущающего воздействия на амплитуду и частоту автоколебаний, а также зависимость границы устойчивости системы от постоянного внешнего воздействия.

Рассматриваемая система представлена структурной схемой (рис. 6.27, а, б), где 1 — регулируемый объект, 2 — чувствительный

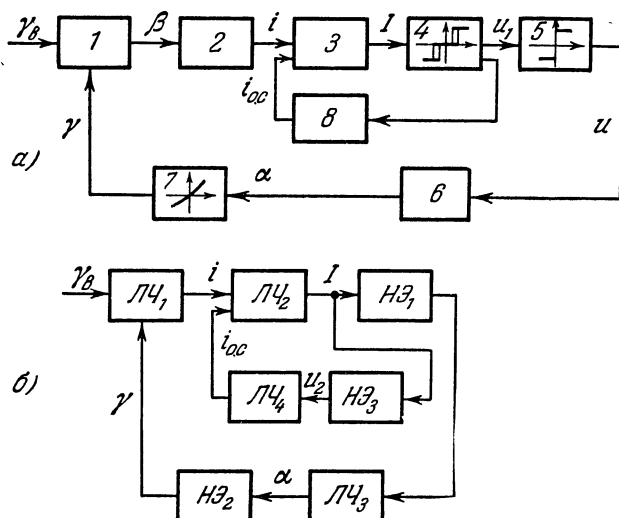


Рис. 6.27.

элемент, 3 — магнитный усилитель, 4 — управляющее реле, 5 — силовое реле, 6 — исполнительный механизм, 7 — регулирующий орган, 8 — звено обратной связи. Объединяя некоторые звенья, систему можно представить структурной схемой, показанной на рис. 6.27, б.

Динамика процесса в системе описывается следующими уравнениями звеньев.

Уравнение регулируемого объекта:

$$(d_1 p^2 + d_2 p + d_3) \beta = (c_1 p + c_2) (\gamma_b - \gamma), \quad (6.144)$$

где γ_b — возмущающее воздействие, γ — регулирующее воздействие, β — отклонение регулируемой величины, d_1, d_2, d_3, c_1, c_2 — постоянные коэффициенты.

Уравнение чувствительного элемента:

$$(T_1 p + 1)i = k_1 \beta, \quad (6.145)$$

где i — выходная величина чувствительного элемента, T_1 — постоянная времени чувствительного элемента, k_1 — передаточное число.

Уравнение магнитного усилителя:

$$(T_2 p + 1)l = k_2 i - k_3 i_{o.c.}, \quad (6.146)$$

где l — выходной ток усилителя, T_2 — постоянная времени усилителя, k_2 — коэффициент усиления по току, k_3 — коэффициент обратной связи.

Управляющее и силовое реле имеют нелинейную характеристику (рис. 6.28, а), представляющую нелинейную функцию $F_1(I)$, где

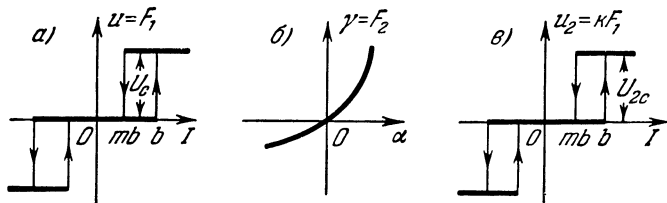


Рис. 6.28.

U_c — напряжение питания обмоток двигателя, подключаемого с помощью исполнительного реле.

Уравнение исполнительного механизма (двигателя):

$$(T_3 p + 1) p \alpha = k_4 e^{-\tau p} u, \quad u = F_1(I), \quad (6.147)$$

где $k_4 = \frac{V}{U_c}$, причем V — установившаяся скорость исполнительного механизма, U_c — постоянное напряжение питания, выключаемое с помощью реле, τ — запаздывание в исполнительном механизме и силовом реле, T_3 — постоянная времени исполнительного механизма, α — угол поворота регулирующего органа.

Уравнение регулирующего органа как нелинейного звена имеет вид

$$\gamma = r_1 \alpha^2 + r_2 \alpha = F_2(\alpha), \quad (6.148)$$

где r_1 , r_2 — коэффициенты, определяемые параметрами регулирующего органа. Статическая характеристика регулирующего органа представлена на рис. 6.28, б.

Уравнение обратной связи с нелинейным звеном (рис. 6.28, в):

$$i_{o.c.} = k_{o.c.} u_2, \quad u_2 = k F_1(I), \quad k = \frac{U_{2c}}{U_c}. \quad (6.149)$$

Статическая характеристика нелинейного звена $H\mathcal{E}_3$ представлена на рис. 6.28, в.

В исследуемой системе периодическое решение будет несимметричным (с постоянной составляющей), так как имеется несимметричная

статическая характеристика $F_2(\alpha)$. Будем определять решение для переменной I в виде

$$I = I^0 + A_1 \sin \psi, \quad \psi = \Omega t$$

и для переменной α в виде

$$\alpha = \alpha^0 + A_2 \sin(\psi + \varphi), \quad \psi = \Omega t.$$

Гармоническая линеаризация нелинейной функции $F_1(I)$ сводится к замене ее соотношением

$$F_1(I) = F_1^0(A, I^0) + \left[q_1(A, I^0) + \frac{q_1'(A, I^0)}{\Omega} p \right] I^*, \quad (6.150)$$

где $I^* = I - I^0$ — периодическая составляющая искомого решения. Постоянная составляющая и коэффициенты гармонической линеаризации в соответствии с (5.89) — (5.91) будут:

$$\left. \begin{aligned} F_1^0 &= \frac{U_c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{b + I^0}{A_1} - \arcsin \frac{b - I^0}{A_1} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin \frac{mb + I^0}{A_1} - \arcsin \frac{mb - I^0}{A_1} \right), \\ q_1 &= \frac{U_c}{\pi A_1} \left[\sqrt{1 - \frac{(b + I^0)^2}{A_1^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b - I^0)^2}{A_1^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - \frac{(mb + I^0)^2}{A_1^2}} + \sqrt{1 - \frac{(mb - I^0)^2}{A_1^2}} \right], \\ q_1' &= -\frac{2U_c b}{\pi A_1^2} (1 - m) \text{ при } A \geq b + |I^0|. \end{aligned} \right\} \quad (6.151)$$

Гармоническая линеаризация нелинейной функции $F_2(\alpha)$ дает

$$F_2(\alpha) = F_2^0(A_2, \alpha^0) + q_2(A_2, \alpha^0) \alpha^*, \quad (6.152)$$

где постоянная составляющая и коэффициент гармонической линеаризации в соответствии с (6.148) имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} F_2^0 &= r_1 \left[(\alpha^0)^2 + \frac{A_2^2}{2} \right] + r_2 \alpha^0, \\ q_2 &= 2r_1 \alpha^0 + r_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.153)$$

По гармонически линеаризованным уравнениям составляем характеристическое уравнение и применяем линейные методы исследования. Выделив у всех переменных величин постоянные и периодические составляющие, т. е. представив их в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma^0 + \gamma^*, & i &= i^0 + i^*, & u &= u^0 + u^*, \\ i_{0,c} &= i_{0,c}^0 + i_{0,c}^*, & \alpha &= \alpha^0 + \alpha^*, & I &= I^0 + I^*, \end{aligned}$$

получим уравнения для постоянных составляющих при наличии постоянного возмущающего воздействия γ_b :

$$\left. \begin{aligned} d_3 i^0 &= k_1 c_2 (\gamma_b - \gamma^0), \quad I^0 = k_2 i^0 - k_3 i_{0.c}^0, \\ u^0 &= F_1^0(A_1, I^0), \quad 0 = k_4 u^0, \quad \gamma^0 = F_2^0(A_2, \alpha^0), \quad u_2^0 = k F_1^0(A_1, I^0), \\ i_{0.c}^0 &= k_{0.c} k F_1^0(A_1, I_0) \end{aligned} \right\} \quad (6.154)$$

и уравнения для периодических составляющих:

$$\left. \begin{aligned} (d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1) i^* &= -k_1(c_1 p + c_2) \gamma^*, \\ (T_2 p + 1) I^* &= k_2 i^* - k_3 i_{0.c}^*, \quad (T_3 p + 1) p x^* = k_4 e^{-\tau p} u^*, \\ u^* &= \left[q_1(A_1, I^0) + \frac{q_1'(A_1, I^0)}{\Omega} p \right] I^*, \\ \gamma^* &= q_2(A_2, \alpha^0) \alpha^*, \quad i_{0.c}^* = k_{0.c} k u^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.155)$$

В этих уравнениях F_1^0 , q_1 , q_1' берутся из формул (6.151). Объединяя уравнения (6.155) и подставляя значения q_2 , напомним характеристическое уравнение системы:

$$\begin{aligned} &(d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) p + \\ &+ (c_1 p + c_2) k_1 k_2 k_4 e^{-\tau p} \left[q_1(A_1, I^0) + \frac{q_1'(A_1, I^0)}{\Omega} p \right] (2r_1 \alpha^0 + r_2) + \\ &+ k k_{0.c} k_3 (d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1)(T_3 p + 1) p \times \\ &\times \left[q_1(A_1, I^0) + \frac{q_1'(A_1, I^0)}{\Omega} p \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Из уравнений (6.154) и (6.151) для постоянных составляющих получим:

$$\begin{aligned} u^0 &= 0, \quad u_2^0 = 0, \quad F_1^0(A_1, I^0) = 0, \quad I^0 = 0, \quad i_{0.c}^0 = 0, \quad i^0 = 0, \\ \gamma_b - \gamma^0 &= 0, \quad F_2^0(A_2, \alpha^0) = \gamma_b. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения согласно (6.153) находим α^0 при постоянном внешнем воздействии γ_b :

$$\alpha^0 = \frac{-r_2 + \sqrt{r_2^2 - 4r_1 \left(\frac{1}{2} r_1 A_2^2 - \gamma_b \right)}}{2r_1}. \quad (6.157)$$

Перед корнем взят знак плюс, так как $A_2 = 0$, $\alpha^0 = 0$ при $\gamma_b = 0$.

Связь между амплитудами A_1 и A_2 получим из соответствующих уравнений (6.155):

$$A_2 = \frac{A_1 k_4}{\Omega \sqrt{T_3^2 \Omega^2 + 1}} \sqrt{q_1^2(A_1) + [q_1'(A_1)]^2}. \quad (6.158)$$

Выражение $L(j\Omega)$ для характеристической кривой получим, подставив в уравнение (6.156) $p=j\Omega$ и выделив действительную и мнимую части:

$$L(j\Omega) = X(A_1, \Omega, \alpha^0) + jY(A_1, \Omega, \alpha^0). \quad (6.159)$$

Амплитуда A_1 и частота Ω периодического решения определяются из условия $L(j\Omega) = 0$, что дает уравнения

$$X(A_1, \Omega, \alpha^0) = 0, \quad Y(A_1, \Omega, \alpha^0) = 0, \quad (6.160)$$

к которым присоединяется формула (6.157).

Для определения автоколебаний в системе при заданных параметрах представим левые части уравнений (6.160) в виде

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1(\Omega) + X_2(A_1, \Omega, \alpha^0) + k_{o.c} X_3(A_1, \Omega), \\ Y &= Y_1(\Omega) + Y_2(A_1, \Omega, \alpha^0) + k_{o.c} Y_3(A_1, \Omega), \end{aligned} \right\} \quad (6.161)$$

где

$$X_1(\Omega) = -T_1 T_2 T_3 d_1 \Omega^6 + [(T_1 + T_2 + T_3) d_1 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) d_2 + T_1 T_2 T_3 d_3] \Omega^4 - [(T_1 + T_2 + T_3) d_3 + d_2] \Omega^2,$$

$$Y_1(\Omega) = [(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) d_1 + T_1 T_2 T_3 d_2] \Omega^5 - [d_1 + (T_1 + T_2 + T_3) d_2 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) d_3] \Omega^3 + d_3 \Omega,$$

$$X_2(A_1, \Omega, \alpha^0) = k_1 k_2 k_4 (2r_1 \alpha^0 + r_2) \{ [q_1(A_1) \cos \Omega \tau + q'_1(A_1) \sin \Omega \tau] c_2 - [q'_1(A_1) \cos \Omega \tau - q_1(A_1) \sin \Omega \tau] c_1 \Omega \},$$

$$Y_2(A_1, \Omega, \alpha^0) = k_1 k_2 k_4 (2r_1 \alpha^0 + r_2) \{ [q_1(A_1) \cos \Omega \tau + q'_1(A_1) \sin \Omega \tau] c_1 \Omega + [q'_1(A_1) \cos \Omega \tau - q_1(A_1) \sin \Omega \tau] c_2 \},$$

$$X_3(A_1, \Omega) = k k_3 q'_1(A_1) \{ -d_1 T_1 T_3 \Omega^5 + [d_3 T_1 T_3 + d_2 (T_1 + T_2) + d_1] \Omega^3 - d_3 \Omega \} + k k_3 q_1(A_1) \{ [d_2 T_1 T_3 + d_1 (T_1 + T_3)] \Omega^4 - [d_3 (T_1 + T_3) + d_2] \Omega^2 \},$$

$$Y_3(A_1, \Omega) = k k_3 q_1(A_1) \{ d_1 T_1 T_3 \Omega^5 - [d_3 T_1 T_3 + d_2 (T_1 + T_2) + d_1] \Omega^3 + d_3 \Omega \} + k k_3 q'_1(A_1) \{ [d_2 T_1 T_3 + d_1 (T_1 + T_3)] \Omega^4 - [d_3 (T_1 + T_3) + d_2] \Omega^2 \}.$$

При оценке же влияния какого-либо параметра системы z будем записывать уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} X &= X^{(1)}(A_1, \Omega, \alpha^0) + X^{(2)}(A_1, \Omega, \alpha^0, z), \\ Y &= Y^{(1)}(A_1, \Omega, \alpha^0) + Y^{(2)}(A_1, \Omega, \alpha^0, z). \end{aligned} \right\} \quad (6.162)$$

Во многих случаях можно записать:

$$\begin{aligned} X &= X^{(1)}(A_1, \Omega, \alpha^0) + z X^{(2)}(A_1, \Omega, \alpha^0), \\ Y &= Y^{(1)}(A_1, \Omega, \alpha^0) + z Y^{(2)}(A_1, \Omega, \alpha^0). \end{aligned}$$

Из-за сложности уравнений системы получить в явном виде зависимости A_1 и Ω от параметров системы крайне трудно или невозможно. Поэтому воспользуемся графоаналитическим способом определения A_1 и Ω . Задавая различные числовые значения A_1 , построим на комплексной плоскости (X, jY) кривые $L(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ при $A_1 = \text{const}$, $z = \text{const}$, а затем при помощи интерполяции найдем искомое значение A_1 , при котором $L(j\omega)$ проходит через начало координат, и искомое Ω в начале координат (рис. 6.29, а). Выделение параметра z в (6.162) позволяет подобрать значения A_1 и Ω так, чтобы величины (6.162) были достаточно близки к нулю. Поэтому построение характеристических кривых удастся ограничить областью, близкой к началу координат.

Устойчивость периодического решения определяется приближенно известным способом (см. стр. 125) при помощи характеристической кривой $L(j\omega)$, которая построена на рис 6.29, б.

Найдем теперь область устойчивости равновесия системы при отсутствии автоколебаний. Значение параметра z , обеспечивающего отсутствие автоколебаний и устойчивое положение равновесия, определим следующим образом. Подберем граничное значение $z = z^*$ при всех заданных остальных параметрах так, чтобы при $z = z^*$ кривая $L(j\omega)$ пересекла начало координат при $A_1 = b$, охватывая $(n-1)$ квадрантов. При этом необходимо, чтобы для всех $A_1 > b$ кривая $L(j\omega)$ охватывала бы начало координат, проходя n квадрантов, что соответствует затуханию колебаний. Амплитуда же автоколебаний $A_1 < b$ невозможна, и система приходит в устойчивое положение равновесия внутри зоны нечувствительности b (рис. 6.29, в).

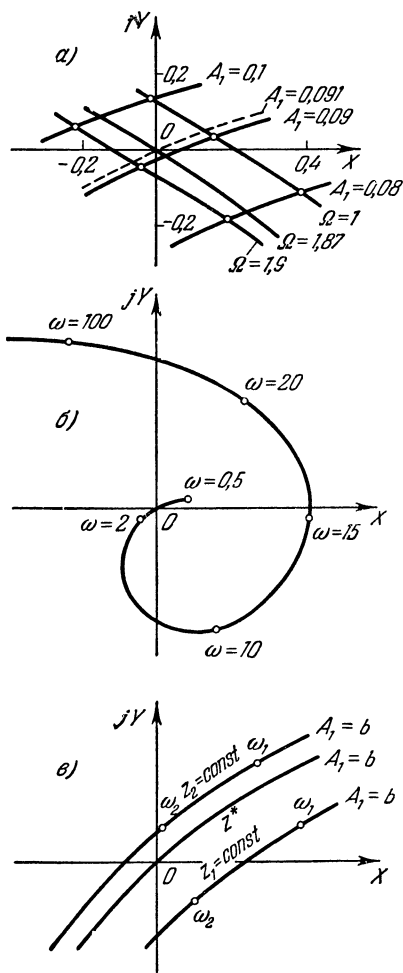


Рис. 6.29.

Автоколебания в системе без обратной связи. Для определения влияния параметров системы на A_1 и Ω рассмотрим систему без обратной связи.

Положив в уравнениях (6.157), (6.160) и (6.161) $\gamma_b = 0$ и $k_{o.c} = 0$, найдем параметры автоколебаний в системе при следующих значениях коэффициентов уравнений:

$$\begin{aligned} d_1 &= 2,6 \cdot 10^{-3}, & d_2 &= 0,1, & d_3 &= 1,0, & c_1 &= 87, \\ k_2 &= 20, & V &= 10 \text{ град/сек}, & c_2 &= 9,8 \cdot 10^3, & k_1 k_2 &= 2,3, \\ k_3 &= 0,4, & T_1 &= 0,08 \text{ сек}, & T_2 &= T_3 = 0,2 \text{ сек}, & \tau &= 0,4 \text{ сек}, & r_2 &= 0,3. \end{aligned}$$

Описанным графоаналитическим способом было определено влияние различных параметров на автоколебания. На рис. 6.30 приведены

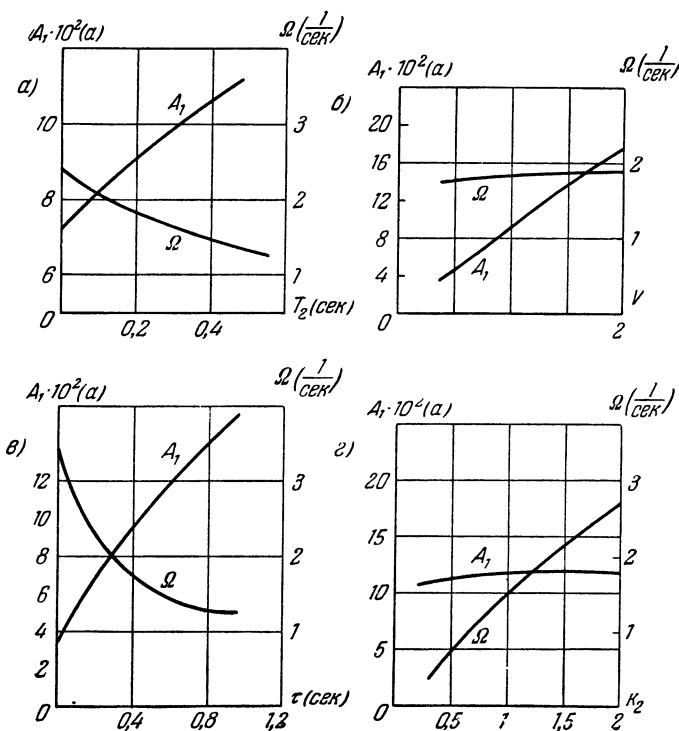


Рис. 6.30.

полученные результаты в виде зависимости частоты Ω и амплитуды A_1 автоколебаний от: а — постоянной времени T_2 , б — установившейся скорости V , в — запаздывания τ и г — коэффициента усиления k_2 . Из графиков видно, что наиболее существенно на снижение амплитуды автоколебаний влияют k_2 , V и τ . Однако в подобной системе

изменением отдельных параметров подавить автоколебания без введения обратной связи не удастся.

Автоколебания и устойчивость системы с обратной связью без возмущающего воздействия. Обратная связь включается и отключается управляющим реле, которое одновременно передает

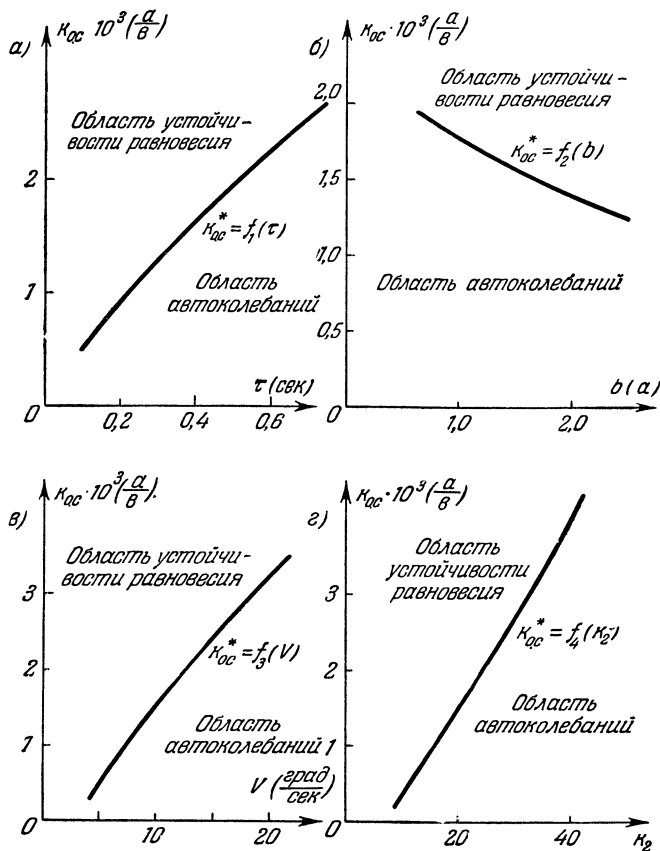


Рис. 6.31.

также сигнал на силовое реле и исполнительный механизм (второй парой контактов силового реле). Напряжение обратной связи вычисляется из напряжения сигнала отклонения регулируемой величины в усилителе. Для исследования автоколебаний используем уравнения (6.161), (6.158), (6.157) при $\gamma_b = 0$. Периодическое решение имеет место, если

$$\left. \begin{aligned} X_1(\Omega) + X_2(A_1, \Omega, \alpha^0) &= -k_{o.c} X_3(A_1, \Omega), \\ Y_1(\Omega) + Y_2(A_1, \Omega, \alpha^0) &= -k_{o.c} Y_3(A_1, \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (6.163)$$

Описанным выше способом определяются зависимости граничного коэффициента обратной связи от каждого параметра системы, т. е. находится граница устойчивости по различным параметрам системы. Построим, например, границу устойчивости $k_{0,c}^* = f(\tau)$, представив уравнения (6.163) в виде

$$X_1(\Omega) + X_2(A_1, \Omega, \alpha^0, \tau) = -k_{0,c} X_3(A_1, \Omega),$$

$$Y_1(\Omega) + Y_2(A_1, \Omega, \alpha^0, \tau) = -k_{0,c} Y_3(A_1, \Omega).$$

Граница устойчивости $k_{0,c}^* = f(\tau)$ изображена на рис. 6.31, а. Аналогично построены границы устойчивости на плоскостях параметров $k_{0,c}$, b (рис. 6.31, б) $k_{0,c}$, V (рис. 6.31, в) и $k_{0,c}$, k_2 (рис. 6.31, г). Исключив $k_{0,c}$, с помощью этих графиков можно построить области устойчивости для любой комбинации двух параметров системы $k_{0,c}$.

Автоколебания и качество процесса регулирования в системе при постоянном или медленно меняющемся внешнем воздействии. При наличии постоянного или медленно меняющегося возмущающего воздействия γ_v , которое можно считать постоянным за период автоколебаний, характеристическое уравнение, определяющее периодическое решение, остается прежним. От величины γ_v зависит только α^0 (см. (6.157)). При помощи разработанной методики, используя уравнения (6.157), (6.158) и (6.160), можно определить зависимость амплитуды A_1 и частоты Ω автоколебаний от γ_v . Результат решения приведен на рис. 6.32, а.

При наличии медленно меняющегося воздействия γ_v , скоростью изменения которого пренебрегать нельзя, нужно учитывать медленно меняющиеся составляющие в уравнениях всех звеньев (6.144)–(6.149), в которых сделана следующая замена нелинейных функций:

$$u = F_1^0(A_1, I^0), \quad \gamma = F_2^0(A_2, \alpha^0), \quad u_2 = kF_1^0(A_1, I^0), \quad (6.164)$$

где величины I^0 , α^0 нужно считать медленно меняющимися во времени. Так как зависимости $u(I^0)$, $\gamma(\alpha^0)$, $u_2 I^0$, задаваемые формулами (6.164) для медленно меняющихся I^0 , α^0 , изображаются плавными кривыми, проходящими через начало координат, их можно линеаризовать (см. § 5.3) по формулам:

$$u = \left(\frac{\partial F_1^0}{\partial I^0} \right)_{I^0=0} I^0, \quad \gamma = \left(\frac{\partial F_2^0}{\partial \alpha^0} \right)_{\alpha^0=0} \alpha^0, \quad u_2 = k \left(\frac{\partial F_1^0}{\partial I^0} \right)_{I^0=0} I^0. \quad (6.165)$$

Тогда все медленно меняющиеся составляющие при заданном $\gamma_v(t)$ будут определяться системой линейных уравнений. По ним обычными методами линейной теории регулирования можно определить качество процесса регулирования в системе при медленно меняющемся возмущающем воздействии $\gamma_v(t)$. Автоколебания определяются при этом изложенным выше способом. Поскольку медленно меняющаяся составляющая $I^0(t)$, от которой зависят автоколебания, уже определена,

то в результате получится также медленное изменение амплитуды $A(t)$ и частоты $\Omega(t)$ автоколебаний, соответствующее заданному $\gamma_v(t)$.

Устойчивость системы при постоянном внешнем воздействии. При несимметричной нелинейной характеристике с изменением величины γ_v изменяются величина α^0 , постоянная составляющая F_2^0 и коэффициент q_2 . Для определения зависимости положения границы

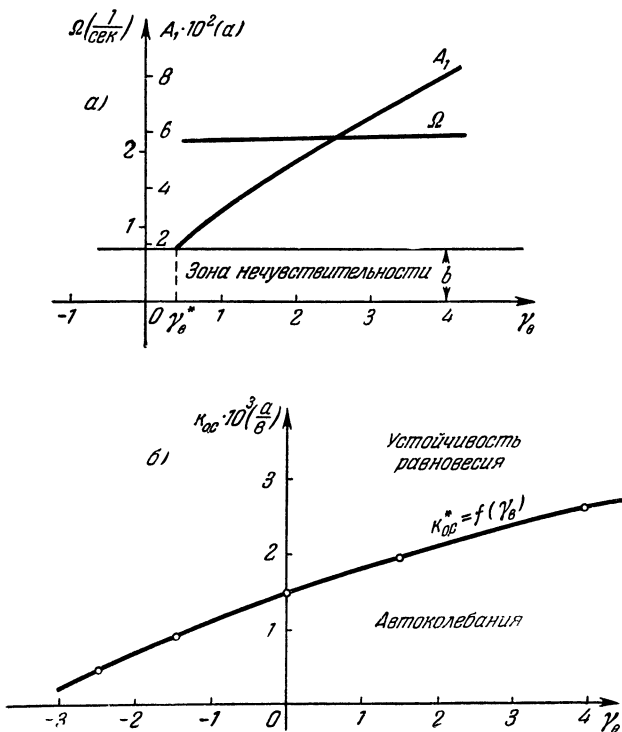


Рис. 6.32.

устойчивости системы по параметру $k_{0.с}$ от величины постоянного внешнего воздействия γ_v используем методику определения z^* , описанную выше. Результат представлен на рис. 6.32, б. Легко построить границу устойчивости и по другим параметрам и найти смещение границы устойчивости на плоскости параметров при изменении γ_v . На практике очень важно учитывать найденное смещение границы устойчивости нелинейной системы с изменением величины внешнего воздействия γ_v . Такое специфическое явление не имеет места в линейных системах. Полученные результаты достаточно хорошо подтверждаются при решении исходных нелинейных уравнений на электронной моделирующей установке.

§ 6.9. Сглаживание релейной характеристики при помощи автоколебаний

Пусть в автоматической системе, выполненной по схеме, показанной на рис. 6.33, а, нелинейностью является трехпозиционное реле с зоной нечувствительности, характеристика которого

$$F = F(x) \quad (6.166)$$

изображена на рис. 6.33, б. Временное запаздывание в реле отнесено к линейной части 1.

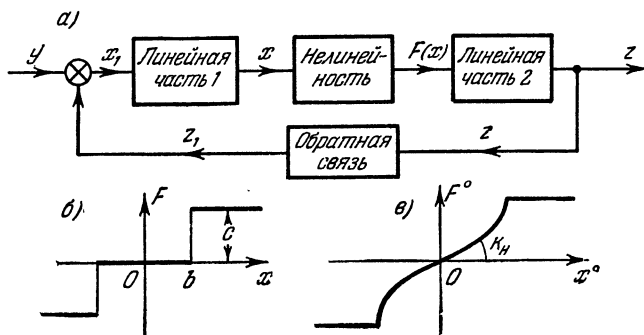


Рис. 6.33.

Линейная часть 1 описывается уравнением

$$x(t) = k_1 x_1(t - \tau) \quad \text{или} \quad x = k_1 e^{-\tau p} x_1. \quad (6.167)$$

Уравнение линейной части 2 имеет вид

$$(T_2 p + 1) p z = k_2 F, \quad (6.168)$$

а обратной связи

$$(T_0 p + 1) z_1 = k_0 z, \quad (6.169)$$

причем

$$x_1 = y - z_1. \quad (6.170)$$

Требуется найти автоколебания в системе сначала при отсутствии внешнего воздействия ($y = 0$), а затем определить сглаженную характеристику реле для медленно меняющейся составляющей и изменение амплитуды автоколебаний в зависимости от нее при наличии внешнего воздействия ($y \neq 0$) [187].

При отсутствии внешнего воздействия ($y = 0$) уравнение системы, согласно (6.166) — (6.170), будет

$$Q(p) x + R(p) F(x) = 0, \quad (6.171)$$

где

$$Q(p) = (T_0 p + 1)(T_2 p + 1)p, \quad R(p) = k e^{-\tau p}, \quad k = k_1 k_2 k_0. \quad (6.172)$$

Гармоническая линейризация заданной нелинейности (рис. 6.33, б) дает

$$F(x) = qx, \quad (6.173)$$

где, согласно (3.13):

$$q = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}. \quad (6.174)$$

При этом характеристическое уравнение, соответствующее (6.171), будет

$$T_0 T_2 p^3 + (T_0 + T_2) p^2 + p + k q e^{-\tau p} = 0. \quad (6.175)$$

Подставив $p = j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части с использованием выражения $e^{-j\tau\Omega} = \cos \tau\Omega - j \sin \tau\Omega$, получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X &= kq \cos \tau\Omega - (T_0 + T_2) \Omega^2 = 0, \\ Y &= \Omega - kq \sin \tau\Omega - T_0 T_2 \Omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.176)$$

Допустим, что заданы величины постоянной времени T_2 линейной части 2 (например, двигателя) и запаздывания τ в срабатывании реле,

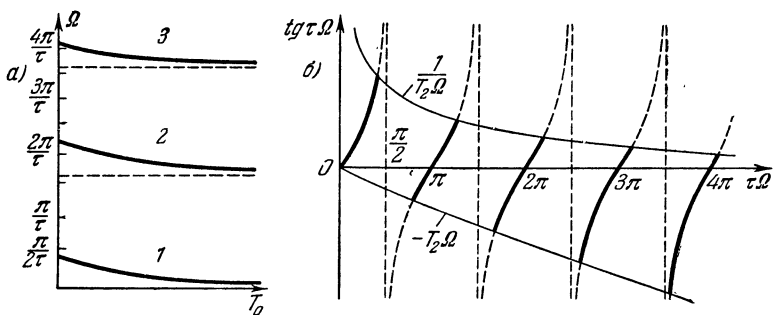


Рис. 6.34.

а требуется произвести выбор величин постоянной времени обратной связи T_0 и общего коэффициента усиления цепи линейных звеньев $k = k_1 k_2 k_0$. Разрешаем уравнения (6.176) относительно этих параметров:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \frac{1 - T_2 \Omega \operatorname{tg} \tau \Omega}{\Omega (T_2 \Omega + \operatorname{tg} \tau \Omega)}, \\ k &= \frac{(T_0 + T_2) \Omega^2}{q \cos \tau \Omega} = \frac{\Omega (1 + T_2^2 \Omega^2)}{q (T_2 \Omega + \operatorname{tg} \tau \Omega) \cos \tau \Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (6.177)$$

По первой формуле, задаваясь различными значениями Ω и вычисляя каждый раз T_0 , получаем зависимость частоты периодического решения Ω от постоянной T_0 (рис. 6.34, а). При этом задаваться

следует такими значениями Ω , которые приводят к положительным значениям T_0 и k . Графическое определение интервалов этих значений, вытекающее из (6.177), показано на рис. 6.34, б.

Каждому значению T_0 соответствует в каждом интервале, согласно первому уравнению (6.177), определенная частота периодического решения Ω , которая не зависит от коэффициента усиления k . Поэтому при любом заданном значении T_0 вторая формула (6.177) дает

$$k = \frac{C}{q}, \quad \text{где} \quad C = \frac{(T_0 + T_2) \Omega^3}{\cos \tau \Omega}. \quad (6.178)$$

Очевидно, что значение C будет различным для разных интервалов Ω , причем следует брать $\cos \tau \Omega > 0$.

Поскольку $q\left(\frac{A}{b}\right)$, согласно (6.174), имеет вид, показанный на рис. 6.35, а, то зависимость амплитуды периодического решения A

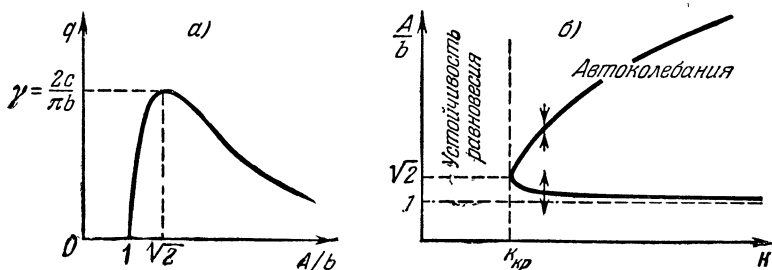


Рис. 6.35.

от коэффициента усиления k получит форму рис. 6.35, б, где изображен график $\frac{A}{b}(k)$ только для нижнего интервала частот (кривая 1 на рис. 6.34, а). Для остальных интервалов он расположится на рис. 6.35, б значительно правее и не будет иметь практического смысла.

Значение $k_{кр}$ (рис. 6.35, б) соответствует точке $q_{\max} = \gamma = \frac{2c}{\pi b}$ (рис. 6.35, а), а именно:

$$k_{кр} = \frac{(T_0 + T_2) \Omega^3}{\gamma \cos \tau \Omega}. \quad (6.179)$$

Коэффициент γ можно назвать коэффициентом формы нелинейности.

Из полученных двух ветвей амплитуд периодического решения надо выделить устойчивую. Для этого путем подстановки в характеристическое уравнение (6.175) величины $p = j\omega$ получаем:

$$X = kq \cos \tau \omega - (T_0 + T_2) \omega^3, \quad Y = \omega - kq \sin \tau \omega - T_0 T_2 \omega^3.$$

Найдем частные производные от X и Y по a и ω :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* &= k \cos \tau \Omega \left(\frac{dq}{da}\right)^*, & \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -kq\tau \sin \tau \Omega - 2(T_0 + T_2) \Omega, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= -k \sin \tau \Omega \left(\frac{dq}{da}\right)^*, & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* &= 1 - kq\tau \cos \tau \Omega - 3T_0 T_2 \Omega^2.\end{aligned}$$

Левая часть выражения

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* > 0,$$

определяющего устойчивость найденного периодического решения, при этом принимает вид

$$k \left(\frac{dq}{da}\right)^* [(1 - 3T_0 T_2 \Omega^2) \cos \tau \Omega - kq\tau - 2(T_0 + T_2) \Omega \sin \tau \Omega].$$

Но, согласно (6.176):

$$\cos \tau \Omega = \frac{(T_0 + T_2) \Omega^2}{kq}, \quad \sin \tau \Omega = \frac{1 - T_0 T_2 \Omega^2}{kq} \Omega.$$

С учетом этого предыдущее выражение дает

$$k \left(\frac{dq}{da}\right)^* \left[-kq\tau - \frac{(T_0 + T_2) \Omega^2}{kq} (1 + T_0 T_2 \Omega^2) \right].$$

Квадратная скобка здесь отрицательна, а из рис. 6.35, a видно, что

$$\begin{aligned}\left(\frac{dq}{da}\right)^* &> 0 \quad \text{при} \quad 1 < \frac{A}{b} < \sqrt{2}, \\ \left(\frac{dq}{da}\right)^* &< 0 \quad \text{при} \quad \frac{A}{b} > \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что критерий устойчивости периодического решения удовлетворяется только при $\frac{A}{b} > \sqrt{2}$. Следовательно, только верхняя ветвь на рис. 6.35, b соответствует автоколебаниям (устойчивое периодическое решение), которые имеют место при $k > k_{\text{кр}}$. Наличие неустойчивого периодического решения с меньшей амплитудой говорит о том, что здесь имеет место жесткое возбуждение автоколебаний. Заметим, что при $k < k_{\text{кр}}$ равновесное состояние системы оказывается устойчивым при любых начальных условиях.

Здесь получена величина амплитуды автоколебаний A для переменной x . Определим теперь амплитуду автоколебаний выходной величины z данной системы (рис. 6.33, a). Из схемы видно, что от переменной x можно перейти к z через передаточные функции линейной части I и обратной связи. Поэтому амплитуда автоколебаний A_z выходной величины z будет

$$A_z = \frac{A}{k_1 k_0} \sqrt{T_0^2 \Omega^2 + 1}. \quad (6.180)$$

Таким образом, все полученные для A результаты здесь и далее легко пересчитываются для A_z .

Итак, рис. 6.35, б дает картину зависимости амплитуды автоколебаний от коэффициента усиления при одном значении T_0 . Если же T_0 увеличивать, то, согласно рис. 6.34, будет уменьшаться Ω , а значит, будет уменьшаться и коэффициент C (см. (6.178)), вследствие чего график $A(k)$ будет сдвигаться влево (рис. 6.36), причем чем больше T_0 , тем быстрее будут расти амплитуды автоколебаний.

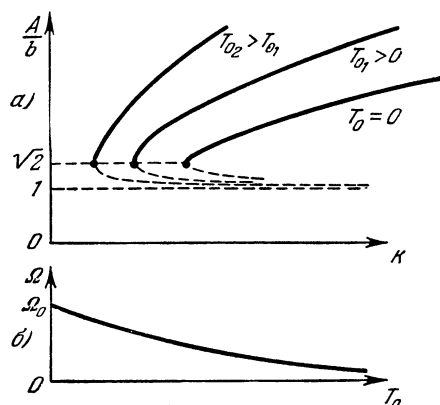


Рис. 6.36.

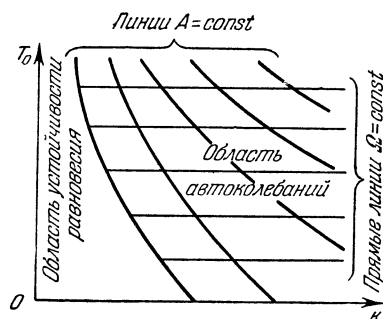


Рис. 6.37.

Следовательно, графики рис. 6.36 дают полное представление о том, как изменяются амплитуда A и частота Ω автоколебаний при изменении двух параметров системы: k и T_0 .

Два графика рис. 6.36 можно соединить в один (рис. 6.37), в результате чего выделяется область устойчивости равновесного состояния системы на плоскости двух параметров, а в области автоколебаний наносятся линии одинаковых значений частоты ($\Omega = \text{const}$) и линии одинаковых значений амплитуды ($A = \text{const}$).

На основании полученных диаграмм (рис. 6.36 или 6.37) можно выбрать наилучшие значения параметров системы T_0 и k , обеспечивающие желательные значения амплитуды A и частоты Ω автоколебаний.

От формы нелинейности зависит положение линий $A = \text{const}$, т. е. величина амплитуды и ширина области устойчивости равновесия. Последняя, согласно (6.179), обратно пропорциональна коэффициенту формы нелинейности $\gamma = \frac{2c}{\pi b}$.

Перейдем теперь к определению *сглаженной характеристики нелинейного звена* (реле) для медленно меняющейся средней составляющей. Поскольку она считается постоянной за период колебаний, гармоническая линеаризация нелинейности проводится с учетом средней составляющей по формулам (5.99) и (5.100).

Рассмотрим отдельно два случая:

1) в процессе автоколебаний работают оба контакта реле (рис. 6.38), т. е.

$$A \geq |x^0| + b;$$

2) в процессе автоколебаний работает только один контакт реле (рис. 6.39), т. е.

$$|x^0| - b \leq A \leq |x^0| + b.$$

Если же будет $A < |x^0| - b$, то реле будет постоянно включено в одну сторону.

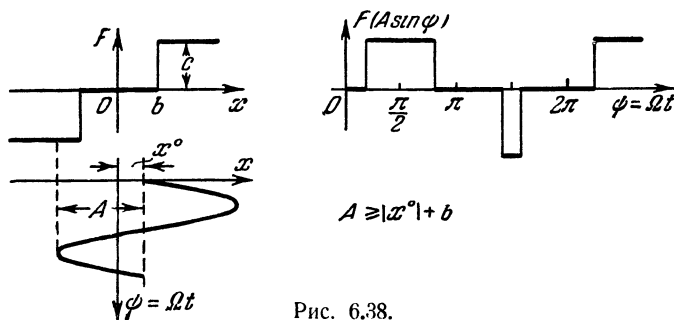


Рис. 6.38.

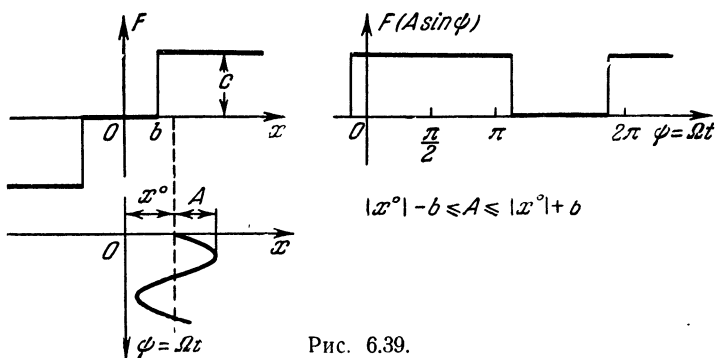


Рис. 6.39.

В первом случае (рис. 6.38) формулы (5.99) и (5.100) дают $q' = 0$ и

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x^0 + b}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x^0 - b}{A} \right)^2} \right], \\ F^0 &= \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{x^0 + b}{A} + \arcsin \frac{x^0 - b}{A} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.181)$$

Во втором случае (рис. 6.39) также $q' = 0$ и

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{|x^0| - b}{A} \right)^2}, \\ F^0 &= \frac{c}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{|x^0| - b}{A} \right) \operatorname{sign} x^0. \end{aligned} \right\} \quad (6.182)$$

Таким образом, по вторым формулам (6.181) и (6.182) определяется сглаженная характеристика $F^0(x^0)$ нелинейного звена (реле). Но в этих формулах остается еще неизвестной амплитуда A автоколебаний, которая будет тоже меняться с изменением величины x^0 .

Крутизна сглаженной нелинейной характеристики в произвольной ее точке, следовательно, будет

$$\frac{dF^0}{dx^0} = \frac{\partial F^0}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial A} \frac{dA}{dx^0},$$

где производная dA/dx^0 , как и сама функция $A(x^0)$, определится только в дальнейшем решении. Однако для нечетно-симметричных нелинейных характеристик в начальной точке ($x^0 = 0$) будет

$$\left(\frac{\partial F^0}{\partial A} \frac{dA}{dx^0} \right)_{x^0=0} = 0,$$

что было доказано в главе V.

По второй из формул (6.181) находим:

$$\frac{\partial F^0}{\partial x^0} = \frac{c}{\pi A} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^0 + b}{A} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^0 - b}{A} \right)^2}} \right] \quad \text{при } |x^0| < A - b,$$

откуда получаем, в частности, крутизну сглаженной характеристики в начале координат ($x^0 = 0$):

$$k_n = \operatorname{tg} \delta = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0} = \frac{2c}{\pi \sqrt{A^2 - b^2}}. \quad (6.183)$$

Следовательно, при малых рассогласованиях сглаженную характеристику данного нелинейного звена можно записать в чисто линейном виде

$$F^0 = k_n x^0,$$

где коэффициент k_n определяется формулой (6.183) и зависит от величины амплитуды A автоколебаний при $x^0 = 0$, т. е. от параметров системы (согласно рис. 6.36).

Предел справедливости замены $F^0 = k_n x^0$, т. е. предел величины x^0 , до которого можно применять выражение (6.183), выяснится в дальнейшем исследовании.

В тех случаях, где формула (6.183) справедлива, можно исследовать прохождение через систему всех медленно меняющихся составляющих как в установившихся, так и в переходных процессах, согласно (6.166) — (6.170), по линейному уравнению

$$[(T_0 p + 1)(T_2 p + 1)p + k k_n e^{-\tau p}] x^0 = k_1 (T_0 p + 1)(T_2 p + 1) e^{-\tau p} p y, \quad (6.184)$$

где k_n определяется по уравнению (6.183), куда подставляется значение A из графика рис. 6.36.

Рассмотрим теперь изменение амплитуды автоколебаний A с изменением величины рассогласования x^0 и построим сглаженную характеристику нелинейного звена $F^0(x^0)$ с учетом изменения амплитуды A .

Как видно из уравнений (6.176), частота автоколебаний Ω не зависит от величины q ; она определяется первой из формул (6.177), которой соответствует график рис. 6.36, б. Следовательно, в данном примере системы независимо от величины x^0 можно будет взять из графика рис. 6.36, б ту же самую частоту автоколебаний Ω , как и при отсутствии входного воздействия ($y = 0$, $x^0 = 0$). Тогда на основании первого уравнения (6.176)

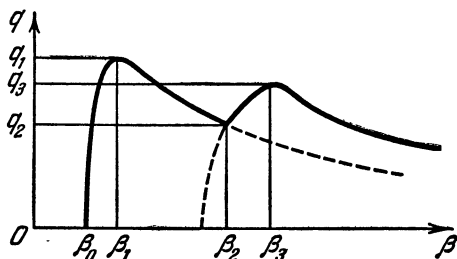


Рис. 6.40.

$$q = \frac{(T_0 + T_2) \Omega^2}{k \cos \tau \Omega}. \quad (6.185)$$

Введем для удобства записи дальнейших формул сокращенные обозначения:

$$\beta = \frac{A}{b}, \quad \zeta = \frac{x^0}{b}, \quad \gamma = \frac{2c}{\pi b}, \quad (6.186)$$

из которых первое есть относительная амплитуда, второе — относительная средняя составляющая и третье — коэффициент формы нелинейности.

Тогда формулы (6.181) и (6.182) для q запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\gamma}{\beta^2} [V \beta^2 - (\zeta + 1)^2 + V \beta^2 - (\zeta - 1)^2] \quad \text{при } |\zeta| \leq \beta - 1, \\ q &= \frac{\gamma}{\beta^2} V \beta^2 - (|\zeta| - 1)^2 \quad \text{при } \beta - 1 \leq |\zeta| \leq \beta + 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.187)$$

Кривая зависимости $q(\beta)$ при некотором постоянном значении $|\zeta|$ имеет вид рис. 6.40. Первая ветвь этой кривой ($\beta_0 \leq \beta \leq \beta_2$) определяется второй формулой (6.187), а вторая ветвь ($\beta_2 \leq \beta < \infty$) —

первой формулой (6.187). При этом характерным точкам, показанным на рис. 6.40, отвечают следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= |(\zeta| - 1)|, & \beta_1 &= \beta_0 \sqrt{2}, & q_1 &= \frac{\gamma}{2\beta_0}, \\ \beta_2 &= |\zeta| + 1, & q_2 &= \frac{2\gamma \sqrt{|\zeta|}}{(|\zeta| + 1)^2}, \\ \beta_3 &= \frac{4}{3}(\zeta^2 + 1) + \frac{2}{3}\sqrt{(\zeta^2 + 1)^2 + 12\zeta^2}, & q_3 &= q(\beta_3), \end{aligned} \right\} \quad (6.188)$$

причем последнее значение определяется по первой из формул (6.187). В частном случае при $\zeta = 0$ получаем $\beta_3 = \sqrt{2}$, $q_3 = \gamma$, т. е. известный уже ранее результат (рис. 6.35).

По формулам (6.187) с использованием указанных значений для характерных точек построено семейство кривых $q(\beta)$ при разных постоянных значениях ζ (рис. 6.41).

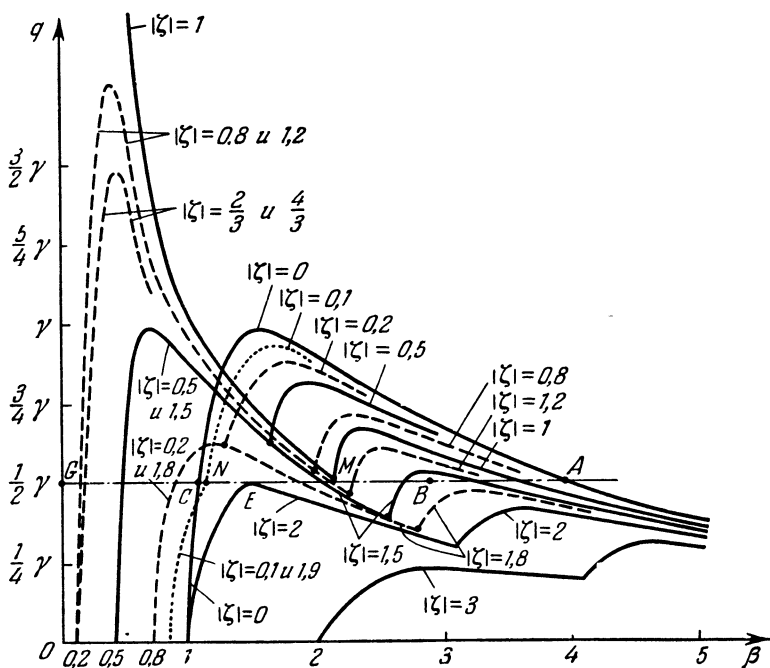


Рис. 6.41.

Как уже говорилось, по формуле (6.185) можно при заданных параметрах системы подсчитать значение q , после чего, проведя на графике рис. 6.41 соответствующую прямую $q = \text{const}$, получим искомую зависимость амплитуды автоколебаний β (или $A = \beta b$) от величины средней составляющей ζ (или $x^0 = \zeta b$).

Например, если параметры системы таковы, что формула (6.185) дает $q = 0,5\gamma$, то на рис. 6.41 надо провести прямую $q = 0,5\gamma$ (она изображена там штрих-пунктиром). Будем строить для этого случая график $\beta(\zeta)$ (рис. 6.42), идя вдоль прямой справа налево. Точке A на рис. 6.41 соответствует точка A на рис. 6.42. На рис. 6.41 от точки A до точки B амплитуда β уменьшается, а величина средней составляющей ζ увеличивается, что и показано на рис. 6.42. Затем от точки B до точки M на рис. 6.41 амплитуда β продолжает уменьшаться и величина ζ тоже уменьшается (участок BM на рис. 6.42). Затем на участке ME с уменьшением β (рис. 6.41) ζ снова увеличивается (участок ME на рис. 6.42), а на участке EN (рис. 6.41) уменьшается (участок EN_1 на рис. 6.42). Далее на участке NG (рис. 6.41) амплитуда β постепенно уменьшается до нуля, причем в каждой точке здесь величина ζ имеет два значения (симметричные друг с другом кривые N_1G и NG на рис. 6.42). Кроме того, участку NC (рис. 6.41) соответствует еще одна ветвь — кривая NC (рис. 6.42), где ζ уменьшается до нуля.

Между точками M и N на рис. 6.42 пунктиром проведены дополнительные кривые;

одна из них симметрична кривой MEN_1 , а другая соединяет участки CN и MB . Эти дополнительные кривые получились бы, если бы графики на рис. 6.40 имели продолжения, показанные там пунктиром. Но продолжения эти не удовлетворяют ограничениям величины $|\zeta|$, указанным в формулах (6.187). Поэтому и пунктирные кривые между точками M и N на рис. 6.42, нужные лишь для наглядности графика, не соответствуют реальным процессам.

Итак, имеем два контура: 1) $ABMNC$, дающий зависимость амплитуды периодического решения при работе обоих контактов реле, и 2) $MEGN$ — при работе одного контакта реле.

Очевидно, что точки A и C , где $\zeta = 0$, эквивалентны двум точкам кривых на рис. 6.35, b для одного заданного значения k . Следовательно, точка A (рис. 6.42) соответствует устойчивому периодическому решению (автоколебаниям), а точка C — неустойчивому периодическому решению. Поэтому кривая AB и дает искомый закон измерения амплитуды автоколебаний β с увеличением средней составляющей $|\zeta|$. Амплитуда уменьшается с увеличением ζ в интервале

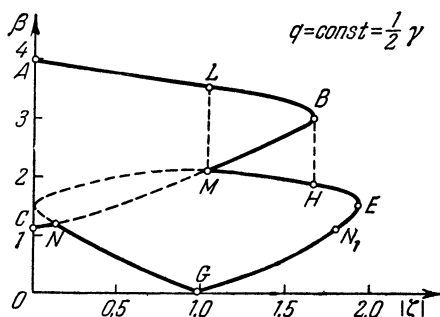


Рис. 6.42.

$$\text{от } \beta_A \approx 3,9 \text{ при } \zeta = 0 \text{ до } \beta_B \approx 2,9 \text{ при } \zeta_B \approx 1,7, \quad (6.189)$$

причем абсцисса ζ_B крайней точки B определяется как такое значение ζ , для которого значение q_3 (рис. 6.41 и формула (6.188)) равно данному $q = 0,5\gamma$.

Учитывая этот закон изменения β , теперь можно полностью построить сглаженную характеристику $F^0(x^0)$ или $F^0(\zeta)$, получаемую с помощью автоколебаний при работе обоих контактов, по второй из формул (6.181), которая в обозначениях (6.186) принимает вид

$$F^0 = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{\zeta + 1}{\beta} + \arcsin \frac{\zeta - 1}{\beta} \right) \quad \text{при } |\zeta| < \beta - 1. \quad (6.190)$$

При изменении ζ и β в интервалах (6.189) получаем:

$$0 \leq F^0 \leq 0,46c.$$

Соответствующий график сглаженной характеристики показан в виде кривой OB на рис. 6.48, б.

При дальнейшем увеличении средней составляющей $\zeta > \zeta_B = 1,7$, согласно рис. 6.42, автоколебания при работе обоих контактов реле становятся невозможными и произойдет либо постоянное включение одного контакта (прямая RS на рис. 6.48, б), либо установятся автоколебания, соответствующие работе одного контакта реле, с амплитудой, изменяющейся в зависимости от величины ζ по закону, определяемому кривой ME (рис. 6.42). Эти автоколебания возможны в интервале значений

$$\text{от } \zeta_M = 1 \text{ при } \beta_M = 2 \text{ до } \zeta_E = 2 \text{ при } \beta_E = \sqrt{2}, \quad (6.191)$$

причем точка M (рис. 6.42) соответствует точке β_3 на рис. 6.40, вследствие чего ζ_M и β_M определяются по формулам (6.188) из условия, что q_2 равно заданному $q = 0,5\gamma$. Точка же E (рис. 6.42) соответствует точке β_1 на рис. 6.40. Поэтому, согласно (6.188):

$$|\zeta|_E = \frac{\gamma}{2q_1} + 1, \quad \beta_E = \frac{\gamma\sqrt{2}}{2q_1}, \quad (6.192)$$

где надо считать, что q_1 равно заданному $q = 0,5\gamma$.

Сглаженная характеристика $F^0(\zeta)$ данного нелинейного звена при автоколебаниях, соответствующих работе одного контакта реле, согласно второй формуле (6.182), в обозначениях (6.186) будет

$$F^0 = \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{|\zeta| - 1}{\beta} \right) \text{sign } \zeta \quad \text{при } \beta - 1 \leq \zeta < \beta + 1, \quad (6.193)$$

что в интервале изменения (6.191) для ζ и β дает

$$0,5c \leq F^0 \leq 0,75c,$$

а на графике рис. 6.48, б изображается в виде кривой ME . Заметим, что, согласно (6.192) и (6.193), точке E всегда при любом значении q будет соответствовать величина $F_E^0 = 0,75c$.

Остальная часть EGN кривой для колебаний на одном контакте реле соответствует, видимо, неустойчивому периодическому решению. Заметим, что положение точки N , так же как и M , соответствует точке β_2 на рис. 6.40, но для другого значения ζ , чем в точке M . По формулам (6.188) при $q_2 = 0,5\gamma$ находим:

$$\zeta_N \approx 0,08, \quad \beta_N \approx 1,08.$$

Такого типа (рис. 6.42) картина кривых $\beta(\zeta)$ и такого же типа (рис. 6.48, б) сглаженные характеристики $F^0(\zeta)$ данного нелинейного звена получаются при таких сочетаниях параметров системы, когда значение q , подсчитанное по формуле (6.185), содержится в интервале

$$0,45\gamma < q < 0,67\gamma,$$

что и указано на рис. 6.48, б. При этом с увеличением q точки B , M и E на обоих графиках сдвигаются влево и вниз, а точка N — вправо и вверх.

При уменьшении же q точки B , M и E перемещаются, вправо и вверх, причем точка B движется быстрее, чем E , и при $q \approx 0,45\gamma$ становится $\zeta_B = \zeta_E$, а при $q < 0,45\gamma$ будет $\zeta_B > \zeta_E$. В связи с этим график сглаженной характеристики данного нелинейного звена при $0 < q < 0,45\gamma$ получает вид, показанный на рис. 6.48, а. Здесь диапазон возможного изменения входной величины (средней составляющей ζ) расширяется, но зато увеличивается и амплитуда автоколебаний. Для сравнения на графиках рис. 6.48 показана характеристика данного нелинейного звена без сглаживания в виде ломаной $OQPRS$.

Например, когда параметры системы таковы, что значение q , подсчитанное по формуле (6.185), будет $q = 0,25\gamma$, получится картина кривых $\zeta(\beta)$,

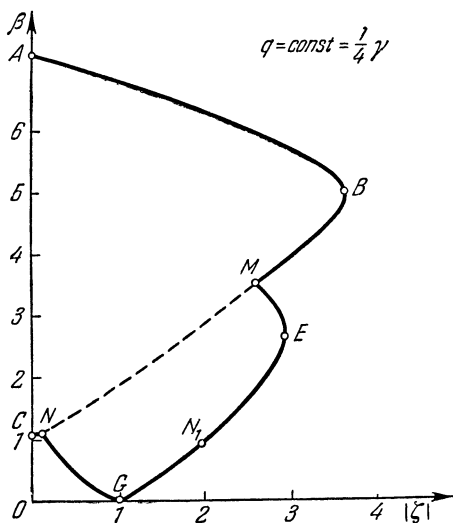


Рис. 6.43.

показанная на рис. 6.43 (она строится аналогично предыдущему путем проведения линии $q = 0,25\gamma$ на поле рис. 6.41). При этом получаются следующие результаты: $\beta_A = 7,9$ (при $\zeta = 0$), $\beta_B \approx 5,2$, $\zeta_B \approx 3,7$, $\beta_M \approx 3,6$, $\zeta_M \approx 2,6$, $\beta_E = 2,83$, $\zeta_E = 3$, $0 \leq F^0 \leq 0,54c$ (кривая OB на рис. 6.48, а), $0,65c \leq F^0 \leq 0,75c$ (кривая ME на рис. 6.48, а).

Если теперь параметры системы изменить так, что значение q , вычисленное по формулам (6.185), будет больше 0,67, то абсцисса точки B станет меньше единицы и два контура кривых, показанных на прежнем рис. 6.42, не будут пересекаться. Для иллюстрации этого случая на рис. 6.44 показана картина зависимости $\beta(\zeta)$ при $q = 0,75\gamma$,

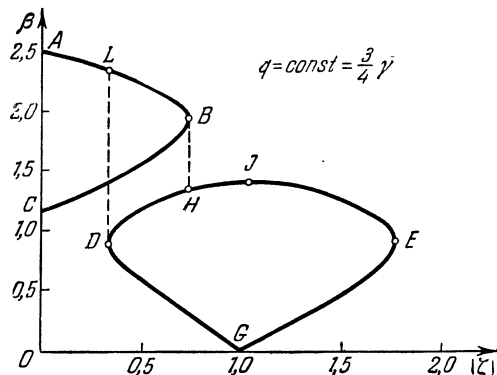


Рис. 6.44.

полученная на основании рис. 6.41 тем же способом, что и прежние кривые.

Напомним, что кривая ABC (рис. 6.44) соответствует первой из формул (6.187), когда в процессе колебаний работают оба контакта реле. Кривая же $DJEG$ соответствует второй из формул (6.187), когда в процессе колебаний работает только один контакт.

Кривая AB показывает закон уменьшения амплитуды автоколебаний с увеличением средней составляющей ζ , причем

$$\beta_A \approx 2,5 \text{ при } \zeta_A = 0, \quad \beta_B \approx 1,9 \text{ при } \zeta_B \approx 0,7.$$

При дальнейшем увеличении средней составляющей ($\zeta > 0,7$) автоколебания, соответствующие работе двух контактов реле, срываются. Но, поскольку $\zeta_B < 1$, этот срыв происходит внутри зоны нечувствительности реле, что показано на графике сглаженной характеристики OB (рис. 6.48, в), построенной по формуле (6.190), причем в крайней точке B получается $F^0 \approx 0,3c$.

Итак, при $\zeta > \zeta_B = 0,7$ система либо размыкается, либо переходит на автоколебания, при которых работает только один контакт реле. При этом амплитуда автоколебаний уменьшается скачком (на рис. 6.44 из точки B в точку H) до значения

$$\beta_H \approx 1,3 \text{ при } \zeta = 0,7.$$

Теперь с увеличением ζ амплитуда автоколебаний (при работе одного контакта) изменяется согласно кривой HJE . Точка максимума J соответствует значению $\zeta = 1$, когда средняя составляющая x^0 точно

равна половине ширины зоны нечувствительности реле b , причем величину β можно определить подстановкой $\zeta = 1$ во вторую формулу (6.187), а именно:

$$\beta_J = \frac{\gamma}{q} = 1,33.$$

Координаты крайней точки E (рис. 6.44) определяются по формуле (6.192), откуда в данном случае (при $q_1 = 0,75\gamma$) получаем:

$$\zeta_E = 1,67; \quad \beta_E = 0,94.$$

Значение $\zeta = 0,33$, получаемое из первых формул (6.188) при $q_1 = 0,75\gamma$, определяет положение точки D (рис. 6.44), а именно:

$$\zeta_D = 0,33; \quad \beta_D = 0,94.$$

При дальнейшем увеличении средней составляющей ($\zeta > 1,67$) автоколебания в системе срываются вообще и реле целиком включается в одну сторону (линии PS на рис. 6.48, в).

Итак, при изменении средней составляющей в пределах $\zeta_D < \zeta < \zeta_E$ амплитуда автоколебаний (при работе одного контакта) будет изменяться согласно кривой DJE (рис. 6.44), а сглаженная характеристика согласно формуле (6.193) получит вид кривой DJE на рис. 6.48, в, причем в точках D , J и E соответственно получаем:

$$F_D^0 = 0,25c; \quad F_J^0 = 0,5c; \quad F_E^0 = 0,75c. \quad (6.194)$$

Скачок амплитуды автоколебаний (рис. 6.44) и точек сглаженной характеристики (рис. 6.48, в) возможен, видимо, в любых точках отрезков кривых LB и DH при $0,33 < \zeta < 0,7$, когда возможны устойчивые колебания как на двух, так и на одном контакте реле.

Если далее изменить параметры системы таким образом, что подсчитанное по формуле (6.185) значение q будет увеличиваться, то изображенные на рис. 6.44 два контура кривых ABC и $DJEG$ будут сужаться. Например, при $q =$

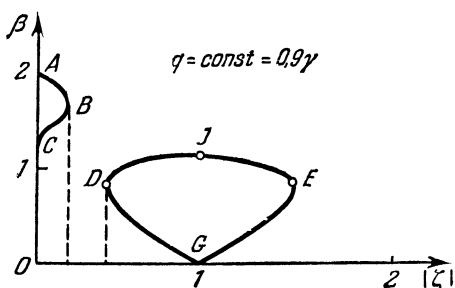


Рис. 6.45.

$= 0,9\gamma$ они примут вид, показанный на рис. 6.45. Здесь автоколебания при работе обоих контактов реле возможны лишь в сравнительно малом диапазоне изменения величины постоянной составляющей: от нуля до $\zeta_B \approx 0,2$, причем $\beta_B \approx 1,7$, $F_B^0 \approx 0,11c$. Эти колебания срываются в точке B (рис. 6.45) раньше, чем могут появиться колебания на одном контакте реле. Последние оказываются возможными

в интервале $\zeta_D < \zeta < \zeta_E$, причем по первым формулам (6.188) при $q_1 = 0,9\gamma$ находим:

$$\zeta_D = 0,445, \quad \zeta_E = 1,555, \quad \beta_D = \beta_E = 0,778.$$

В связи с этим сглаженная характеристика (6.190) и (6.193) будет иметь два отдельных участка OB и DE (рис. 6.48, з), первый из которых получается при автоколебаниях на обоих контактах реле, а второй — на одном. Между точками B и D реле размыкается, так как этот промежуток лежит внутри зоны нечувствительности реле.

Наконец, при $q = \gamma$ первый контур стягивается в одну точку A (рис. 6.46) и далее при $q > \gamma$ (например, при $q = 1,5\gamma$ на рис. 6.47)

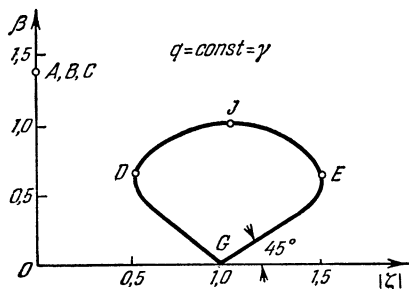


Рис. 6.46.

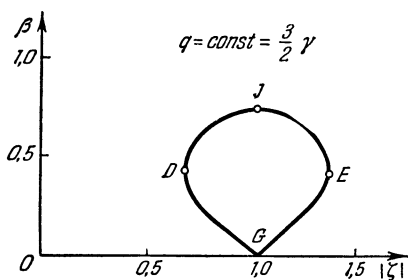


Рис. 6.47.

остается только один контур, отвечающий автоколебаниям на одном контакте реле. Следовательно, при параметрах системы, соответствующих значению $q \geq \gamma$, сглаженная характеристика при малых значениях постоянной составляющей ζ не может быть получена с помощью автоколебаний. Она возможна лишь вдали от нулевой точки в интервале $\zeta_D < \zeta < \zeta_E$ (рис. 6.48, д), причем первые три формулы (6.188) дают:

$$\text{при } q = \gamma \quad \zeta_D = 0,5, \quad \zeta_E = 1,5, \quad \beta_D = \beta_E = 0,707;$$

$$\text{при } q = 1,5\gamma \quad \zeta_D = \frac{2}{3}, \quad \zeta_E = \frac{4}{3}, \quad \beta_D = \beta_E = 0,471.$$

Величина F^0 в точках D , J и E при любом q имеет значения, приведенные в (6.194).

Таким образом, при соотношениях параметров системы, соответствующих значениям $q \geq \gamma$, для медленно меняющейся средней составляющей ζ сигнала на входе нелинейного звена, в отличие от предыдущего, получается зона нечувствительности

$$0 \leq |\zeta| \leq \zeta_D,$$

тем более широкая, чем больше q .

Итак, сглаженная характеристика нелинейного звена распространяется тем на больший диапазон медленно меняющейся входной величины ζ , чем больше устанавливается амплитуда автоколебаний. Но при этом будет больше и амплитуда автоколебаний выходной величины, что нежелательно. Кроме того, это снижает коэффициент усиления

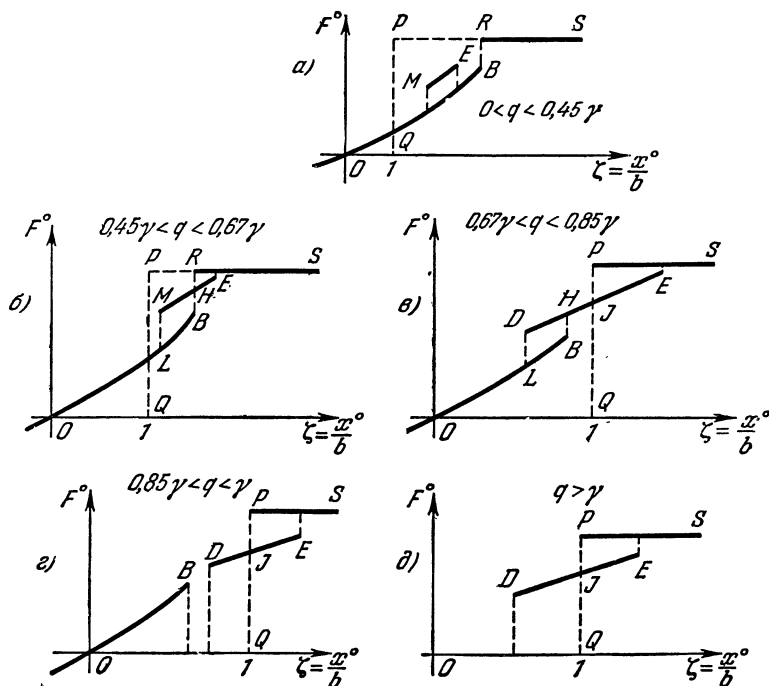


Рис. 6.48.

звена k_n , определяемый крутизной (тангенсом угла наклона) сглаженной характеристики.

Проделанное исследование позволяет выбирать структуру и параметры системы так, чтобы получить желаемую форму сглаженной характеристики при допустимых амплитуде и частоте автоколебаний, а затем исследовать все установившиеся и переходные процессы для медленно меняющихся составляющих по линейному уравнению (6.184), где k_n берется из рис. 6.48 как наклон кривых при замене их на рабочих участках подходящими прямыми.

Найдем, например, зависимости амплитуды автоколебаний A и средней составляющей x^0 от медленно меняющегося входного воздействия на систему y в установившемся режиме изменения его с постоянной скоростью.

Согласно уравнению (6.184) в установившемся режиме при постоянной входной величине ($y = \text{const}$) получается $x^0 = 0$, а значит, и $F^0 = 0$, т. е. постоянная входная величина отрабатывается на выходе системы без установившейся ошибки (как это обычно и имеет место в следящих системах).

Если же входной сигнал будет изменяться с постоянной скоростью $\dot{y} = \text{const}$, то, согласно (6.184), для установившегося режима

$$x^0 = \frac{k_1}{kk_n} \dot{y} = \text{const}. \quad (6.195)$$

Поскольку зависимости $F^0(x^0)$, представляющие собой сглаженные характеристики, уже имеются для различных соотношений параметров системы, то, пользуясь ими, можно на основании (6.195) построить графики зависимостей средней составляющей рассогласования x^0 (т. е. установившейся ошибки) от постоянной скорости \dot{y} входного сигнала. По сути дела, это будут те же самые графики рис. 6.48,

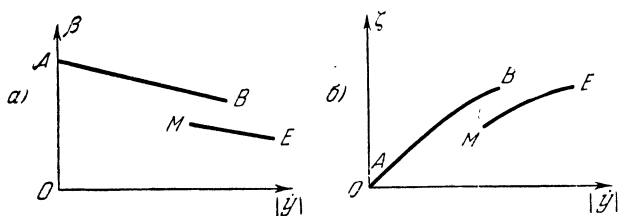


Рис. 6.49.

но с изменением ролей осей абсцисс и ординат и изменением масштаба.

Для получения же зависимости амплитуды автоколебаний β (или $A = \beta b$) от величины постоянной скорости \dot{y} входного воздействия нужно использовать графики $\beta(\zeta)$ (рис. 6.42—6.47), а затем для каждого ζ найти из рис. 6.48 значение F^0 и, согласно (6.195), $\dot{y} = \frac{k}{k_1} F^0$. Таким образом, графики рис. 6.42—6.47 будут перестроены к искомому виду $\beta(\dot{y})$. При этом надо использовать из рис. 6.42—6.47 только ветви устойчивых колебаний, для которых и построены были графики рис. 6.48.

Например, для случая, когда параметры системы таковы, что формула (6.185) дает $q = 0,5$ γ, с помощью рис. 6.42 и 6.48, б получаем графики $\zeta(\dot{y})$ и $\beta(\dot{y})$, показанные рис. 6.49. Кривые AB получаются для случая автоколебаний, захватывающих работу обоих контактов реле, а кривые ME — одного контакта.

§ 6.10. Сглаживание петлевых нелинейностей с помощью автоколебаний

Исследуем систему [187], схема которой изображена на рис. 6.50, а, где линейная часть 1 описывается уравнением

$$(T_1 p + 1) p x = k_1 x_1, \quad (6.196)$$

линейная часть 2

$$(T_2 p + 1) z = k_2 F \quad (6.197)$$

и обратная связь

$$z_1 = k_0 z, \quad x_1 = y - z_1. \quad (6.198)$$

Нелинейность (рис. 6.50, а) рассмотрим в двух вариантах: 1) петлевая характеристика типа зазора (рис. 6.50, б) с постоянной

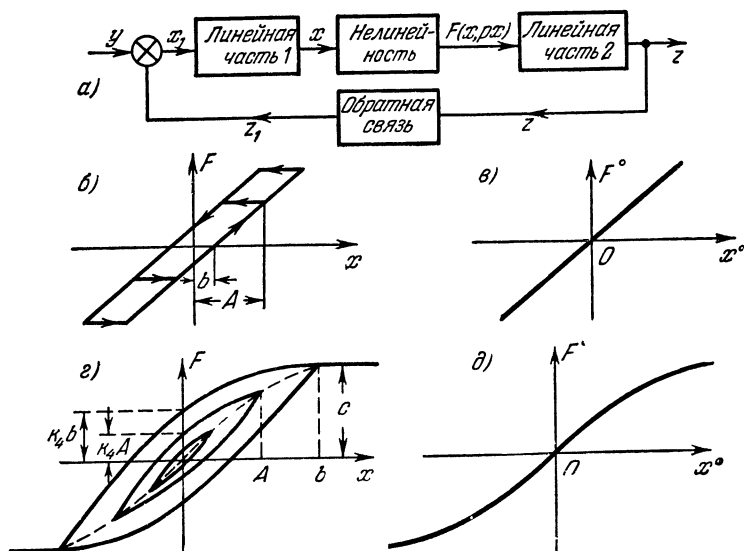


Рис. 6.50.

шириной петли $2b$; 2) криволинейная гистерезисная характеристика с переменной шириной петли и с насыщением (рис. 6.50, г). Вообще говоря, гистерезисные явления очень сложны. В зависимости от свойств материала и от начальных условий возможны различные движения внутри предельной петли гистерезиса. Примем здесь, что при установившихся симметричных колебаниях имеет место картина, изображенная на рис. 6.50, г. В обоих случаях крутизну средней линии (пунктирной) в начале координат будем считать равной единице, относя общий коэффициент усиления к линейной части системы.

Найдем сначала решение для симметричных автоколебаний при $y=0$ в первом приближении: $x=A\sin \Omega t$. Гармоническая линеаризация нелинейности дает

$$F=qx+\frac{q'}{\Omega}px. \quad (6.199)$$

При этом в случае системы с зазором (рис. 6.50, б), согласно (3.28), при $k=1$ и $A\geq b$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{2b}{A}\right) + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2b}{A}\right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A}\right)}, \\ q' &= -\frac{4b}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A}\right); \end{aligned} \right\} \quad (6.200)$$

эти зависимости $q(A)$ и $q'(A)$ показаны на рис. 6.51, а.

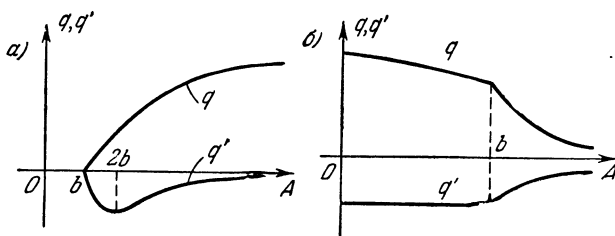


Рис. 6.51.

В случае системы с гистерезисом и насыщением (рис. 6.50, з) опишем нелинейность аналитически в следующем виде:
при $|x| \leq b$

$$F = (1 - k_3 x^2) x - k_4 A \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^2 \operatorname{sign} px, \quad (6.201)$$

а при $|x| \geq b$

$$F = c \operatorname{sign} x. \quad (6.202)$$

В формуле (6.201) первый член описывает среднюю линию (пунктир на рис. 6.50, з), а второй — отклонение действительной гистерезисной характеристики в обе стороны от средней линии.

Гармоническая линеаризация этой нелинейности при симметричных колебаниях $x=A\sin \Omega t$ приводит к выражению (6.199), где, согласно формулам (3.32) и (3.42) и таблице 3.1, при $n=4$ имеем для $A \leq b$:

$$q = 1 - \frac{3}{4} k_3 A^2, \quad q' = -\frac{32}{15\pi} k_4 \approx -0,68 k_4. \quad (6.203)$$

При $A > b$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} q &= \left(1 - \frac{3}{4} k_3 A^2\right) \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} - \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) + \\ &\quad + \frac{3k_3 b^3}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \\ q' &= -\frac{32k_4 b^2}{15\pi A^2} = -0,68k_4 \frac{b^2}{A^2}; \end{aligned} \right\} \quad (6.204)$$

эти зависимости $q(A)$ и $q'(A)$ показаны на рис. 6.51, б.

Характеристическое уравнение систем (6.196) — (6.198) в обоих случаях будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) = 0, \quad \text{где } k = k_0 k_1 k_2. \quad (6.205)$$

После подстановки $p = j\Omega$ находим вещественную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} X &= kq - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0, \\ Y &= kq' + \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.206)$$

Пусть величины постоянных времени T_1 и T_2 заданы. Нужно выбрать величину коэффициента усиления k пока из условия допустимых значений амплитуды A и частоты Ω автоколебаний (впоследствии при выборе k будет учтена и форма сглаженной характеристики). Для этого построим зависимость амплитуды и частоты от величины k .

Исключив из уравнений (6.206) величину k , получим зависимость частоты Ω от амплитуды A в виде

$$\Omega = \frac{T_1 + T_2}{2T_1 T_2} \frac{q'}{q} + \sqrt{\left(\frac{T_1 + T_2}{2T_1 T_2} \frac{q'}{q} \right)^2 + \frac{1}{T_1 T_2}}. \quad (6.207)$$

В общем решении здесь перед корнем будет \pm ; однако $q' < 0$, и поэтому при знаке минус перед корнем получим $\Omega < 0$, что не реально; следовательно, в рассматриваемой задаче физический смысл имеет только знак плюс перед корнем. По формуле (6.207), задаваясь величиной A и беря соответствующие q и q' из рис. 6.51 или из формул (6.200), (6.203) и (6.204), построим график $\Omega(A)$ (см. рис. 6.52, а для системы с зазором и рис. 6.53, а для системы с гистерезисом).

После этого для любой точки полученного графика $\Omega(A)$ можно, согласно (6.206), подсчитать

$$k = \frac{(T_1 + T_2) \Omega^2}{q(A)} \quad (6.208)$$

и, следовательно, построить график зависимости амплитуды от величины k (см. рис. 6.52, б для системы с зазором и рис. 6.53, б для системы с гистерезисом).

Для выявления того, какая из полученных двух ветвей графика $A(k)$ соответствует автоколебаниям, исследуем устойчивость перио-

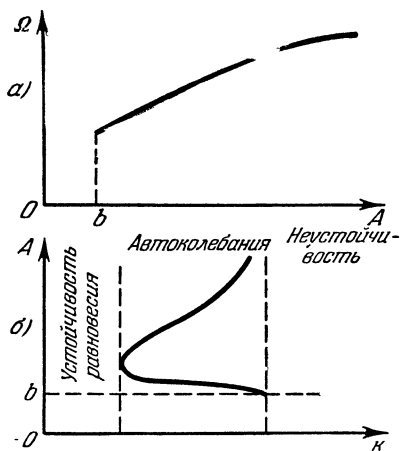


Рис. 6.52.

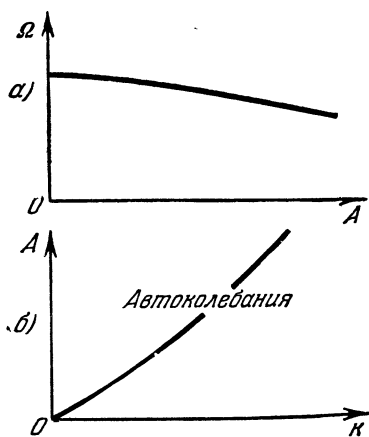


Рис. 6.53.

дического решения. На основании характеристического уравнения (6.405) запишем:

$$\begin{aligned} X &= kq - (T_1 + T_2)\omega^2, \\ Y &= \left(k \frac{q'}{\Omega} + 1\right)\omega - T_1 T_2 \omega^3, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* &= k \left(\frac{dq}{da}\right)^*, & \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* &= -2(T_1 + T_2)\Omega, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* &= k \left(\frac{dq'}{da}\right)^*, & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* &= k \frac{q'}{\Omega} + 1 - 3T_1 T_2 \Omega^2. \end{aligned}$$

Замечая, что, согласно второму из уравнений (6.206):

$$k \frac{q'}{\Omega} + 1 = T_1 T_2 \Omega^2,$$

можем записать критерий устойчивости периодического решения

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0$$

в виде

$$-T_1 T_2 \Omega \left(\frac{dq}{da}\right)^* + (T_1 + T_2) \left(\frac{dq'}{da}\right)^* > 0. \quad (6.209)$$

Перепишем его с подстановкой (6.207) в виде

$$\left(\frac{dq'}{da}\right)^* > \left[\frac{q'}{2q} + \sqrt{\left(\frac{q'}{2q}\right)^2 + \frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2}} \right] \left(\frac{dq}{da}\right)^*. \quad (6.210)$$

Поскольку в системе с зазором $\left(\frac{dq}{da}\right)^* > 0$ (рис. 6.51, а), то неравенство (6.210) может выполняться только при $\left(\frac{dq'}{da}\right)^* > 0$. Но при $A < 2b$, согласно рис. 6.51, а, величина $\left(\frac{dq'}{da}\right)^*$ отрицательна. Следовательно, нижняя ветвь кривой $A(k)$ на рис. 6.52, б явно соответствует неустойчивому периодическому решению. Для верхней же ветви неравенство (6.210) выполняется, так как при больших A величины $\left(\frac{dq'}{da}\right)^*$ и $\left(\frac{dq}{da}\right)^*$ примерно равны, а величина $q' \rightarrow 0$. При этом (6.210) заменяется приближенным неравенством

$$\frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2} < 1,$$

что всегда выполняется. Следовательно, амплитуда автоколебаний определяется верхней ветвью кривой на рис. 6.52, б.

Для систем же с гистерезисом, согласно рис. 6.51, б, $\left(\frac{dq}{da}\right)^* < 0$ и $\left(\frac{dq'}{da}\right)^* \geq 0$. Поэтому условие устойчивости периодического решения выполняется всегда и, следовательно, график рис. 6.53 дает решение для амплитуды и частоты автоколебаний в зависимости от коэффициента усиления k .

Полученную амплитуду A автоколебаний переменной x (рис 6.50, а) можно легко пересчитать с помощью передаточных функций в величину амплитуды автоколебаний другой величины, например, выходной величины z .

Найдем теперь изменение амплитуды и частоты автоколебаний при наличии входного воздействия $y(t)$, медленно меняющегося во времени.

Переменная x будет складываться из средней медленно меняющейся составляющей и из периодической составляющей, а именно:

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = A \sin \Omega t.$$

Тогда гармоническая линеаризация нелинейности вместо (6.199) примет вид

$$F = F^0 + \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) x^*,$$

причем по формулам (5.128) и (5.129) для петлевой характеристики типа зазора (рис. 6.54, а) получим прежние значения q и q' (6.200) и

$$F^0 = x^0. \quad (6.211)$$

Для гистерезисной характеристики получаем новые значения, а именно (рис. 6.54, б):

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 - 3k_3 \left[(x^0)^2 + \frac{A^2}{4} \right], \\ q' &= -\frac{32}{15\pi} k_4 = -0,68k_4, \\ F^0 &= \left\{ 1 - k_3 \left[(x^0)^2 + \frac{3}{2} A^2 \right] \right\} x^0 \\ &\quad \text{при } |x^0| + A \leq b. \end{aligned} \right\} \quad (6.212)$$

Аналогично можно получить формулы для случая $A - |x^0| \geq b$ (рис. 6.54, в) и для случая $|x^0| + A > b$, но $|A - (x^0)| < b$ (рис. 6.54, г). Так, в последнем случае получаем:

$$\left. \begin{aligned} q &= \left\{ 1 - 3k_3 \left[(x^0)^2 + \frac{A^2}{4} \right] \right\} \cdot \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{b - x^0}{A} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b - x^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b - x^0}{A} \right)^2} \right] + \frac{2x^0}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b - x^0}{A} \right)^2} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{c}{x^0} - 1 + k_3 \left[(x^0)^2 + 2A^2 + (b - x^0)^2 - \frac{(b - x^0)^3}{4x^0} \right] \right\}, \\ q' &= -\frac{32k_4}{15\pi} \left(\frac{b - x^0 + A}{2A} \right)^2 = -0,68k_4 \left(\frac{b - x^0 + A}{2A} \right)^2, \\ F^0 &= \left\{ 1 - k_3 \left[(x^0)^2 + \frac{3}{2} A^2 \right] \right\} x^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{b - x^0}{A} \right) + \\ &\quad + c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{b - x^0}{A} \right) - \\ &\quad - \frac{A}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{b - x^0}{A} \right)^2} \left\{ 1 - k_3 \left[3(x^0)^2 + \frac{2}{3} A^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} k_3 x^0 (b - x^0) - \frac{1}{3} k_3 (b - x^0)^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.213)$$

Из формулы (6.211) видно, что при наличии петлевой нелинейности типа зазора автоколебательный режим работы системы приводит к тому, что для медленно меняющихся сигналов система становится чисто линейной (рис. 6.50, в) в соответствии с линейностью средней линии (рис. 6.54, а). При этом q и q' остаются прежними (не зависят от x^0). Поэтому частота и амплитуда автоколебаний в системе с зазором не будут зависеть от величины медленно меняющейся средней составляющей (а значит, и от внешнего воздействия), и в данном случае никаких дополнительных расчетов больше не требуется.

Что же касается системы с гистерезисной характеристикой (рис. 6.54, б, в, г), то вследствие криволинейности средней линии сглаженная характеристика нелинейного звена тоже будет криволинейной (рис. 6.50, д), причем, как видно из третьей формулы (6.212) и из (6.201), в отличие от предыдущего случая, сглаженная характеристика

$F^0(x^0)$ не совпадает со средней линией петли, а отличается от нее на величину $\frac{3}{2} k_3 A^2 x^0$ при $|x^0| + A \leq b$ и на более сложную величину (см. (6.213)) при $|x^0| + A > b$. Разница между ними зависит от амплитуды автоколебаний, а последняя будет зависеть от величины средней составляющей x^0 , ибо x^0 входит в выражения (6.212) и (6.213). Следовательно, прежде чем найти сглаженную характеристику,

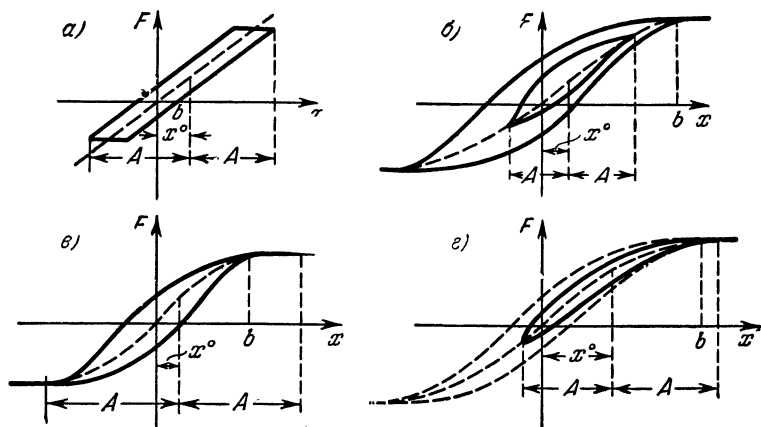


Рис. 6.54.

в этом случае (в отличие от системы с зазором) придется определять сначала, как и в § 6.9, зависимость амплитуды автоколебаний A от величины средней составляющей x^0 .

Для рассматриваемого случая приходим к тем же уравнениям (6.206), но с новым значением q , определяемым (6.212) или (6.213), а именно:

$$\left. \begin{aligned} X &= kq(A, x^0) - (T_1 + T_2)\Omega^2 = 0, \\ Y &= kq' + \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.214)$$

Первое из них дает формулу

$$q(A, x^0) = \frac{(T_1 + T_2)\Omega^2}{k}. \quad (6.215)$$

Из второго равенства (6.214) с учётом (6.212) для случая $|x^0| + A \leq b$ находим уравнение для частоты:

$$\Omega^3 - \frac{1}{T_1 T_2} \Omega + \frac{32k_4 k}{15\pi T_1 T_2} = 0. \quad (6.216)$$

Найденная отсюда частота автоколебаний не зависит ни от амплитуды A , ни от средней составляющей x^0 . Она определяется параметрами системы T_1 , T_2 , k и коэффициентом k_4 (рис. 6.50, г), характеризующими зависимость ширины гистерезисной петли от амплитуды. Для случая же $|x^0| + A > b$ уравнение для частоты,

согласно (6.214) и (6.213), принимает вид

$$\Omega^3 - \frac{1}{T_1 T_2} \Omega + \frac{32k_4 k}{15\pi T_1 T_2} \left(\frac{b - x^0 + A}{2A} \right)^2 = 0, \quad (6.217)$$

т. е. частота автоколебаний зависит от величины средней составляющей x^0 и от амплитуды автоколебаний A , которая, в свою очередь, тоже зависит от x^0 . Применяя тот же подход к решению задачи, что и в § 6.9, получаем в результате, что с увеличением средней составляющей x^0 амплитуда автоколебаний уменьшается (рис. 6.55, а) и при некотором

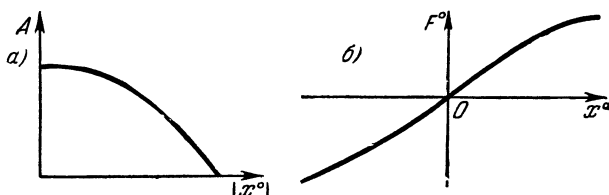


Рис. 6.55.

значении x^0 исчезает (автоколебания срываются). Сглаженная характеристика данного гистерезисного нелинейного звена, построенная по третьим формулам (6.212) и (6.213) с учетом изменения амплитуды автоколебаний, получает вид, показанный на рис. 6.55, б.

Крутизна этой сглаженной характеристики в начале координат, согласно третьей формуле (6.212), будет

$$k_n = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0} = 1 - 3k_3 \left[(x^0)^2 + \frac{A^2}{2} \right]_{x^0=0} = 1 - \frac{3}{2} k_3 A_0^2,$$

где A_0 есть значение амплитуды автоколебаний A , определяемое для разных коэффициентов усиления k из графика рис. 6.53, б. Важно отметить, что $k_n < 1$, т. е. медленно меняющаяся составляющая проходит с коэффициентом усиления меньшим, чем крутизна средней линии на рис. 6.50, з.

Теперь получены и для такого типа нелинейной системы все данные, чтобы можно было рассчитывать установившиеся и переходные процессы в системе в целом для медленно меняющихся составляющих по линейным уравнениям, как указывалось в предыдущих параграфах.

Итак, специфика и сложность получения сглаженной при помощи автоколебаний характеристики любого нелинейного звена состоят в необходимости учета возможного изменения амплитуды автоколебаний с изменением медленно меняющейся средней составляющей (смещения центра колебаний) и в обеспечении допустимой амплитуды и частоты автоколебаний выбором структуры и параметров системы наряду с обеспечением других требуемых качеств этой системы в целом. Значительное упрощение в решении задачи получается в тех случаях, когда возможна линеаризация $F^0 = k_n x^0$, описанная в § 5.3.

Г Л А В А VII

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 7.1. Обобщение асимптотического метода Крылова—Боголюбова на исследование переходных процессов

Основой для развития метода гармонической линеаризации во всех предыдущих главах при исследовании автоколебаний, в том числе и с медленно меняющимися составляющими (когда амплитуда и частота медленно меняются во времени), служил асимптотический метод Крылова и Боголюбова, первое приближение которого было самими авторами метода представлено в форме так называемой эквивалентной линеаризации нелинейного уравнения (см. главу I книги Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [221]).

Первоначально этот асимптотический метод был разработан для дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (7.1)$$

а затем и для систем высокого порядка (глава IV книги [221]).

Решение уравнения (7.1) ищется в форме (см. [221], стр. 37)¹⁾

$$x = a \sin \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \psi) \quad (m=1, 2, \dots), \quad (7.2)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

В первом приближении принимается

$$x = a \sin \psi, \quad \frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a). \quad (7.4)$$

¹⁾ Здесь вместо $a \cos \psi$ взято $a \sin \psi$, что не меняет существа дела.

Из этой формы решения видно, что амплитуда a и частота $\omega = \omega_0 + \varepsilon B_1(a)$ считаются медленно меняющимися функциями времени. Таким образом возникает возможность исследования медленно затухающих или медленно расходящихся нелинейных колебательных переходных процессов и вообще колебаний нелинейных систем, близких к обычным гармоническим:

$$x = a_0 \sin \omega_0 t, \quad (7.5)$$

но с медленно изменяющимися амплитудой и частотой около значений a_0 и ω_0 .

При расчете же автоматических систем часто приходится иметь дело с быстро затухающими колебательными процессами, близкими не к линейным гармоническим (7.5), а к линейным затухающим (или расходящимся):

$$x = a_0 e^{\xi_0 t} \sin \omega_0 t, \quad (7.6)$$

но с медленно изменяющимися показателем затухания и частотой около значений ξ_0 и ω_0 на определенном ограниченном отрезке времени. Решение (7.6) соответствует дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + c^2 x = 0, \quad (7.7)$$

причем

$$\xi_0 = -b, \quad \omega_0 = \sqrt{c^2 - b^2}. \quad (7.8)$$

Поэтому для целей расчета автоматических систем представляет интерес построение асимптотического решения дифференциального уравнения нелинейной системы отличного от (7.1) вида, а именно [207]:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + c^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (7.9)$$

где ε — малый параметр, b и c — постоянные вещественные числа, $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ — заданная нелинейная функция.

Производя обобщение асимптотического метода Крылова и Боголюбова на уравнение вида (7.9), будем искать решение его в следующей форме:

$$x = a \sin \psi + \varepsilon \varphi_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \varphi_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m \varphi_m(a, \psi) \quad (m=1, 2, \dots), \quad (7.10)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -ba + \varepsilon \Phi_1(a) + \varepsilon^2 \Phi_2(a) + \dots + \varepsilon^m \Phi_m(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a). \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

В первом приближении получаем:

$$x = a \sin \psi, \quad \frac{da}{dt} = -ba + \varepsilon \Phi_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a), \quad (7.12)$$

где величина ω_0 определяется формулой (7.8).

Оно существенно отличается от прежнего решения (7.4) тем, что выражение для производной $\frac{da}{dt}$ содержит конечный (не малый) член $-ba$. Поэтому, в отличие от прежнего, теперь становится возможным исследовать быстро затухающие (или быстро расходящиеся) нелинейные колебания, близкие к линейным с конечным показателем затухания $\xi_0 = -b$, так как при $\varepsilon = 0$ уравнения (7.10) и (7.11), а также уравнения (7.12) дают решения (7.6) и (7.8). Здесь, в отличие от прежнего, считаются медленно меняющимися функциями времени не a и ω , а показатель затухания ξ и частота ω :

$$\xi = -b + \frac{\varepsilon \Phi_1(a)}{a}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon B_1(a); \quad (7.13)$$

амплитуда же a может изменяться, согласно (7.12), с конечной скоростью $\frac{da}{dt}$ в зависимости от числового значения b .

Итак, будем искать решение нелинейного уравнения (7.9) в форме (7.10) и (7.11).

Рассматривая (7.10) и (7.11) как формальные ряды, ограничимся в них небольшим конечным числом членов m и будем искать функции $\varphi_1(a, \psi)$, $\varphi_2(a, \psi)$, ..., $\Phi_1(a)$, $\Phi_2(a)$, ..., $B_1(a)$, $B_2(a)$, ... так, чтобы $a(t)$ и $\psi(t)$, фигурирующие в (7.10) и (7.11), удовлетворяли заданному дифференциальному уравнению (7.9) с точностью до величин порядка ε^{m+1} .

Для упрощения выкладок введем новую переменную y путем замены

$$x = ye^{-bt}. \quad (7.14)$$

Из (7.14) следует:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt} \left(\frac{dy}{dt} - by \right). \quad (7.15)$$

Тогда исследуемое дифференциальное уравнение (7.9) преобразуется к виду

$$e^{-bt} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y \right) = \varepsilon f \left(x, \frac{dx}{dt} \right), \quad \omega_0^2 = c^2 - b^2, \quad (7.16)$$

а уравнения (7.10) и (7.11) примут форму

$$y = a_* \sin \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \psi), \quad (7.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_*}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a), \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} a &= a_* e^{-bt}, \quad \frac{da}{dt} = -ba + \frac{da_*}{dt} e^{-bt}, \\ \varphi_i &= u_i e^{-bt}, \quad \Phi_i = A_i e^{-bt} \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Продифференцировав (7.17) два раза по t с использованием формул (7.18) и (7.19), придем к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= a_* \omega_0 \cos \psi + \varepsilon \left(A_1 \sin \psi + a_* B_1 \cos \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} - ba \frac{\partial u_1}{\partial a} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(A_2 \sin \psi + a_* B_2 \cos \psi + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + e^{-bt} A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} - ba \frac{\partial u_2}{\partial a} \right) + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -a_* \omega_0^2 \sin \psi + \varepsilon \left(-2\omega_0 B_1 a_* \sin \psi - ba \frac{dA_1}{da} \sin \psi + 2\omega_0 A_1 \cos \psi - \right. \\ &- ba \frac{dB_1}{da} a_* \cos \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - 2ba\omega_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + b^2 a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + b^2 a \frac{\partial u_1}{\partial a} \left. \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left(-B_1^2 a_* \sin \psi - 2\omega_0 B_2 a_* \sin \psi - ba \frac{dA_2}{da} \sin \psi + 2\omega_0 A_2 \cos \psi + \right. \\ &+ 2A_1 B_1 \cos \psi + A_1 \frac{dA_1}{da} e^{-bt} \sin \psi + A_1 \frac{dB_1}{da} e^{-bt} a_* \cos \psi - ba \frac{dB_2}{da} a_* \cos \psi + \\ &+ 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} - ba \frac{dB_1}{da} \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + 2\omega_0 A_1 e^{-bt} \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} - 2ba B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} - \\ &- 2ba\omega_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} - 2bA_1 e^{-bt} \frac{\partial u_1}{\partial a} - ba \frac{dA_1}{da} e^{-bt} \frac{\partial u_1}{\partial a} + b^2 a \frac{\partial u_2}{\partial a} - \\ &\left. - 2bae^{-bt} A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + b^2 a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} \right) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Теперь $\frac{dx}{dt}$, согласно (7.15), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi + \\ &+ \varepsilon e^{-bt} \left(A_1 \sin \psi + a_* B_1 \cos \psi - bu_1 - ba \frac{\partial u_1}{\partial a} + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

Поэтому разложение правой части уравнения (7.16) в ряд Тейлора дает

$$\begin{aligned} \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= \varepsilon f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 e^{-bt} \left[u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) + \left(A_1 \sin \psi + a_* B_1 \cos \psi - \right. \right. \\ &\left. \left. - bu_1 - ba \frac{\partial u_1}{\partial a} + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) \right] + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения $\frac{d^2 y}{dt^2}$ и $\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, а также выражение (7.17) для y в уравнение (7.16) и приравняв затем коэф-

фициенты при одинаковых степенях ε , с учетом соотношений (7.19) получим ряд уравнений:

$$\begin{aligned} & -2\omega_0 B_1 a \sin \psi - ba \frac{d\Phi_1}{da} \sin \psi + 2\omega_0 \Phi_1 \cos \psi - ba^2 \frac{dB_1}{da} \cos \psi + \\ & + \omega_0 \varphi_1 + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \psi^2} - 2ba\omega_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \partial \psi} + b^2 a^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a^2} + b^2 a^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} = \\ & = f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi), \quad (7.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -B_1^2 a \sin \psi - 2\omega_0 B_2 a \sin \psi - ba \frac{d\Phi_2}{da} \sin \psi + 2\omega_0 \Phi_2 \cos \psi + 2\Phi_1 B_1 \cos \psi + \\ & + \Phi_1 \frac{d\Phi_1}{da} \sin \psi + a\Phi_1 \frac{dB_1}{da} \cos \psi - ba^2 \frac{dB_2}{da} \cos \psi + \omega_0^2 \varphi_2 + 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \psi^2} + \\ & + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \psi^2} - ba \frac{dB_1}{da} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} + 2\omega_0 \Phi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \partial \psi} - 2baB_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \partial \psi} - 2ba\omega_0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial a \partial \psi} - \\ & - 2b\Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} - ba \frac{d\Phi_1}{da} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + b^2 a \frac{\partial \varphi_2}{\partial a} - 2ba\Phi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a^2} + b^2 a^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial a^2} = \\ & = \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x} (a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) + \left(\Phi_1 \sin \psi + aB_1 \cos \psi - b\varphi_1 - \right. \\ & \left. - ba \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \omega_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} \right) \frac{\partial f}{\partial x} (a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi), \dots \quad (7.21) \end{aligned}$$

Будем считать, что функция $\varphi_1(a, \psi)$ не содержит в себе членов $\sin \psi$ и $\cos \psi$, так как их естественно включить целиком в первое слагаемое решения (7.10). Тогда, разложив правую часть (7.20) в тригонометрический ряд ¹⁾ и приравняв соответствующие коэффициенты обеих частей уравнения (7.20), получим:

$$\left. \begin{aligned} & -2\omega_0 \Phi_1 + ba^2 \frac{dB_1}{da} = h_1(a), \\ & -2a\omega_0 B_1 - ba \frac{d\Phi_1}{da} = g_1(a), \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} & ba^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a^2} + b^2 a \frac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \psi^2} - 2ba\omega_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial a \partial \psi} + \omega_0^2 \varphi_1 = \\ & = g_0(a) + \sum_{r=2}^{\infty} [g_r(a) \sin r\psi + h_r(a) \cos r\psi], \quad (7.23) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_0(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) d\psi, \\ g_r(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) \sin r\psi d\psi, \\ h_r(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) \cos r\psi d\psi \\ & \quad (r = 1, 2, \dots, \infty). \end{aligned}$$

¹⁾ О законности такого разложения см. ниже в конце этого параграфа.

Частными решениями двух уравнений (7.22) определяются функции $\Phi_1(a)$ и $B_1(a)$. Этим самым находится первое приближение (7.12). Далее, из уравнения (7.23) определяется функция $\varphi_1(a, \psi)$, причем последняя ищется в виде ряда

$$\varphi_1(a, \psi) = v_0(a) + \sum_{r=2}^{\infty} [v_r(a) \sin r\psi + w_r(a) \cos r\psi],$$

коэффициенты которого неизвестны. Подстановка этого выражения в (7.23) дает возможность найти все коэффициенты v_0, v_r, w_r через величины g_0, g_r, h_r .

После этого аналогично поступаем с уравнением (7.21), из которого определяем $\Phi_2(a), B_2(a)$, что дает нам второе приближение и функцию $\varphi_2(a, \psi)$ и т. д.

Ограничимся далее рассмотрением только первого приближения, представив его, согласно (7.12) и (7.13), в виде

$$x = a \sin \psi, \quad (7.24)$$

причем

$$\frac{da}{dt} = a\xi(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(a),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi(a) &= -b + \varepsilon \frac{\Phi_1(a)}{a}, \\ \omega(a) &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a), \quad \omega^2(a) = \omega_0^2 + \varepsilon 2\omega_0 B_1(a) \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

(в выражении для ω^2 отброшен член с ε^2).

Здесь ξ и ω представляют собой как бы мгновенные значения показателя затухания и частоты исследуемого нелинейного процесса, которые меняются с изменением амплитуды колебаний a во времени. При этом b и $\omega_0 = \sqrt{c^2 - b^2}$ являются соответственно показателем затухания и частотой колебаний линейной системы (7.7), получаемой из нелинейной (7.9) при $\varepsilon = 0$.

Уравнения (7.22) для определения функции $\Phi_1(a)$ и $B_1(a)$ можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_0 \Phi_1(a) &= \beta(a) + ba^2 \frac{dB_1}{da}, \\ 2\omega_0 B_1(a) &= \gamma(a) - b \frac{d\Phi_1}{da}, \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta(a) &= -h_1(a) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) \cos \psi \, d\psi, \\ \gamma(a) &= -\frac{g_1(a)}{a} = -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) \sin \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Во многих конкретных задачах зависимости $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ геометрически представляются плавными кривыми с малой кривизной. В этих случаях вторые и высшие производные от β и γ по a можно считать малыми величинами порядка ϵ (по сравнению с величинами β , γ и их первыми производными) и пренебречь ими в первом приближении, внося их учет, если потребуется, в построение последующих приближений. Тогда необходимые частные решения уравнений (7.26) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_0\Phi_1(a) &= \beta(a) + \frac{ba^2\omega_0}{2\omega_0^2 + b^2} \frac{d\gamma}{da}, \\ 2\omega_0B_1(a) &= \gamma(a) - \frac{b}{2\omega_0} \frac{d\beta}{da} - \frac{b^2a}{2\omega_0^2 + b^2} \frac{d\gamma}{da}. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Эти выражения получены путем последовательных приближений. Они удовлетворяют уравнениям (7.26), что можно проверить подстановкой.

Итак, *в общем случае* для определения ξ и ω^2 , согласно (7.25), получаем из (7.26) следующие формулы (после отбрасывания членов с ϵ^2):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -b + \epsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0} + \frac{ba}{2\omega_0} \frac{d\omega}{da} = -b + \epsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0} - \frac{1}{2\omega_0} \frac{d\omega}{dt}, \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \epsilon \gamma(a) - ba \frac{d\xi}{da} - b\xi - b^2 = \omega_0^2 + \epsilon \gamma(a) + \frac{d\xi}{dt} - b\xi - b^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Интересно отметить, что последние выражения с точностью до ϵ^2 совпадают с результатами П. Е. Гренстеда [212], полученными совершенно другим, не асимптотическим путем без введения малого параметра. Поскольку эти формулы представляют собой дифференциальные уравнения, в большинстве случаев неудобные для практического применения, то их целесообразно представить в более простой конечной форме.

В случае, если $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ представляются *кривыми с малой кривизной*, уравнения (7.26) принимают вид (7.28), и тогда решение для показателя затухания ξ и частоты ω , согласно (7.25), будут:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -b + \epsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0} + \epsilon_2 \frac{ba}{2(2\omega_0^2 + b^2)} \frac{d\gamma}{da}, \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \epsilon \gamma(a) - \epsilon \frac{b}{2\omega_0} \frac{d\beta}{da} - \epsilon \frac{b^2a}{2\omega_0^2 + b^2} \frac{d\gamma}{da}. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Наконец, в том случае, когда $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ являются *медленно меняющимися функциями амплитуды*, т. е. производные от них по a можно считать малыми порядка ϵ по сравнению с величинами β и γ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -b + \epsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0}, \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \epsilon \gamma(a) \quad (\omega_0^2 = c^2 - b^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Для этого последнего случая можно предложить следующий простой формальный прием решения нелинейного уравнения (7.9) в первом приближении. Произведем «эквивалентную линеаризацию» уравнения (7.9). Для этого разложим его правую часть с подстановкой (7.24) в тригонометрический ряд, ограничиваясь членами с $\sin \psi$ и $\cos \psi$:

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon [g_1(a) \sin \psi + h_1(a) \cos \psi].$$

Замечая, что, согласно (7.24):

$$\sin \psi = \frac{x}{a}, \quad \cos \psi = \frac{1}{a\omega_0} \left(\frac{dx}{dt} + bx \right),$$

и вводя обозначения (7.27), можно записать дифференциальное уравнение (7.9) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[2b - \varepsilon \frac{\beta(a)}{a\omega_0} \right] \frac{dx}{dt} + \left[c^2 + \varepsilon \gamma(a) - \varepsilon \frac{b\beta(a)}{a\omega_0} \right] x = 0. \quad (7.32)$$

Для него запишем характеристическое уравнение формально, как для линейного, в виде

$$p^2 + \left[2b - \varepsilon \frac{\beta(a)}{a\omega_0} \right] p + c^2 + \varepsilon \gamma(a) - \varepsilon \frac{b\beta(a)}{a\omega_0} = 0. \quad (7.33)$$

Решение этого квадратного уравнения дает

$$p = -b + \varepsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0} \pm j \sqrt{c^2 + \varepsilon \gamma(a) - \varepsilon \frac{b\beta(a)}{a\omega_0} - \left[b - \varepsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0} \right]^2}, \quad (7.34)$$

откуда «показатель затухания» и «частота» с точностью до ε^2 будут:

$$\xi = -b + \varepsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0}, \quad \omega^2 = c^2 - b^2 + \varepsilon \gamma(a), \quad (7.35)$$

что совпадает с выражением (7.31), полученным ранее строгим путем. При этом решение имеет вид (7.24). Следовательно, описанная эквивалентная линеаризация может применяться для исследования быстро затухающих нелинейных процессов, если $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ являются медленно меняющимися функциями амплитуды a . В более общих случаях должны применяться формулы (7.30) или (7.29) при той же форме решения (7.24).

Таким образом получено обобщение метода Крылова и Боголюбова, разработанного ими для уравнения (7.1), на полное нелинейное уравнение второго порядка вида (7.9). Однако обычно динамика автоматических систем описывается уравнением более высокого порядка. Поэтому полученные результаты необходимо распространить на нелинейное уравнение высокого порядка, подобно тому как это было сделано в главе II для периодического решения, а затем и для колебательных процессов с медленно меняющейся составляющей.

Применительно к уравнениям, типичным для автоматических систем, это будет сделано в следующем параграфе. Здесь укажем только, что асимптотический метод отыскания решения в двухпараметрической форме (7.2) и (7.3), близкой к синусоидальной (7.5), для системы высокого порядка

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i = \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) + \dots \quad (7.36)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

был развит Н. Н. Боголюбовым (см. [195] или [221], глава IV). Это позволило находить одночастотные свободные колебания с медленно меняющейся амплитудой и частотой в системах высокого порядка. При этом предполагается, что в линейной системе

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7.37)$$

получаемой из (7.36) при $\varepsilon = 0$, возможны незатухающие гармонические колебания вида

$$x = a_0 \sin \omega_0 t. \quad (7.38)$$

Естественно, что при этом на систему накладываются определенные ограничения, которые обеспечивают стремление общего решения этой системы в некоторой области начальных условий к двухпараметрическому решению (7.2) и (7.3).

Обобщение, аналогичное изложенному выше, будет состоять здесь в том, что нужно искать решение системы (7.36) в форме (7.10) и (7.11), полагая, что линейная система (7.37) в определенной области начальных условий имеет решение, близкое к синусоидальному затухающему:

$$x = a_0 e^{-bt} \sin \omega_0 t, \quad (7.39)$$

что обеспечивается соответствующим расположением корней характеристического уравнения этой системы. В результате получается возможность приближенного отыскания быстро затухающих или расходящихся переходных колебательных процессов с медленно меняющимся показателем затухания и частотой в некоторых нелинейных системах высокого порядка.

В заключение напомним, что при выводе уравнений (7.22) и (7.23) осталось неразъясненным разложение в тригонометрический ряд функции $f(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi - b a \sin \psi)$. Дело в том, что a здесь является, согласно (7.12), переменной, близкой к $a_0 e^{-bt}$, причем переменная ψ , по которой происходит разложение, связана тоже с t , согласно (7.12), соотношением, близким к $\psi = \omega_0 t$. Это существенно отличается от применявшегося в прежних главах обычного разложения

нелинейной функции $F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi)$ в тригонометрический ряд Фурье при постоянном A .

Можно сказать, что, в отличие от прежнего разложения в ряд Фурье по одной переменной ψ , теперь нужно раскладывать функцию

$$f[a(t) \sin \psi, a(t) \omega_0 \cos \psi - ba(t) \sin \psi] \quad (7.40)$$

на плоскости двух переменных ψ и t (рис. 7.1) в ряд по тригонометрическим функциям переменной ψ . Представим себе пока, что переменные ψ и t независимы друг от друга. Тогда при всяком фиксированном t разложение функции (7.40) в тригонометрический ряд будет иметь вид обыкновенного ряда Фурье, применявшегося уже в главе II. Геометрически на плоскости (ψ, t) это будет соответствовать пунктирной линии $t = \text{const}$ (например, AB на рис. 7.1). Очевидно, что указанное разложение в ряд Фурье, справедливое для всей линии AB , будет давать правильное значение функции (7.40) в каждой точке этой линии.

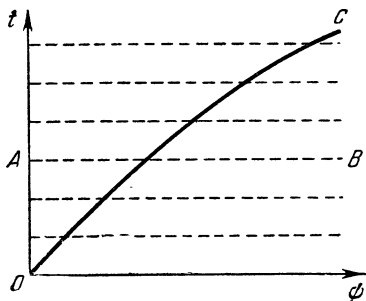


Рис. 7.1.

Далее очевидно, что те же самые обычные формулы коэффициентов ряда Фурье для функции (7.40) будут справедливы для всех ли-

ний $t = \text{const}$ (пунктирные прямые на рис. 7.1) с подстановкой в эти формулы соответствующего значения $a(t)$. Отсюда следует, что обычная формула разложения в ряд Фурье функции (7.40) в виде (7.23) справедлива при любом значении $a(t)$ для всех точек плоскости (рис. 7.1).

Теперь учтем, что переменные ψ и t не независимы друг от друга, а связаны между собой, согласно (7.12), определенной зависимостью, близкой (по крайней мере, в начале) к $\psi = \omega_0 t$. Это означает, что теперь будет использоваться разложение функции (7.40) в тригонометрический ряд не по всей плоскости (ψ, t) , а вдоль некоторой линии OC (рис. 7.1), отвечающей упомянутой зависимости $\psi(t)$. Поскольку было показано, что разложение функции в тригонометрический ряд с использованием обычных формул для коэффициентов ряда Фурье, как в (7.23), справедливо для всех точек плоскости, то оно справедливо и вдоль линии OC , т. е. для любой зависимости $\psi(t)$.

Таким образом показывается законность применения формул обычного способа разложения в тригонометрический ряд, использованного в (7.23), к неустановившимся нелинейным колебаниям с переменной во времени амплитудой $a(t)$. Общая идея изложенного доказательства была сообщена автору профессором Х. Л. Смолицким.

Формальная законность такого разложения в тригонометрические ряды при любом изменении $a(t)$ и $\psi(t)$ не означает, конечно, сохранения за этими рядами всех свойств рядов Фурье и обычного свойства нулевой, первой и высших гармоник, как это было при постоянной амплитуде $a \equiv A$, ибо при произвольном законе изменения амплитуды получаются непериодические составляющие разложения произвольной формы, вследствие чего разложение может не иметь никакой практической ценности.

Однако в рассматриваемой задаче, как уже было сказано, зависимость величины a от t в разлагаемой функции (7.40) близка, по крайней мере на конечном отрезке времени, к функции $a = a_0 e^{-bt}$, а зависимость $\psi(t)$ — к $\psi = \omega_0 t$. Поэтому, в отличие от обычного разложения *периодических* нелинейных колебаний в ряд Фурье на гармоники с постоянными амплитудами и частотами, здесь получается разложение *нелинейных затухающих* колебаний (например, рис. 7.2, в) на затухающие «гармоники» с кратными друг другу медленно меняющимися во времени частотами (рис. 7.2, з, д). Это соответствует постепенному переходу вдоль линии ОС (рис. 7.1) от одной пунктирной прямой к другой с соответственным постепенным уменьшением амплитуды по определенному закону в зависимости от переменной t , отложенной по оси ординат. То же самое можно применить и к расходящимся колебаниям (при $b < 0$).

В результате видно, что в решаемой здесь задаче разложение нестационарных нелинейных колебаний в тригонометрический ряд не только справедливо формально, но и имеет также вполне ясный физический смысл, позволяющий на тех же основаниях, что и в главе II, принимать во внимание первую «гармонику» этого разложения за основную и пренебрегать в первом приближении высшими «гармониками».

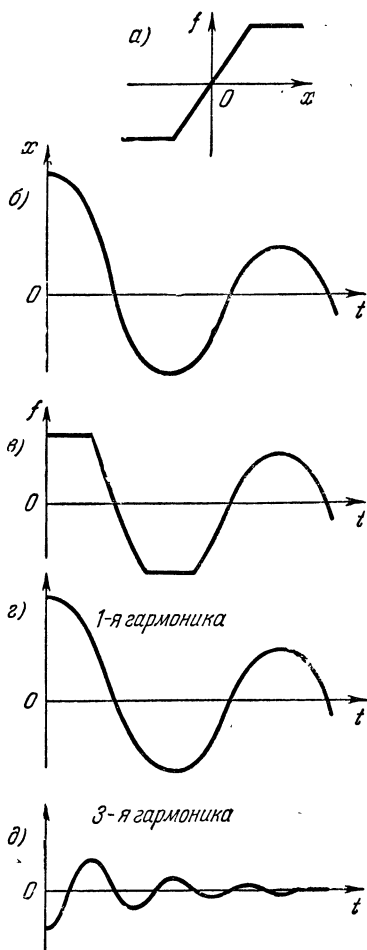


Рис. 7.2.

§ 7.2. Исследование симметричных колебательных переходных процессов

В ближайших двух параграфах будут рассматриваться такие симметричные относительно оси времени колебательные переходные процессы в нелинейной автоматической системе, которые в первом гру-

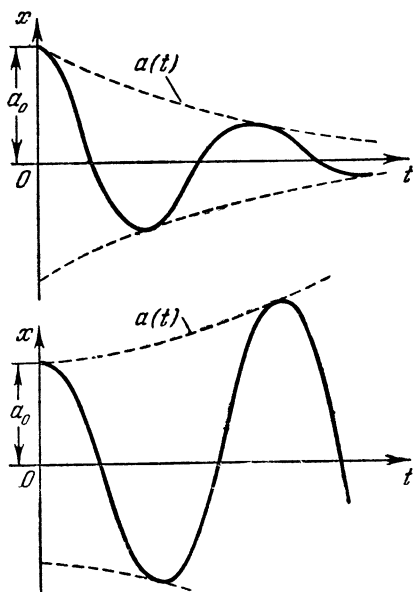


Рис. 7.3.

бом приближении могут быть описаны затухающей или расходящейся синусоидой с медленно меняющимся во времени показателем затухания и с медленно меняющейся во времени частотой (рис. 7.3).

Прежде чем записать это математически, обратим внимание на два существенных обстоятельства. Для линейных систем, когда показатель затухания $\xi = \text{const}$ и частота $\omega = \text{const}$, пишут:

$$x = a_0 e^{\xi t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (7.41)$$

Если же частота ω и показатель затухания ξ в процессе колебаний меняются с течением времени, то решение следует записывать в другом виде. Во-первых, как уже известно из главы V, следует писать $\sin \psi(t)$ и

определять текущее значение частоты в произвольный момент времени в виде

$$\omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad (7.42)$$

причем

$$\psi = \int_0^t \omega dt + \psi_0, \quad (7.43)$$

где ψ_0 — постоянная (начальная фаза). Для линейной системы, когда $\omega = \text{const}$, отсюда получается как частный случай выражение, стоящее под знаком \sin в формуле (7.41). Заметим, что вместо переменности величины ω можно было бы в такого рода нелинейной системе вводить другую переменную φ при $\omega = \text{const}$, т. е. $\psi = \omega_0 t + \varphi(t)$, что дало бы в конце концов тот же самый эффект, причем, согласно (7.42), текущее значение частоты приняло бы вид

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (7.44)$$

Однако в дальнейшем целесообразно придерживаться первого представления (7.42) и (7.43).

Во-вторых, при переменном во времени показателе затухания следует определять текущее значение амплитуды a (рис. 7.3) не в виде $a_0 e^{\xi t}$, как сделано в (7.41), а в виде дифференциальной зависимости

$$\frac{da}{dt} = a\xi. \quad (7.45)$$

Тогда в случае линейной системы, когда $\xi = \text{const}$, получаем как частный случай

$$\frac{da}{a} = \xi dt, \quad a = a_0 e^{\xi t},$$

а в случае нелинейной системы, когда ξ меняется в процессе колебаний, текущее значение амплитуды, согласно (7.45), будет

$$\frac{da}{a} = \xi dt, \quad a = a_0 e^{\int_0^t \xi dt}, \quad (7.46)$$

т. е. огибающая колебаний (рис. 7.3) состоит из элементарных отрезков экспонент с непрерывно меняющимся показателем ξ .

Итак, в указанном в начале параграфа случае целесообразно искать решение для переходного процесса в нелинейной системе как первое приближение в виде

$$x = a \sin \psi, \quad (7.47)$$

$$\frac{da}{dt} = a\xi, \quad \omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad (7.48)$$

причем искомыми неизвестными будем считать медленно меняющиеся величины ξ и ω . Эти величины именуются соответственно показателем затухания и частотой. Изменяемость их во времени говорит об условности применения здесь этих терминов, что надо будет иметь все время в виду и отличать их от соответствующих постоянных величин для линейных систем, а также от постоянной частоты периодических решений (автоколебаний в прежних главах и вынужденных колебаний в главе IX). Поэтому, в отличие от последних, где применялась буква Ω , будем пользоваться здесь новым обозначением ω . По этой же самой причине здесь введено и новое обозначение для амплитуды a вместо прежнего A , применявшегося для периодических решений.

«Показатель затухания» может характеризовать быстроту не только затухания, но и расхождения колебаний. В самом деле, согласно (7.45), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &> 0 & \text{при } \xi > 0, \\ \frac{da}{dt} &< 0 & \text{при } \xi < 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

т. е. положительным значениям «показателя затухания» ξ соответствуют расходящиеся колебания, а отрицательным — затухающие колебания.

Как уже сказано, величины ξ и ω считаются медленно меняющимися функциями. Однако очень важно отметить, что это отнюдь не означает рассмотрения медленно затухающих колебаний, ибо быстрота затухания колебаний определяется полной величиной ξ в данный момент, а не ее изменением. Поскольку постоянные значения ξ могут соответствовать в линейных системах как медленному, так и быстрому затуханию колебаний, то и медленно меняющиеся значения ξ могут характеризовать как те, так и другие процессы. Следовательно, уравнения (7.47) и (7.48) с медленно меняющимися ξ и ω сами по себе пригодны для описания как медленно (при малых ξ), так и быстро затухающих (при больших ξ) процессов, т. е. быстрота изменения амплитуды a в них не ограничена. Ограничения в этом отношении могут накладываться лишь свойствами самой нелинейной системы, если они приводят к нарушению высказанного в начале данного параграфа положения.

Раньше (в главе II) периодическое решение в нелинейной системе считалось близким к синусоидальному, по крайней мере, для одной переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции (или нескольких нелинейностей). Аналогично и здесь считаем переходный процесс для той же самой переменной x в нелинейной системе близким к затухающему или расходящемуся процессу (в том числе и быстро затухающему) в линейной системе с медленно меняющимися параметрами на таком конечном интервале изменения амплитуд, на каком это возможно.

Итак, исходя из соображений наиболее целесообразной формы записи для определенного вида переходных процессов в нелинейных автоматических системах, приходим к выражениям (7.47) и (7.48), которые точно совпадают с принятой в § 7.1 формой решения (7.12) и (7.13). Для этой формы решения в § 7.1 было доказано, что в случаях, когда величины $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ являются медленно меняющимися функциями амплитуды a , можно применять эквивалентную линеаризацию заданного нелинейного уравнения системы. При этом очевидно, что введенные там величины $\gamma(a)$ и $\beta(a)$ аналогичны прежним коэффициентам гармонической линеаризации q и q' .

Базируясь на этом, будем рассматривать [208] соответствующее гармонически линеаризованное дифференциальное уравнение нелинейной системы, отыскивая его решение в виде (7.47) и (7.48).

Формулы гармонической линеаризации нелинейности будут иметь некоторую особенность по сравнению с прежними (2.75) и (2.76). В самом деле, если величина показателя затухания ξ не мала, то, дифференцируя выражение (7.47) по времени как произведение двух функций, с учетом (7.48) находим:

$$p x = a \omega \cos \psi + a \dot{\xi} \sin \psi. \quad (7.50)$$

Отсюда и из (7.47) получаем:

$$\sin \psi = \frac{x}{a}, \quad \cos \psi = \frac{px}{a\omega} - \frac{\xi x}{a\omega} = \frac{p - \xi}{a\omega} x. \quad (7.51)$$

Поэтому первая «гармоника» (затухающая или расходящаяся) нелинейной функции $F(x, px)$ при $x = a(t) \sin \psi(t)$ вместо (2.75) здесь будет

$$F(x, px) = qx + q' \frac{p - \xi}{\omega} x = \left(q - \frac{\xi}{\omega} q' \right) x + \frac{q'}{\omega} px, \quad (7.52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Здесь в общем случае коэффициенты гармонической линейаризации будут зависеть от трех неизвестных: a , ω и ξ . Если же рассматривается нелинейность $F(x)$, как чаще всего бывает, то q и q' сохраняют прежний вид:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

и в этом случае можно целиком использовать материал главы III в виде готовых выражений $q(a)$ и $q'(a)$ для различных конкретных нелинейностей, учитывая, однако, новую форму (7.52) замены нелинейной функции.

Новая усложненная формула гармонической линейаризации (7.52) для колебательных переходных процессов характеризуется наличием члена $-\frac{\xi}{\omega} q' x$, которого не было в употреблявшейся ранее простой форме гармонической линейаризации. Отношение $\frac{\xi}{\omega}$, согласно линейной теории колебаний, определяет собой быстроту затухания ($\xi < 0$) или расхождения ($\xi > 0$) амплитуды колебаний за один период¹⁾.

¹⁾ Термин «период», как и «частота», для затухающих колебаний употребляется условно, но имеет вполне ясный физический смысл.

В самом деле, при постоянных ξ и ω отношение двух амплитуд колебаний, разделенных временем одного периода T , будет

$$\frac{a(t+T)}{a(t)} = \frac{a_0 e^{\xi(t+T)}}{a_0 e^{\xi t}} = e^{\xi T} = e^{2\pi \frac{\xi}{\omega}}.$$

При постоянных значениях ξ и ω (в линейных системах) быстрота уменьшения или увеличения амплитуды колебаний за один период характеризуется следующей таблицей:

ξ/ω	— 0,5	— 0,4	— 0,3	— 0,2	— 0,1	0	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,3
$\frac{a(t+T)}{a(t)}$	0,043	0,081	0,152	0,285	0,534	1	1,87	3,51	6,58

Очевидно, что при медленно меняющихся значениях ξ и ω (т. е. в рассматриваемых здесь нелинейных системах) результат будет несколько иной, зависящий от закона изменения ξ и ω во времени, но все же близкий к цифрам этой таблицы.

Итак, если значения $\left| \frac{\xi}{\omega} \right|$ малы, наблюдаются медленно меняющиеся или расходящиеся колебания, а если значения $\left| \frac{\xi}{\omega} \right|$ достаточно велики, — быстро затухающие или расходящиеся. Практически вводить усложненную форму гармонической линеаризации (7.52) имеет смысл только тогда, когда рассматривается сравнительно быстро затухающий или быстро расходящийся колебательный процесс. При исследовании же колебательных переходных процессов с медленно меняющейся амплитудой, когда показатель затухания ξ мал (точнее, $|\xi| \ll \omega$), можно вследствие общей приближенности метода пренебречь величиной отношения $\frac{\xi}{\omega}$ в выражениях (7.50) — (7.53) и производить гармоническую линеаризацию нелинейности по формулам:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

т. е. по тем же самым формулам, что и для периодического решения (2.76) с заменой лишь постоянной A на переменную a . В связи с этим, в частности, в главе V автоколебательные процессы с медленно меняющейся амплитудой (за счет влияния медленно меняющихся внешних воздействий) рассматривались на основе тех же формул гармонической линеаризации, что и для периодического решения.

Интересно отметить, что в случае однозначной нечетно-симметричной нелинейности $F(x)$, когда $q' = 0$, формула гармонической линеаризации (7.52) принимает вид

$$F(x) = q(a)x, \quad (7.56)$$

совпадающий с таковым для периодического решения с заменой постоянной A на переменную a , что было использовано уже при рассмотрении простейшего примера в § 1.5.

Для иллюстрации изложенного метода гармонической линеаризации рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка типа уравнения Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - b(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

или

$$(p^2 - bp + 1)x + bx^2px = 0. \quad (7.57)$$

В отличие от уравнения Ван-дер-Поля коэффициент b не будем считать малым. Для нелинейности

$$F(x, px) = bx^2px$$

коэффициенты гармонической линеаризации, вычисленные по формулам (7.53), будут:

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} ba^2 \sin^2 \psi (a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{3b}{4} a^2 \xi,$$

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} ba^2 \sin^2 \psi (a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{b}{4} a^2 \omega.$$

Поэтому, согласно (7.52), в заданном уравнении необходимо сделать следующую замену:

$$bx^2px = \left(\frac{3b}{4} a^2 \xi - \frac{\xi}{\omega} \frac{b}{4} a^2 \omega \right) x + \frac{b}{4} a^2 px,$$

после чего уравнение (7.57) принимает вид

$$\left[p^2 - b \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) p + 1 + \frac{b}{2} a^2 \xi \right] x = 0.$$

Решая его характеристическое уравнение, находим корни

$$p_{1,2} = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \pm j \sqrt{1 + \frac{b}{2} a^2 \xi - \frac{b^2}{4} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right)^2}.$$

Вещественная часть корня будет представлять собой показатель затухания колебаний, т. е.

$$\xi = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right), \quad (7.58)$$

а мнимая часть корня — частоту колебаний, а именно:

$$\omega^2 = 1 - \frac{b^2}{4} \left(1 - \frac{3}{2} a^2 + \frac{5}{16} a^4 \right). \quad (7.59)$$

Отсюда видно, что при $\xi = 0$ имеем:

$$a = A = 2, \quad \omega = \Omega = 1.$$

Это будут амплитуда и частота автоколебаний. Они устойчивы, потому что $\xi < 0$ при $a > 2$ и $\xi > 0$ при $a < 2$. На основании формул (7.48) и (7.58) можем определить закон изменения амплитуды колебаний в переходном процессе, а именно:

$$t = \int_{a_0}^a \frac{da}{a_2(a)} = \frac{8}{b} \int_{a_0}^a \frac{da}{a(4-a^2)} = \frac{1}{b} \left(\ln \frac{a^2}{|4-a^2|} - \ln \frac{a_0^2}{|4-a_0^2|} \right),$$

откуда

$$a = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + (4-a_0^2)e^{-bt}}} = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2}bt}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}a_0^2(e^{bt} - 1)}}.$$

В полученном здесь решении задачи все совпадает с решением по первому приближению асимптотического метода Крылова и Боголюбова (см. [221], стр. 70), кроме частоты ω , которая там независимо от амплитуды равна единице. В полученном же здесь решении (при конечном коэффициенте b) обнаруживается зависимость (7.59) частоты от амплитуды. Если же $b = \epsilon$ мало, то величиной $b^2 = \epsilon^2$ в выражении для частоты можно пренебречь, и мы получим тоже $\omega = 1$.

В общем случае для нелинейных систем первого класса основного типа (см. § 1.2) дифференциальное уравнение переходного процесса будет иметь высокий порядок:

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (7.60)$$

После гармонической линеаризации это уравнение в общем случае, согласно (7.52), принимает вид

$$Q(p)x + R(p)\left(q + \frac{p - \dot{\omega}}{\omega}q'\right)x = 0, \quad (7.61)$$

а в более простых случаях, согласно (7.56):

$$Q(p)x + q(a)R(p)x = 0. \quad (7.62)$$

Колебательный процесс в линейной системе, описываемый решением (7.41), соответствует паре комплексных корней характеристического уравнения $p = \xi \pm j\omega$ с *постоянными* значениями ξ и ω . Аналогично и колебательный процесс в нелинейной системе, описываемый приближенно формулами (7.47) и (7.48), определяется *мед-*

ленно меняющимися значениями ξ и ω , которые можно находить путем определения пары комплексных корней $p = \xi \pm j\omega$ характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы (7.61) или (7.62).

В соответствии с этим в характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p) \left(q + \frac{p - \xi}{\omega} q' \right) = 0 \quad (7.63)$$

подставим $p = \xi + j\omega$ для определения значений ξ и ω , удовлетворяющих этому уравнению. Получим:

$$Q(\xi + j\omega) + R(\xi + j\omega)(q + jq') = 0. \quad (7.64)$$

Подстановку значения $\xi + j\omega$ вместо p в любой многочлен удобно выполнять путем разложения его в ряд по степеням $j\omega$, например:

$$Q(\xi + j\omega) = Q(\xi) + \left(\frac{dQ}{dp} \right)_{\xi} j\omega + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2Q}{dp^2} \right)_{\xi} (j\omega)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n Q}{dp^n} \right)_{\xi} (j\omega)^n, \quad (7.65)$$

где индекс ξ означает, что в выражения производных надо подставить ξ вместо p . По такой же формуле разлагается в ряд и многочлен $R(\xi + j\omega)$.

При малых значениях ξ (для медленно затухающих процессов) вместо (7.65) удобнее применять разложение по степеням ξ , ограничиваясь его первой степенью, а именно:

$$\left. \begin{aligned} Q(\xi + j\omega) &= Q(j\omega) + \left(\frac{dQ}{dp} \right)_{j\omega} \xi, \\ R(\xi + j\omega) &= R(j\omega) + \left(\frac{dR}{dp} \right)_{j\omega} \xi, \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

где индекс $j\omega$ означает подстановку $j\omega$ вместо p в выражения для производных.

Для уравнения (7.62), т. е. в случае однозначной нечетно-симметричной нелинейной, получаем:

$$Q(\xi + j\omega) + R(\xi + j\omega)q(a) = 0, \quad (7.67)$$

причем в зависимости от величины ξ применяется либо формула (7.65), либо (7.66).

В комплексном уравнении (7.64) или (7.67) содержатся три неизвестные: ξ , ω и a , причем последняя входит в q и q' . Поэтому указанное комплексное уравнение позволяет найти две переменные как функцию третьей:

$$\xi = \xi(a) \quad \text{и} \quad \omega = \omega(a), \quad (7.68)$$

т. е. изменение показателя затухания ξ и частоты ω с изменением амплитуды a затухающего или расходящегося колебательного процесса в нелинейной системе.

Когда функции (7.68) найдены, можно, пользуясь двумя дифференциальными уравнениями первого порядка (7.48), найти $a(t)$ и $\psi(t)$ для первого приближения искомого решения нелинейного уравнения (7.60) в форме (7.47). Интегралы уравнения (7.48) имеют при заданных начальных условиях ($a = a_0$, $\psi = \psi_0$ при $t = 0$) следующие выражения:

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a \dot{z}(a)} = t, \quad \psi = \int_0^t \omega(a) dt + \psi_0, \quad (7.69)$$

где $\xi(a)$ и $\omega(a)$ — найденные ранее функции (7.68). Из первого уравнения (7.69) определяется $a(t)$, а из второго $\psi(t)$ после подстановки в него $a(t)$ из первого. В результате получаем решение

$$x = a(t) \sin \psi(t). \quad (7.70)$$

Операция интегрирования (7.69) во многих случаях для оценки качества переходных процессов в автоматических системах не нужна. В большинстве случаев вполне достаточно бывает ограничиться нахождением функций (7.68) из комплексного алгебраического уравнения (7.64), так как качество симметричного колебательного переходного процесса вполне может быть охарактеризовано величинами ξ , ω и их отношением $\frac{\xi}{\omega}$, а также характером их изменения в зависимости от амплитуды колебаний и от параметров системы. Об этом подробнее будет сказано в § 7.3.

Здесь необходимо отметить еще раз, что величины ξ и ω считаются медленно меняющимися функциями времени. Следовательно, этим свойством должны обладать и корни $p = \xi \pm j\omega$ характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы. Это налагает определенные ограничения на изменение коэффициентов характеристического уравнения, зависящих через q и q' от амплитуды a . Прежде всего требуется плавность зависимости q и q' от a , но могут потребоваться и более жесткие условия. Такого рода условия ограничивают длину участка по времени (или по размеру амплитуды), на котором переходный процесс в нелинейной системе может быть описан с помощью квазилинейных соотношений (7.47) и (7.48) с медленно меняющимися ξ и ω , а также ограничивает степень быстроты затухания амплитуды колебаний, т. е. верхний предел величины $\left| \frac{\xi}{\omega} \right|$.

Другим важным обстоятельством является то, что решение дифференциального уравнения высокого порядка ищется здесь в форме (7.70) с двумя произвольными постоянными a_0 и ψ_0 , в то время как их должно быть в общем случае n (равному общему порядку системы), т. е. поведение системы с несколькими степенями свободы считается близким к поведению системы с одной степенью свободы. Разумеется, что это может иметь место только при определенных условиях,

когда в системе наблюдаются явно выраженные симметричные затухающие или расходящиеся колебания.

В линейных системах автоматического регулирования и в линейных следящих системах, особенно электромеханических, это часто встречается. Обычно для этого в линейной теории считается достаточным, чтобы ближайшие к мнимой оси два корня характеристического уравнения были комплексными, а остальные — любыми, но расположенными значительно левее. При этом не безразличны также и начальные условия. Лучше всего требуемые условия соблюдаются при наличии лишь начального отклонения и нулевых значениях всех производных (отработка системой начального рассогласования).

Будем принимать такие же начальные условия и для нелинейных систем при исследовании переходных процессов в виде симметричных затухающих колебаний, показанных на рис. 7.3. Тогда начальное значение амплитуды a_0 будет совпадать с величиной начального отклонения, а начальная фаза $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Однако такой подход к решению задачи, как будет видно потом на примерах, дает хорошие результаты также и при несколько других начальных условиях.

§ 7.3. Диаграммы качества затухания нелинейных колебаний

Качество симметричных колебательных переходных процессов в нелинейных автоматических системах, поддающихся исследованию методами, изложенными в §§ 7.1 и 7.2, в основных чертах характеризуется величинами показателя затухания ξ и частоты ω в зависимости от размера амплитуды колебаний a . Наиболее важно при этом суметь проследить изменение этих показателей качества при изменении основных параметров системы с целью наилучшего выбора этих параметров при проектировании автоматической системы (подобно тому как раньше определялись амплитуда A и частота Ω автоколебаний в зависимости от параметров системы).

Эта цель достигается построением так называемых *диаграмм качества* затухания симметричных нелинейных колебаний [208]. Диаграмма на рис. 7.4 представляет собой семейство линий $\xi = \text{const}$ и линии $\omega = \text{const}$ на плоскости с координатами k, a , причем k означает какой-либо из основных подлежащих выбору параметров системы (коэффициент усиления или др.).

Для линейной системы линии $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ в тех же координатах имели бы вид вертикальных прямых, так как показатель затухания и частота колебательных переходных процессов в линейной системе не зависят от размера амплитуды колебаний a и меняются только с изменением параметров системы (в данном случае k). В нелинейной же системе эти линии искривляются (рис. 7.4) или просто наклоняются в зависимости от формы нелинейности и от общей

структуры системы. Это выражает собой изменение показателя затухания ξ и частоты ω нелинейных колебательных переходных процессов с изменением размера амплитуды колебаний a .

Значение $\xi = 0$ соответствует отсутствию затухания, т. е. сохранению постоянной амплитуды $a = A$ с течением времени. Например, точке C (рис. 7.4) соответствуют колебания с постоянной амплитудой A_c (автоколебания). Поэтому линия $\xi = 0$ на диаграмме качества затухания (рис. 7.4) представляет собой не что иное, как зависимость

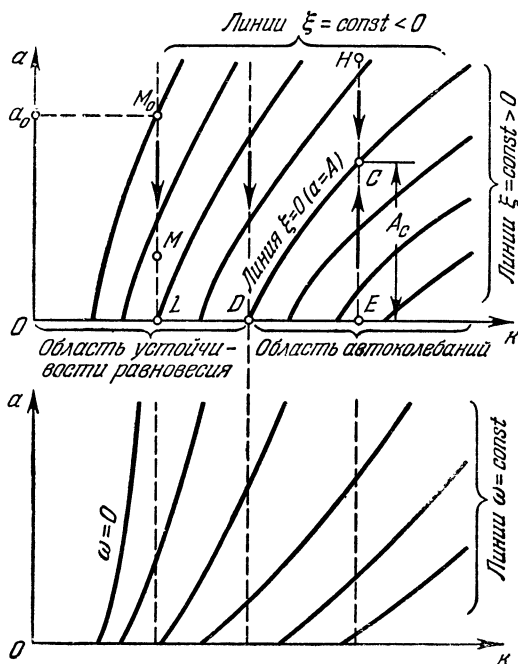


Рис. 7.4.

амплитуды автоколебаний A от параметра системы k , которая определялась ранее в главах II и IV. По одну сторону от этой линии лежат линии $\xi = \text{const} > 0$, а по другую — линии $\xi = \text{const} < 0$. Первые соответствуют расходящимся колебаниям, а вторые — затухающим.

Протеканию переходного процесса во времени соответствует движение изображающей точки M по вертикали (так как амплитуда a в переходном процессе меняется, а коэффициент усиления k сохраняется постоянным), как указано на рис. 7.4 пунктиром и стрелками. Например, значению k в точке L соответствует вертикальная прямая M_0L . Поскольку эта прямая пересекает линии только с отрицательными значениями ξ , то колебания в переходном процессе будут

затухать, т. е. изображающая точка M будет двигаться из некоторого начального положения M_0 (где задана начальная амплитуда a_0) вниз. Процесс изменения амплитуды во времени показан на рис. 7.5, а. Изменение частоты $\omega(a)$ определяется при этом по соответствующей вертикали на нижнем рис. 7.4.

В том случае, когда параметр k в исследуемой системе имеет значение, соответствующее точке E (рис. 7.4), получается два варианта протекания переходного процесса. Если начальное положение изображающей точки будет ниже точки C ($a_0 < A_c$), то $\xi > 0$, т. е. колебания расходятся и изображающая точка идет, как показано стрелкой на прямой EC , асимптотически приближаясь к точке C . Это соответствует процессу изменения амплитуды колебаний во времени, изображенному на рис. 7.5, б. Если же $a_0 > A_c$, то $\xi < 0$ и изображающая точка пойдет по прямой HC вниз (рис. 7.4), что соответствует затухающему переходному процессу (рис. 7.5, в), асимптотически приближающемуся к автоколебаниям с амплитудой A_c .

Процессы, аналогичные этому, будут иметь место при любом значении параметра k правее точки D (рис. 7.4). Следовательно, область значений параметра k , лежащая правее точки D , является областью существования автоколебаний, к которым сходятся колебательные переходные процессы с обеих сторон (снизу и сверху). При этом положение равновесия (любая точка $a = 0$ на оси абсцисс) в данной области значений параметра k является неустойчивым, так как колебания в переходном процессе от него расходятся, стремясь к другому устойчивому состоянию — автоколебательному режиму.

Левее же точки D (рис. 7.4) лежат значения параметра k , при которых переходный процесс затухает от любой начальной амплитуды a_0 до нуля. Это есть область устойчивости равновесного состояния системы. Левее линии $\omega = 0$ (рис. 7.4) лежит обычно область монотонных переходных процессов, которые не исследуются излагаемым здесь методом гармонической линеаризации.

Итак, если диаграммы качества затухания нелинейных колебаний для разных структурных схем какой-либо автоматической системы построены по различным параметрам (k и др.), то они могут служить хорошим материалом для выбора наилучших параметров системы при ее проектировании или синтезе [231].

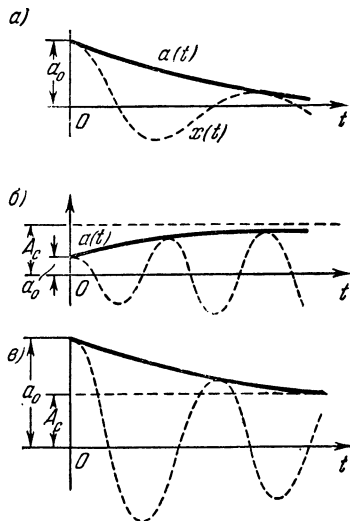


Рис. 7.5.

Обратимся теперь к способам построения этих диаграмм [215].

Первый способ. Пусть нелинейная *система первого класса* описывается дифференциальным уравнением высокого порядка

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (7.71)$$

Произведя гармоническую линеаризацию нелинейности, согласно (7.52), получаем характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p)\left(q + \frac{p - \xi}{\omega}q'\right) = 0. \quad (7.72)$$

Подстановка $p = \xi + j\omega$ дает выражение

$$Q(\xi + j\omega) + R(\xi + j\omega)(q + jq') = 0, \quad (7.73)$$

где $Q(\xi + j\omega)$ и $R(\xi + j\omega)$ в общем случае, согласно (7.65), имеют вид конечных рядов по степеням $j\omega$ с коэффициентами, зависящими от ξ . В выражения q и q' входит амплитуда a и, кроме того, могут входить также показатель затухания ξ и частота ω .

Выделив в уравнении (7.73) вещественную X и мнимую Y части, подобно тому как это делалось в § 2.3, получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X(a, \omega, \xi) &= 0, \\ Y(a, \omega, \xi) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7.74)$$

в отличие от § 2.3 в этих уравнениях содержатся три неизвестные. Решение этих уравнений относительно ω и ξ в принципе позволяет определить функции $\omega(a)$ и $\xi(a)$. Однако фактически такое решение в явном виде возможно в редких случаях (в основном для уравнений второго порядка, как (7.58) в примере с уравнением Ван-дер-Поля, и для некоторых систем высокого порядка при малом ξ , как, например, решение (1.102), когда учитывалась только первая степень ξ).

В общем случае для систем высокого порядка целесообразно поступать следующим образом. Пусть требуется построить диаграмму качества затухания нелинейных колебаний по некоторому параметру системы k , который входит в коэффициенты уравнений (7.74). Выразив на основании одного из уравнений (7.74) величину

$$\omega = f_1(a, \xi, k) \quad (7.75)$$

и подставив ее в другое из уравнений (7.74), найдем:

$$k = f_2(a, \xi). \quad (7.76)$$

Тогда, придавая ξ различные постоянные значения, по (7.76) можно легко построить семейство линий $\xi = \text{const}$ на диаграмме качества (рис. 7.4). Затем, используя (7.75), можно построить также семейство линий $\omega = \text{const}$.

Второй способ. Характеристическое уравнение системы *первого класса* (7.72) можно записать в развернутом виде:

$$p^n + A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \dots + A_{n-1} p + A_n = 0, \quad (7.77)$$

где все коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n или часть из них являются функциями искомых величин a, ω и ξ (в простейших задачах только от a). Разложим левую часть уравнения (7.77) на два сомножителя:

$$p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_n = (p^{n-2} + C_1 p^{n-3} + \dots + C_{n-2})(p^2 + B_1 p + B_2), \quad (7.78)$$

последний из которых соответствует основной паре комплексных корней $p_{1,2} = \xi \pm j\omega$, определяющей колебательный переходный процесс в исследуемой системе. Тогда получаем:

$$\xi = -\frac{B_1}{2}, \quad \omega^2 = B_2 - \xi^2. \quad (7.79)$$

Первый из сомножителей (7.78) должен иметь значительно большие по модулю корни, чем второй, чтобы колебательное решение, соответствующее искомым корням $p_{1,2}$ при принятых начальных условиях ($x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$), было основным.

Коэффициенты разложения (7.78) связаны следующими соотношениями:

$$A_1 = C_1 + B_1, \quad A_2 = B_2 + C_2 + B_1 C_1, \quad \dots, \quad A_n = C_{n-2} B_2.$$

Для нахождения величин ξ и ω необходимо, очевидно, в формулах (7.79) выразить коэффициенты B_1 и B_2 через коэффициенты первоначального уравнения (7.77).

В частности, для характеристического уравнения третьей степени

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = (p + C_1)(p^2 + B_1 p + B_2)$$

имеем:

$$A_1 = C_1 + B_1, \quad A_2 = B_2 + B_1 C_1, \quad A_3 = C_1 B_2. \quad (7.80)$$

Чтобы значения ξ и ω (7.79) определяли основную часть решения, а третий корень уравнения можно было не учитывать, нужно

$$C_1 \gg \left| \frac{B_1}{2} \right| \quad \text{или} \quad A_1 \gg |\xi|, \quad (7.81)$$

чем определяется верхний предел для значений $|\xi|$, которые следует брать при построении диаграммы качества затухания нелинейных колебаний.

Составим предпоследний определитель Гурвица:

$$H_{n-1} = A_1 A_2 - A_3 = (C_1 + B_1)(B_2 + B_1 C_1) - C_1 B_2 = B_1(B_2 + C_1^2 + C_1 B_1).$$

Но так как из (7.80) и (7.79) следует, что $B_2 + C_1 B_1 = A_2$, $C_1^2 = (A_1 - B_1)^2$, $B_1 = -2\xi$, то полученное выше выражение можно записать в виде

$$\xi = -\frac{H_{n-1}}{2[A_2 + (A_1 + 2\xi)^2]} = -\frac{A_1 A_2 - A_3}{2[A_2 + (A_1 + 2\xi)^2]}. \quad (7.82)$$

Далее, поскольку из (7.80) следует:

$$B_2 = \frac{A_3}{C_1} = \frac{A_3}{A_1 - B_1},$$

то из (7.79) получаем формулу для квадрата частоты

$$\omega^2 = \frac{A_3}{A_1 + 2\xi} - \xi^2. \quad (7.83)$$

Формулы (7.82) и (7.83) позволяют построить диаграммы качества затухания нелинейных колебательных переходных процессов для систем третьего порядка.

Аналогично для *системы четвертого порядка* получаем:

$$\begin{aligned} p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4 &= \\ &= (p^2 + C_1 p + C_2)(p^2 + B_1 p + B_2), \end{aligned} \quad (7.84)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= C_1 + B_1, & A_2 &= C_2 + B_2 + C_1 B_1, \\ A_3 &= C_1 B_2 + B_1 C_2, & A_4 &= C_2 B_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.85)$$

Здесь требуется соблюдение того же условия (7.81).

Исходя из выражения предпоследнего определителя Гурвица, аналогичным путем находим формулы:

$$\xi = - \frac{H_{n-1}}{2(A_1 + 2\xi) \{ [A_2 + (A_1 + 2\xi) 2\xi]^2 - 4A_4 + A_1 A_3 \}}, \quad (7.86)$$

где

$$H_{n-1} = A_3 (A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4,$$

а затем

$$\omega^2 = \frac{A_4 (A_1 + 4\xi)}{(A_1 + 2\xi) (A_2 + 2\xi) - A_3} - \xi^2. \quad (7.87)$$

Формулы (7.86) и (7.87) позволяют построить диаграммы качества для нелинейных систем четвертого порядка. Применение этих формул будет проиллюстрировано на примерах.

Третий способ. Если в двух предыдущих способах шла речь об определении симметричных колебательных переходных процессов в любых нелинейных системах первого класса, то третий способ будет дан для более простого, но часто встречающегося частного случая, когда коэффициенты гармонической линеаризации q и q' зависят только от амплитуды a и не зависят от частоты ω и показателя затухания ξ , что имеет место для нелинейностей вида $F(x)$. В этом случае после подстановки в характеристическое уравнение $p = \xi + j\omega$ выражение (7.73) можно представить в виде

$$W_a(\xi + j\omega) = - \frac{1}{W_B(a)}, \quad (7.88)$$

где обозначено

$$W_a(a) = q(a) + jq'(a), \quad W_a(\xi + j\omega) = \frac{R(\xi + j\omega)}{Q(\xi + j\omega)}, \quad (7.89)$$

причем числитель и знаменатель последнего выражения представляют собой, согласно (7.65), многочлены по степеням $j\omega$ с коэффициентами, зависящими от ξ .

Задаваясь различными постоянными значениями ξ , построим серию кривых $W_n(\xi + j\omega)$ как функций от $j\omega$ при $\xi = \text{const}$ (рис. 7.6) аналогично тому, как обычно строятся амплитудно-фазовые характеристики линейной части системы. На том же графике (рис. 7.6) нанесем линию

$-\frac{1}{W_n(a)}$. Точки пересечения ее с линиями $W_n(\xi + j\omega)$ определяют собой решение уравнения (7.88), а именно для каждого значения ξ в этих точках пересечения получаются соответствующие значения a (по кривой $-\frac{1}{W_n(a)}$) и ω (по кривой $W_n(\xi + j\omega)$). Этим самым определяется качество колебательного переходного процесса при всех заданных параметрах системы, т. е. определяются точки одной вертикали на диаграмме качества (рис. 7.4). Повторив такие же построения (рис. 7.6) для различных значений выбираемого параметра системы k , можно построить и всю диаграмму качества (рис. 7.4).

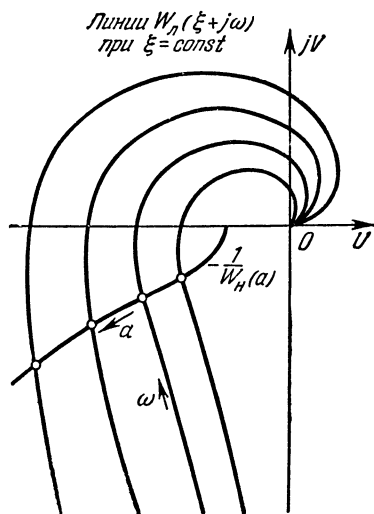


Рис. 7.6.

Четвертый способ. Пусть имеется нелинейная система второго класса (см. § 1.2), описываемая, например, уравнениями:

$$Q_1(p)x_1 = -R_1(p)x_2, \quad (7.90)$$

$$Q_2(p)x_2 = R_2(p)x_1 + R_3(p)F(x_1, px_1, x_2), \quad (7.91)$$

в которых под знаком нелинейности входят две переменные x_1 и x_2 (могут входить также и их производные), в то время как в системах первого класса фигурировала лишь одна переменная (в общем случае со своей производной).

Две переменные x_1 и x_2 здесь связаны линейным уравнением (7.90). Поэтому если найдено решение для первой из них в виде

$$x_1 = a \sin \psi, \quad (7.92)$$

то для другой будем иметь:

$$x_2 = a_2 \sin(\psi + \varphi), \quad (7.93)$$

где величина φ и отношение a_2 к a полностью определяются уравнением связи (7.90). Найдём это соотношение, помня, что

рассматриваются неустановившиеся колебания в переходном процессе, когда $a = a(t)$, причем, согласно (7.48):

$$\frac{da}{dt} = a \xi(t), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(t). \quad (7.94)$$

Воспользуемся символической записью ¹⁾:

$$x_1 = ae^{j\psi}, \quad x_2 = a_2 e^{j(\psi+\varphi)}. \quad (7.95)$$

Из (7.95) с учетом (7.94) находим:

$$\begin{aligned} px_1 &= \frac{da}{dt} e^{j\psi} + ja \frac{d\psi}{dt} e^{j\psi} = ae^{j\psi} (\xi + j\omega), \\ p^2 x_1 &= \frac{da}{dt} e^{j\psi} (\xi + j\omega) + ja \frac{d\psi}{dt} e^{j\psi} (\xi + j\omega) + ae^{j\psi} \left(\frac{d\xi}{dt} + j \frac{d\omega}{dt} \right) = \\ &= ae^{j\psi} \left[(\xi + j\omega)^2 + \frac{d\xi}{dt} + j \frac{d\omega}{dt} \right], \\ p^3 x_1 &= ae^{j\psi} [(\xi + j\omega)^3 + 3(\xi + j\omega) \left(\frac{d\xi}{dt} + j \frac{d\omega}{dt} \right) + \frac{d^2 \xi}{dt^2} + j \frac{d^2 \omega}{dt^2}] \end{aligned}$$

и т. д. Но, как видно из §§ 7.1 и 7.2, здесь рассматриваются такие нелинейные колебательные переходные процессы, в которых ξ и ω являются медленно меняющимися функциями. Поэтому производными от них можно пренебречь и записать:

$$\begin{aligned} px_1 &= (\xi + j\omega) ae^{j\psi}, & px_2 &= (\xi + j\omega) a_2 e^{j(\psi+\varphi)}, \\ p^2 x_1 &= (\xi + j\omega)^2 ae^{j\psi}, & p^2 x_2 &= (\xi + j\omega)^2 a_2 e^{j(\psi+\varphi)}, \\ p^3 x_1 &= (\xi + j\omega)^3 ae^{j\psi}, & p^3 x_2 &= (\xi + j\omega)^3 a_2 e^{j(\psi+\varphi)}, \\ &\dots & \dots & \end{aligned}$$

Подставив это в уравнение (7.90), получим:

$$Q_1(\xi + j\omega) ae^{j\psi} = -R_1(\xi + j\omega) a_2 e^{j(\psi+\varphi)},$$

откуда находим:

$$a_2 = a \left| \frac{Q_1(\xi + j\omega)}{R_1(\xi + j\omega)} \right|, \quad (7.96)$$

$$\varphi = \arg \frac{-Q_1(\xi + j\omega)}{R_1(\xi + j\omega)}. \quad (7.97)$$

Далее из (7.93) и (7.92) получим:

$$x_2 = a_2 \cos \varphi \sin \psi + a_2 \sin \varphi \cos \psi$$

¹⁾ Точнее, перед обоими комплексными выражениями надо было бы поставить знак Im , но это не повлияет на результат.

или, используя (7.96) и (7.97):

$$x_2 = U_1(\xi, \omega) a \sin \psi + V_1(\xi, \omega) a \cos \psi, \quad (7.98)$$

где

$$U_1(\xi, \omega) = \operatorname{Re} \frac{-Q_1(\xi + j\omega)}{R_1(\xi + j\omega)}, \quad V_1(\xi, \omega) = \operatorname{Im} \frac{-Q_1(\xi + j\omega)}{R_1(\xi + j\omega)}. \quad (7.99)$$

Выражение (7.98) и будем подставлять вместо x_2 под знак нелинейности (7.91) при ее гармонической линеаризации. Таким образом, по аналогии с формулой (7.52) здесь получим:

$$F(x_1, px_1, x_2) = qx_1 + q' \frac{p - \xi}{\omega} x_1, \quad (7.100)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_1, px_1, x_2) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_1, px_1, x_2) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.101)$$

В этих выражениях $x_1 = a \sin \psi$, $px_1 = a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi$, а вместо x_2 подставляется (7.98).

В результате характеристическое уравнение системы (7.90) и (7.91) примет вид

$$Q_1(p) Q_2(p) + R_1(p) R_2(p) + R_1(p) R_3(p) \left(q + \frac{p - \xi}{\omega} q' \right) = 0.$$

Как видно, для нелинейных систем второго класса после гармонической линеаризации получается характеристическое уравнение того же вида (7.72), что и для систем первого класса, причем

$$Q(p) = Q_1(p) Q_2(p) + R_1(p) R_2(p), \quad R(p) = R_1(p) R_3(p).$$

Следовательно, дальше для построения диаграмм качества можно применить любой из первых двух способов, описанных выше.

Пятый способ. Для исследования нелинейных систем *третьего класса*, т. е. систем, в которых одновременно имеются нелинейности от разных переменных, связанных между собой нелинейными уравнениями (см. § 1.2), нужно тоже пользоваться соотношением типа (7.96) между амплитудами колебаний разных переменных. Отличие здесь будет состоять только в том, что в выражение (7.96) войдут не только линейные, но и нелинейные члены в гармонически линеаризованном виде. Например, если система описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(p) x_2 &= R_1(p) F_1(x_1, px_1), \\ Q_2(p) x_1 &= -R_2(p) F_2(x_2, px_2), \end{aligned} \right\} \quad (7.102)$$

то, считая

$$x_1 = a \sin \psi, \quad x_2 = a_2 \sin (\psi + \varphi), \quad (7.103)$$

производим гармоническую линеаризацию каждой нелинейности по отдельности:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, px_1) &= \left(q_1 + q'_1 \frac{p + \xi}{\omega} \right) x_1, \\ F_2(x_2, px_2) &= \left(q_2 + q'_2 \frac{p - \xi}{\omega} \right) x_2, \end{aligned} \right\} \quad (7.104)$$

где q_1 , q'_1 , q_2 , q'_2 вычисляются по формулам (7.53) с заменой только a на a_2 во втором случае. Входящую во вторую из формул (7.104) величину a_2 надо заменить через a . Для этого по аналогии с (7.96) на основании первого из уравнений (7.102) записываем:

$$a_2 = a \left| \frac{R_1(\xi + j\omega)}{Q_1(\xi + j\omega)} \right| \sqrt{q_1'^2 + (q_1')^2}. \quad (7.105)$$

После этого характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы (7.102)

$$Q_1(p) Q_2(p) + R_1(p) R_2(p) \left(q_1 + q'_1 \frac{p - \xi}{\omega} \right) \left(q_2 + q'_2 \frac{p - \xi}{\omega} \right) = 0$$

может исследоваться любым из первых двух способов, изложенных выше. При этом обязательным является выполнение всех указанных в начале § 2.3 условий для каждого из уравнений (7.102) по отдельности.

Заметим, что во всех изложенных способах при достаточно малых значениях показателя затухания можно вместо (7.65) применять более простые выражения (7.66).

§ 7.4. Применение диаграмм для определения качества переходных процессов

Диаграммы качества затухания нелинейных колебаний всегда дают очень наглядное представление о влиянии той или иной нелинейности на качество переходных процессов в автоматических системах, если эти переходные процессы близки к симметричным затухающим или расходящимся колебаниям, изображающимся достаточно плавными кривыми (об оценке качества других видов переходных процессов речь будет в следующих параграфах).

От вида нелинейности, а также и от общей структуры системы существенно зависит расположение линий $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ на диаграмме. Например, если нелинейность в автоматической системе имеет зону нечувствительности шириной $2b$, то диаграмма качества вместо рис. 7.4 может принять вид рис. 7.7. При этом в области устойчивости амплитуда уменьшается уже не до нуля, а до значения $a = b$ с по-

следующей остановкой процесса в любой точке внутри зоны нечувствительности ($|x| < b$).

В системе с нелинейностью, содержащей линейный участок около начала координат шириной $2b$ (рис. 7.8), вначале (при $a \leq b$) линии $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ будут иметь вид вертикальных прямых, как для всякой линейной системы, а затем ($a > b$) будут искривляться за счет нелинейности (в данном случае — насыщения). На рис. 7.8 показан один возможный вариант диаграммы качества затухания нелинейных колебаний, когда граница устойчивости нелинейной системы (точка D)

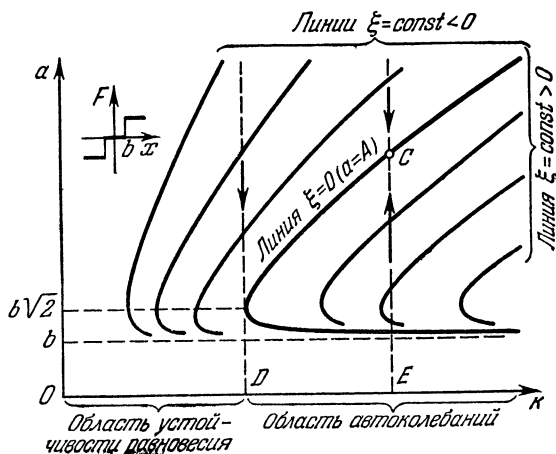


Рис. 7.7.

совпадает с границей устойчивости соответствующей линейной системы, но возможны и другие случаи.

Хотя в данном случае границы устойчивости совпадают, поведение нелинейной системы на границе устойчивости существенно отличается от поведения линейной системы. В самом деле, колебания с постоянной амплитудой, которые бывают на границе устойчивости в линейной системе, здесь наблюдаются, согласно рис. 7.8, только при начальных амплитудах $a_0 \leq b$. При больших начальных амплитудах ($a_0 > b$) в данной нелинейной системе на границе ее устойчивости происходит, согласно рис. 7.8, *затухающий* колебательный процесс, по окончании которого устанавливаются колебания постоянной амплитуды $a = b$, т. е. на верхней границе линейного участка нелинейной характеристики. В других примерах картина поведения системы на границе устойчивости может быть иной. В случае рис. 7.7 на границе устойчивости нелинейной системы в результате переходного процесса устанавливаются колебания с амплитудой $a = b\sqrt{2}$, а в случае рис. 7.4 на границе устойчивости системы происходит затухание переходного процесса до нуля.

Как видим, во всех случаях поведение нелинейной системы на границе устойчивости принципиально отличается от поведения линейной системы на колебательной границе устойчивости, где всегда возникают колебания с постоянной амплитудой, зависящей от начальных условий. Таким образом, в линейной системе граница устойчивости всегда является *опасной*, ибо при малейшем переходе за нее развиваются неограниченно

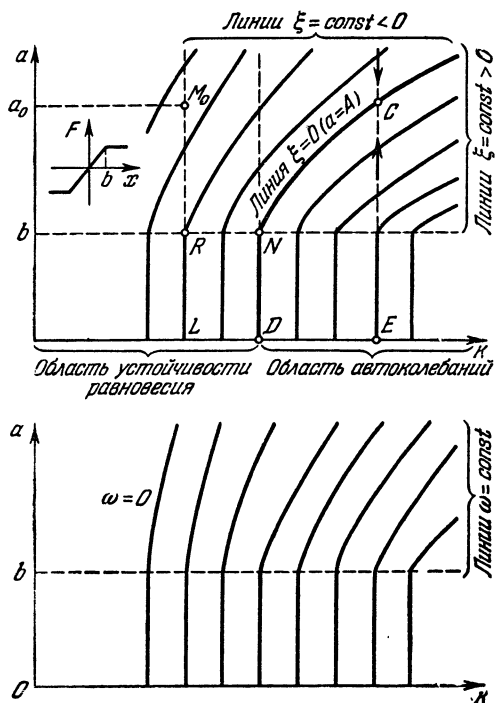


Рис. 7.8.

расходящиеся колебания. В нелинейных же системах возможны *безопасные* границы устойчивости. Наглядным примером этому является диаграмма на рис. 7.4, где колебания с большой начальной амплитудой затухают не только в области устойчивости и на границе ее (точка D), но и при переходе за эту границу, причем справа от точки D вблизи нее устанавливаются неопасные автоколебания с малой амплитудой.

По диаграмме рис. 7.8 можно судить о влиянии нелинейности типа насыщения на переходные процессы по сравнению с процессами в линейной системе. Пусть, например, значение параметра k в данной системе соответствует точке L . В линейной системе все время сохранялся бы один и тот же показатель затухания ξ , который соответствует линии LR .

В нелинейной же системе за счет насыщения линия $\xi = \text{const}$ искривляется выше точки R вправо. За счет этого на вертикали $M_0 R$ значения ξ по абсолютной величине будут больше. Вследствие этого колебания в переходном процессе в данной нелинейной системе за счет насыщения будут при больших отклонениях затухать быстрее, чем в линейной системе (при малых амплитудах, $a < b$, затухание будет одно и то же). Однако в других системах насыщение может влиять совсем по-иному, что всегда будет видно из построенных для них диаграмм качества затухания нелинейных колебаний.

В области же неустойчивости линейной системы (например, в точке E) колебания в линейной системе будут расходиться до бесконечности с постоянным показателем ξ , соответствующим точке E . В нелинейной системе за счет искривления линий $\xi = \text{const}$ значение ξ по вертикали уменьшается постепенно до нуля в точке C , где устанавливаются устойчивые автоколебания с определенной амплитудой. Если она велика, то практически это тоже эквивалентно неустойчивости, а если такая амплитуда допустима, то можно сказать, что нелинейность типа насыщения расширяет возможные рабочие пределы изменения параметра k .

Указанное влияние нелинейности типа насыщения может использоваться практически для генерирования устойчивых колебаний с заданной амплитудой и частотой, что было проиллюстрировано в примере § 4.16.

Итак, диаграммы качества (рис. 7.4, 7.7 и 7.8) дают наглядное представление о характере симметричных колебательных процессов, о скорости их затухания или о времени установления автоколебаний, а также и о величине частоты колебаний и о характере ее изменения во времени. Все эти качества оцениваются на диаграммах для любых областей параметров системы, в которых наблюдается симметричный колебательный переходный процесс.

Количественно диаграммы дают зависимость показателя затухания ξ и частоты ω от амплитуды:

$$\xi(a) \text{ и } \omega(a) \quad (7.106)$$

для любого заданного варианта значений параметров системы (любая вертикаль на рис. 7.4, 7.7 и 7.8). Это дает понятие о виде переходного процесса (рис. 7.5). Если требуется более конкретное количественное представление, то по данным (7.106) легко можно построить эти кривые переходного процесса излагаемым ниже способом [208].

Введем в рассмотрение *текущую «постоянную времени»* колебательного переходного процесса

$$T(a) = -\frac{1}{\xi(a)}. \quad (7.107)$$

В линейной системе T было бы действительно постоянной времени экспоненты, по которой уменьшается амплитуда колебаний. Здесь же эта «постоянная времени» медленно меняется с изменением амплитуды

в соответствии с известным законом изменения $\xi(a)$, определяемым формулой (7.106).

Первое из уравнений (7.48) примет с обозначением (7.107) вид

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{T(a)}. \quad (7.108)$$

Поэтому если задано начальное значение амплитуды ($a = a_0$ при $t = 0$), то, отложив величину $T(a_0)$ на оси времени (рис. 7.9) и проводя прямую CB , увидим, что, согласно (7.108), она является касательной к искомой кривой $a(t)$ в начальной точке $t = 0$.

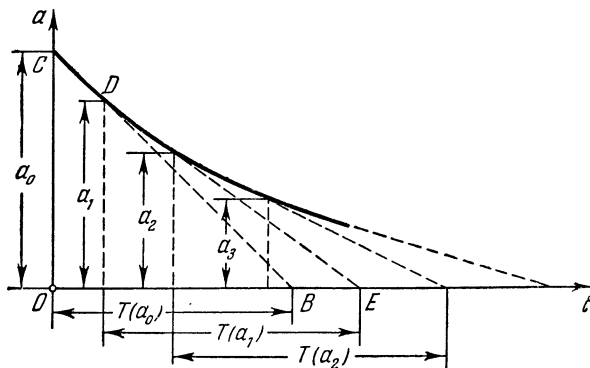


Рис. 7.9.

Будем считать, что на некотором отрезке (до некоторого значения амплитуды a_1) эта прямая практически совпадает с искомой кривой $a(t)$. Затем по формуле (7.107) вычисляем новое значение $T(a_1)$, откладываем его на оси абсцисс (рис. 7.9) и проводим новую прямую DE , считая, что она совпадает с искомой кривой $a(t)$ на отрезке до некоторой новой точки $a = a_2$. Таким же путем построение производится и дальше. Аналогично строится и расходящийся процесс с увеличением амплитуды, показанный на рис. 7.5, б.

Выбор длины отрезков на каждом шаге построения делается произвольно. В результате получается приближенная кривая $a(t)$, т. е. кривая изменения амплитуды колебаний в переходном процессе. Более точное построение не требуется вследствие общей приближенности всего метода в целом, преследующего цели предварительного выбора структуры и параметров системы по приближенным оценкам качества переходных процессов. В некоторых простейших случаях приближенная кривая $a(t)$ может быть получена аналитически путем интегрирования, как было показано в § 7.2 на примере с уравнением второго порядка (7.57) типа Ван-дер-Поля, а также на примере системы третьего порядка при малых ξ в конце § 1.5.

Важно заметить, что конец построения (рис. 7.9) определяется не только самим ходом этого построения, но контролируется еще и тем,

что из диаграммы качества (рис. 7.4, 7.7 и 7.8) заранее известно, к чему стремится этот процесс: к нулевой точке равновесия, к определенной заранее известной установившейся амплитуде автоколебаний ($a=A$) или к границе зоны нечувствительности и т. п.

Получив кривую изменения амплитуды $a(t)$ (т. е. огибающую колебаний) и зная из диаграммы качества частоту $\omega(a)$, можно приближенно построить и саму кривую колебаний $x(t)$. Для этого, прежде

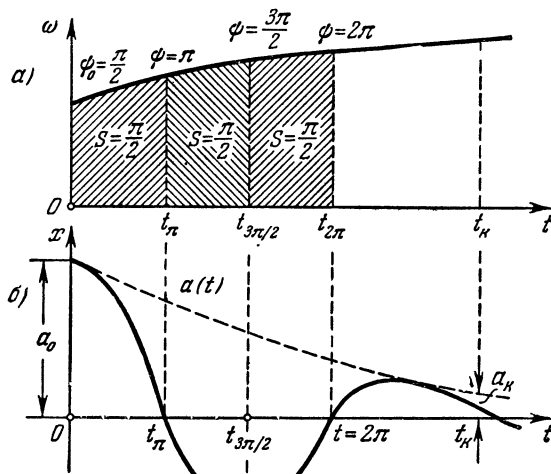


Рис. 7.10.

всего, надо взятую из диаграммы качества зависимость $\omega(a)$ пересчитать в зависимость $\omega(t)$ с помощью уже найденного (рис. 7.9) закона $a(t)$.

Используя найденную кривую $\omega(t)$ (рис. 7.10, a), определим характерные точки $\psi = i \frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2, \dots$) на оси времени. При этом условимся, как уже говорилось в § 7.2, о вполне определенных начальных условиях переходного процесса:

$$x = x_0, \quad p x = p^2 x = \dots = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (7.109)$$

Тогда начальными условиями для принятой формы решения $x = a \sin \psi$, очевидно, будут:

$$a_0 = x_0, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (7.110)$$

Далее имеем:

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t \omega(t) dt. \quad (7.111)$$

Следовательно, величину ψ следует определять как площадь под кривой $\omega(t)$ (рис. 7.10, а) с добавлением величины $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому точка $\psi = \pi$ и соответствующий ей момент времени $t = t_\pi$ найдется как такая точка, в которой площадь $S = \frac{\pi}{2}$ (рис. 7.10, а). Следующая точка $\psi = \frac{3\pi}{2}$ и соответствующее ей время $t_{\frac{3\pi}{2}}$ определяется новым возрастанием площади на ту же величину $S = \frac{\pi}{2}$ и т. д.

Заметим, что в линейной системе $\omega = \text{const}$, и поэтому $\psi = \psi_0 + \omega t$ и точки $t_\pi, t_{\frac{3\pi}{2}}, \dots$ расположены на оси времени равномерно. В нелинейной же системе они будут в общем случае размещены неравномерно, а именно более часто с увеличением частоты ω .

Перенесем найденные характерные точки времени на ось t искомой кривой $x(t)$ переходного процесса (рис. 7.10, б). Поскольку $x = a \sin \psi$, то

$$\begin{aligned} x &= 0 && \text{при } \psi = \pi, 2\pi, \dots, \\ x &= a && \text{при } \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \\ x &= -a && \text{при } \psi = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \end{aligned}$$

Это и позволяет приближенно построить кривую колебаний $x(t)$ в переходном процессе (рис. 7.10, б) с точностью, достаточной для предварительного суждения о качестве процесса в системе при ее проектировании.

Из такого достаточно простого прикидочного расчета можно получить следующие качественные показатели:

а) время затухания переходного процесса t_k на заданном интервале изменения амплитуд от некоторого начального значения a_0 до произвольно назначенного a_k будет

$$t_k = t \quad \text{при } a = a_k; \quad (7.112)$$

б) величина перерегулирования $|x_n|$ равна

$$|x_n| = a \quad \text{при } t = t_{\frac{3\pi}{2}}; \quad (7.113)$$

в) число колебаний m на исследуемом участке от a_0 до a_k :

$$m = \frac{\psi_k - \psi_0}{2\pi}, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad (7.114)$$

где ψ_k есть значение всей площади под кривой $\omega(t)$ при $0 \leq t \leq t_k$.

Хотя описанное построение кривой колебаний в переходном процессе и несложно, все же желательно иметь возможность судить количественно о показателях качества переходного процесса непосредственно по диаграмме качества, не строя процесса.

Время затухания переходного процесса на заданном интервале изменения амплитуд от a_0 до a_k , согласно (7.69), будет

$$t_k = \int_{a_0}^{a_k} \frac{da}{a \dot{z}(a)}, \quad (7.115)$$

на основании чего можно дать грубую оценку:

$$t_k \approx \frac{1}{\xi_c} \ln \frac{a_k}{a_0}, \quad (7.116)$$

где ξ_c есть среднее значение показателя затухания ξ , взятое ориентировочно из диаграммы качества для исследуемого участка $M_0 M_k$ (рис. 7.11, а).

Для более надежного определения времени затухания t_k надо разбить участок $M_0 M_k$ на несколько (n) отрезков и вычислить

$$t_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \ln \frac{a_{ki}}{a_{0i}}, \quad (7.117)$$

где ξ_i есть взятое из диаграммы (рис. 7.11, а) значение ξ в середине каждого отрезка, на которые разбивается прямая $M_0 M_k$; a_{0i} и a_{ki} — значения ординаты a в начале и в конце каждого отрезка.

Для определения величины перерегулирования надо найти значение амплитуды a при $\psi = \frac{3\pi}{2}$. Из (7.48) имеем:

$$\psi = \psi_0 + \int_{a_0}^a \frac{\omega(a)}{a \dot{z}(a)} da. \quad (7.118)$$

При $\psi = \frac{3\pi}{2}$ и $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ приходим к уравнению

$$\int_{a_0}^a \frac{\omega(a)}{a \dot{z}(a)} da = \pi, \quad (7.119)$$

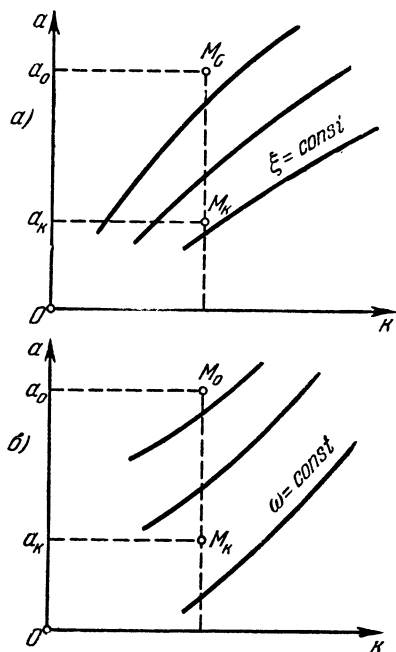


Рис. 7.11.

откуда нужно найти a , которое и будет собой представлять величину перерегулирования $|x_n|$. В качестве грубой оценки вместо (7.119) можно записать:

$$\frac{\omega_c}{\xi_c} \ln \frac{a}{a_0} \approx \pi,$$

откуда, учитывая, что $|x_0| = a_0$, получаем оценку перерегулирования в виде

$$\left| \frac{x_n}{x_0} \right| \approx e^{\pi \frac{\xi_c}{\omega_c}} \quad (\xi_c < 0), \quad (7.120)$$

где ξ_c и ω_c — средние значения величин ξ и ω , взятые из диаграммы (рис. 7.11) для исследуемого участка $M_0 M_K$.

Для более надежной оценки величины перерегулирования нужно разбить участок $M_0 M_K$ на несколько отрезков и согласно (7.118) вычислять

$$\psi - \psi_0 = \sum \frac{\omega_i}{\xi_i} \ln \frac{a_{iK}}{a_{i0}}, \quad (7.121)$$

где ω_i и ξ_i — значения ω и ξ в середине каждого отрезка, на которые разбивается прямая $M_0 M_K$ (рис. 7.11), a_{i0} и a_{iK} — значения ординаты a в начале и в конце каждого отрезка. Вычисления по формуле (7.121) надо вести, начиная от точки M_0 , до тех пор, пока не получится в сумме $\psi - \psi_0 = \pi$. При этом величина перерегулирования будет

$$|x_n| = a_{iK} \quad (\text{при } \psi - \psi_0 = \pi), \quad (7.122)$$

где a_{iK} — ордината конца последнего из отрезков, участвовавших в этом вычислении.

Наконец, для определения числа колебаний m за время переходного процесса надо, согласно (7.114), довести вычисления по формуле (7.121) до конца, т. е. найти

$$m = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\xi_i} \ln \frac{a_{iK}}{a_{i0}}. \quad (7.123)$$

Для грубой же оценки можно считать

$$m \approx \frac{\omega_c}{2\pi \xi_c} \ln \frac{a_K}{a_0}. \quad (7.124)$$

Если, например, требуется, чтобы на исследуемом отрезке $M_0 M_K$ было не более одного колебания, то надо потребовать, чтобы

$$\frac{\xi_c}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_K}{a_0}.$$

Если же задано максимально допустимое перерегулирование $|x_n|$, то, согласно (7.120), должно быть

$$\frac{\xi_c}{\omega_c} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x_n}{x_0} \right|.$$

Таким образом, рассмотренное выше построение диаграмм качества затухания симметричных нелинейных колебательных переходных процессов является важным аппаратом приближенного исследования нелинейных автоматических систем.

Диаграммы качества (рис. 7.4, 7.7 и 7.8) строятся для переменной x , стоящей в уравнении системы под знаком нелинейности. Если желательно пересчитать ее на какую-либо другую переменную, то можно применить формулу типа (7.96) для определения амплитуды новой переменной, используя соответствующую передаточную функцию, связывающую эти переменные в исследуемой системе.

Здесь, как и вообще во всех случаях применения метода гармонической линеаризации, рассматриваются колебательные переходные процессы, т. е. переходные процессы, в которых есть хотя бы одно перерегулирование при начальных условиях (7.109). Что же касается исследования монотонных переходных процессов в нелинейных системах, то для этого надо применять иные методы. Монотонные процессы легче исследуются обычными численно-графическими методами. Область же параметров системы, где имеют место монотонные переходные процессы, с помощью наших диаграмм ориентировочно определяется (левее линии $\omega = 0$ на рис. 7.4, 7.6 и 7.8).

Заметим, однако, что монотонные переходные процессы в нелинейной системе, получающиеся в результате вибрационного сглаживания, и связанные с этим скользящие переходные процессы могут быть исследованы методами, рассмотренными в нижеследующих параграфах.

§ 7.5. Несимметричные колебательные переходные процессы

Исследовавшиеся выше симметричные колебательные переходные процессы далеко не всегда могут иметь место в системах высокого порядка, хотя, как показывают примеры (§§ 7.6 и 7.7), они часто встречаются. В общем случае в системах высокого порядка будут наблюдаться несимметричные переходные процессы, из которых будут рассмотрены такие, которые имеют колебательную составляющую, в том числе переходные процессы в системах с вибрационным сглаживанием и скользящие процессы.

Несимметричный колебательный переходный процесс может иметь вид рис. 7.12, *а*, *б* или *в*. Пусть в нелинейной системе первого класса

переходный процесс описывается дифференциальным уравнением высокого порядка

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (7.125)$$

Решение будем искать в форме (см. рис. 7.12):

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = a \sin \psi, \quad (7.126)$$

где x^0 , a и $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ являются искомыми функциями времени.

При отыскании этого решения будет использоваться тот же метод, который применялся в главе V при исследовании прохождения

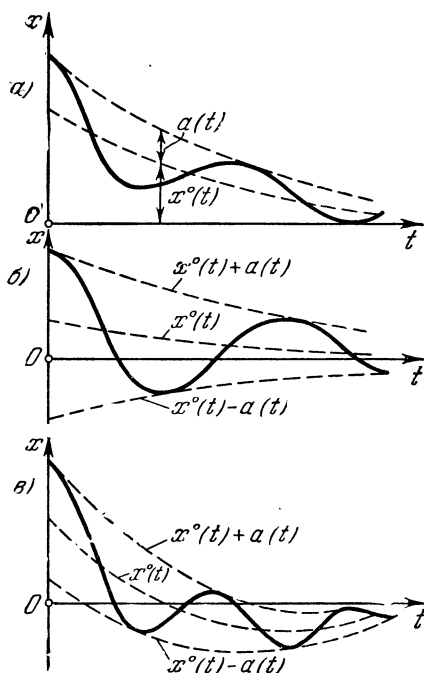


Рис. 7.12.

медленно меняющихся сигналов через автоколебательные системы. Но теперь речь уже будет идти не об автоколебаниях при медленно меняющемся внешнем воздействии, а о переходном процессе, описываемом однородным уравнением и состоящим из затухающей (или расходящейся) *колебательной составляющей* x^* и из *апериодической составляющей* x^0 , причем этот переходный процесс может стремиться либо к установившемуся состоянию $x=0$ или $x=\text{const}$, либо к установившемуся автоколебательному режиму $a=\text{const}$.

Рассмотрим два варианта метода решения задачи:

1) амплитуда a затухающих (или расходящихся) колебаний в переходном процессе считается медленно меняющейся вместе с изменением апериодической составляющей x^0 во

времени, вследствие чего показатель затухания ξ вообще не вводится в рассмотрение;

2) вводится в рассмотрение величина показателя затухания ξ , когда невозможно решение задачи в первом варианте (простейшие примеры обоих случаев рассматривались в § 1.8).

В первом варианте метода по аналогии с § 5.1, учитывая (7.126), будем производить здесь гармоническую линеаризацию нелинейности в виде

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\omega} px^*, \quad (7.127)$$

где

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi, \quad (7.128)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x^0 + a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.129)$$

Готовые выражения F^0 , q и q' для различных типовых нелинейностей приведены в главе V (§§ 5.6 — 5.9).

После подстановки (7.127) дифференциальное уравнение переходного процесса (7.125) распадается на два, соответственно для аperiodической и для колебательной составляющих:

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = 0, \quad (7.130)$$

$$Q(p)x^* + R(p)(q + \frac{q'}{\omega}p)x^* = 0. \quad (7.131)$$

Эти уравнения взаимосвязаны, так как, согласно (7.128) и (7.129), в общем случае все три величины F^0 , q и q' зависят от всех трех искомого неизвестных x^0 , a и ω .

Для уравнения (7.131) записываем характеристическое уравнение

$$Q(p) + R\left(q + \frac{q'}{\omega}p\right) = 0, \quad (7.132)$$

где q и q' зависят всегда от a и x^0 , а иногда и от ω . Поэтому, решая это уравнение любым из способов § 2.3 (с подстановкой $p = j\omega$), находим зависимости

$$a(x^0) \text{ и } \omega(x^0), \quad (7.133)$$

т. е. зависимости амплитуды и частоты колебательной составляющей искомого переходного процесса от ординаты его аperiodической составляющей x^0 (рис. 7.13, а).

Подставив найденные функции $a(x^0)$ и $\omega(x^0)$ в формулу (7.128), получим так называемую функцию смещения (рис. 7.13, б):

$$F^0 = \Phi(x^0), \quad (7.134)$$

которая является сглаженной характеристикой нелинейного звена для аperiodической составляющей процесса. В результате дифференциальное уравнение для аperiodической составляющей (7.130) будет содержать одну неизвестную переменную, а именно:

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = 0. \quad (7.135)$$

Решая его, находим аperiодическую составляющую $x^0(t)$ переходного процесса $x(t)$.

Но как только найдена эта составляющая $x^0(t)$, так, согласно (7.133), сейчас же определяются функции $a(t)$ и $\omega(t)$ для колебательной составляющей $x^*(t)$ переходного процесса. Следовательно, будет найдено все решение $x(t)$ для переходного процесса (7.126), где

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t \omega(t) dt.$$

Необходимо только сделать несколько практических замечаний по выполнению описанного хода решения задачи.

Уравнение (7.135) нелинейное. Его решение можно искать любым известным численным или графическим методом. Однако здесь

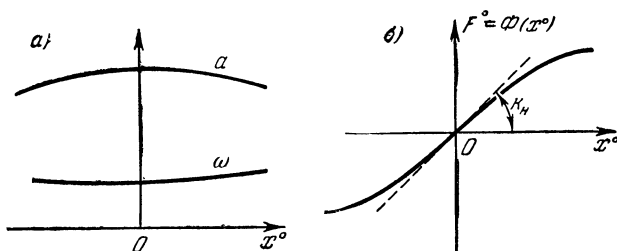


Рис. 7.13.

возможно упрощение, так как чаще всего функция $\Phi(x^0)$ имеет вид плавной кривой (рис. 7.13, б). Поэтому ее можно линеаризовать обычным способом — заменой кривой на прямую (касательную, как на рис. 7.13, б, или секущую). Тогда вместо нелинейной функции $\Phi(x^0)$ получим линейную

$$\Phi = k_n x^0.$$

В этом случае нелинейное уравнение (7.135) заменится линейным, например:

$$Q(p)x^0 + k_n R(p)x^0 = 0, \quad (7.136)$$

которое легко решается.

В итоге, самой сложной задачей оказывается первый этап — нахождение функций $a(x^0)$ и $\omega(x^0)$ из уравнения (7.132). Довести до конца его решение аналитически редко удастся. Поэтому чаще всего приходится прибегать к различным графическим приемам, указанным в § 2.3. Путь решения при этом будет следующий.

Сначала, исходя из заданной формы нелинейности, оцениваются пределы изменения величины x^0 , при которых возможна принятая форма решения. Затем задается какое-нибудь одно конкретное значе-

ние x^0 и подставляется в выражения (7.129) для q и q' . Тогда характеристическое уравнение (7.132) будет содержать две неизвестные a и ω , которые и определяются согласно § 2.3. Таким образом будет найдена пара значений a , ω для одного заданного x^0 .

Такие же вычисления продлеваются для ряда возможных значений x^0 , в результате чего получается искомый график зависимостей $a(x^0)$ и $\omega(x^0)$ (рис. 7.13, а).

Заметим, наконец, что если для исследуемой этим методом системы уже решались задачи, рассмотренные в главе V, то здесь, при определении аperiodической составляющей переходного процесса по уравнению (7.135), можно воспользоваться готовой функцией смещения $\Phi(x^0)$, найденной в главе V.

Обратимся теперь ко *второму варианту* метода, когда решение для переходного процесса с аperiodической x^0 и колебательной x^* составляющими ищется в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x^0 + x^*, & x^* &= a \sin \psi, \\ \frac{da}{dt} &= a\xi, & \frac{d\psi}{dt} &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (7.137)$$

Эта форма решения применяется в таких задачах, когда подстановка $p = j\omega$ в характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы не дает решения (см., например, § 1.8) и приходится привлекать подстановку $p = \xi + j\omega$.

В этом варианте метода гармоническая линеаризация линейности производится аналогично (7.52) в виде

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + q' \frac{p - \xi}{\omega} x^*, \quad (7.138)$$

а выражения F^0 , q и q' определяются по формулам (7.128) и (7.129). Здесь, в отличие от (7.53), слагаемое $a\xi \sin \psi$ отброшено, так как оно имеет тот же порядок, что и производная $\frac{dx^0}{dt}$, которая в процессе гармонической линеаризации тоже не учитывается вследствие медленности изменения x^0 за период.

Дифференциальное уравнение (7.125) для переходного процесса распадается после гармонической линеаризации, как и раньше, на два взаимосвязанных уравнения, причем второе из них (7.131) для колебательной составляющей будет иметь вид

$$Q(p)x^* + R(p) \left(q + q' \frac{p - \xi}{\omega} \right) x^* = 0. \quad (7.139)$$

По сравнению с первым вариантом метода здесь имеется дополнительная неизвестная ξ и соответствующее ей дополнительное уравнение $pa = a\xi$, вытекающее из (7.137).

Характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p) \left(q + \frac{p - \xi}{\omega} q' \right) = 0 \quad (7.140)$$

существенно отличается от прежнего (7.72) тем, что величины q и q' здесь зависят не только от амплитуды a , но также и от координаты x^0 апериодической составляющей переходного процесса. Поскольку координата x^0 , так же как и амплитуда a , в переходном процессе уменьшается с течением времени ¹⁾, то для первоначальной ориентировочной оценки качества можно принять условие

$$\frac{x^0}{a} \approx \text{const.} \quad (7.141)$$

Величина этого отношения обычно может лежать в ограниченных пределах, определяемых формой нелинейности. Например, для идеального реле $\left| \frac{x^0}{a} \right| < 1$ (рис. 7.12, б), иначе не будет происходить переключения реле и отпадет необходимость данного исследования.

Задавшись каким-либо средним отношением (7.141) или несколькими возможными его значениями, можно для него (или для каждого из них) на основании уравнения (7.140) построить любым из первых трех способов, описанных в § 7.3, диаграмму качества затухания нелинейных колебаний и таким образом проследить ориентировочно влияние различных параметров системы на качество затухания колебаний в переходном процессе (см. § 7.4) при наличии апериодической составляющей.

Если же после такой предварительной оценки качества потребуется отыскание всей кривой переходного процесса при каких-то ориентировочно выбранных параметрах системы, то это следует делать уже непосредственно путем численного, графического или машинного решения исходного нелинейного дифференциального уравнения (7.125) или другого, составленного для данной системы более тщательно, чем (7.125), так как последнее было предназначено для предварительной оценки с целью выбора структуры и основных параметров системы.

Перейдем теперь к исследованию скользящих процессов и процессов, происходящих в условиях вибрационного сглаживания нелинейностей.

Скользящим процессом называется такой переходный процесс в нелинейной автоматической системе, в котором *регулируемая величина* изменяется апериодически (с наложенными обычно малыми вибрациями рис. 7.14, а), а *нелинейный элемент* работает в автоколебательном вибрационном режиме (рис. 7.14, б — д) на какой-либо границе существенного изменения своего состояния (например, на одном из крайних контактов трехпозиционного поляризованного реле). Эти автоколебательные вибрации обычно имеют очень малую амплитуду a и большую частоту ω (рис. 7.14, б и в). Поэтому в большинстве теоре-

¹⁾ В этом варианте метода речь идет об оценке качества переходного процесса внутри области устойчивости нелинейной системы, так как в области существования автоколебаний всегда можно применять более простой первый вариант метода, изложенный выше.

тических исследований при анализе скользящих процессов принимается $a=0$ и $\omega=\infty$. Но, вообще говоря, на практике наблюдаются и скользящие процессы, происходящие с конечными величинами амплитуды a и частоты ω (для переменной x , входящей под знак нелинейности; см. рис. 7.14, z и d), особенно при петлевых нелинейностях. В этих случаях амплитуда автоколебательных вибраций регулируемой величины (рис. 7.14, a) тоже может быть очень малой (за счет инерционности звеньев, связывающих регулируемую величину

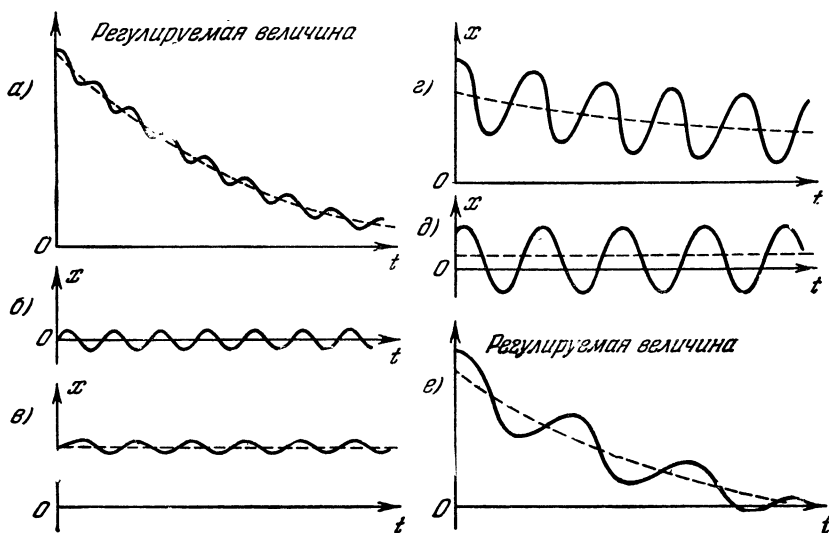


Рис. 7.14.

с переменной x), практически незаметной. Она может быть и ощутимой, но такой, что все же аperiodическая часть процесса остается основной его составляющей (рис. 7.14, e). При этом переходный процесс может либо стремиться к равновесному состоянию ($a \rightarrow 0$), либо к автоколебательному режиму ($a \rightarrow A = \text{const}$).

Исходя из этого, во многих случаях (хотя и не во всех, конечно) скользящие процессы могут исследоваться приближенно теми же самыми методами, что и несимметричные колебательные переходные процессы нелинейных систем, рассмотренные выше. Решение ищется в той же форме (7.126), применяются те же формулы гармонической линеаризации (7.127) — (7.129) и та же разбивка уравнений на (7.130) и (7.131).

По-прежнему путем решения уравнения (7.131) определяются зависимости $a(x^0)$ и $\omega(x^0)$, которые подставляются затем в формулу (7.128) для получения функции смещения $F^0 = \Phi(x^0)$. Это будет сглаженная характеристика нелинейного звена, подставляемая в (7.130) для вычисления главной (аperiodической) составляющей $x^0(t)$ скользящего процесса. Это и будет решением поставленной задачи.

Особенность здесь будет состоять в том, что в большинстве случаев скользящий процесс сопровождается работой нелинейного звена не во всем диапазоне его нелинейной характеристики, а только на одном узком участке последней (например, на одном из контактов реле), как показано на рис. 7.15.

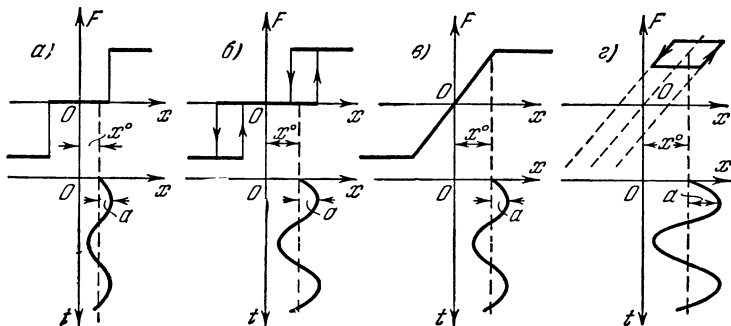


Рис. 7.15.

Эта особенность существенно отразится на конкретных выражениях (7.129) для коэффициентов гармонической линеаризации, которые должны быть выведены особо в соответствии с рис. 7.15. В результате указанные выше зависимости $a(x^0)$ и $\omega(x^0)$, а также сама функция смещения $\Phi(x^0)$, в отличие от прежнего (рис. 7.13), будут

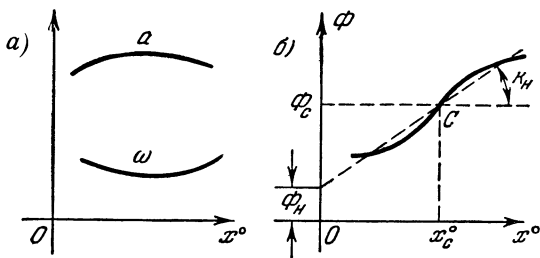


Рис. 7.16.

сдвинуты от начала координат (рис. 7.16). При этом обычный способ линеаризации функции смещения при помощи секущей (рис. 7.16, б) даст

$$\Phi = \Phi_c + k_n (x^0 - x_c^0)$$

или (рис. 7.16, б)

$$\Phi = \Phi_n + k_n x^0. \quad (7.142)$$

Тогда для определения основной (апериодической) составляющей скользящего процесса x^0 , согласно (7.130), будем иметь линейное уравнение

$$Q(p)x^0 + R(p)k_n x^0 = -C, \quad C = R(0)\Phi_n. \quad (7.143)$$

Метод в том же виде может применяться и к системам с запаздыванием.

Совершенно тем же путем могут быть исследованы переходные процессы, происходящие в условиях вибрационного сглаживания нелинейностей при помощи автоколебаний. В § 5.3 было исследовано прохождение медленно меняющихся сигналов в таких системах, обусловленных внешними воздействиями. Здесь отличие будет только в том, что для определения медленно меняющейся составляющей процесса нужно вместо (5.77) или (5.78) решать однородное уравнение типа (7.136) или (7.143).

Ниже в главе IX будут рассмотрены также переходные процессы, происходящие в условиях вибрационного сглаживания нелинейностей при помощи вынужденных колебаний.

Изложенный в этом параграфе метод применительно к системе первого класса с одной нелинейностью распространяется и на системы с несколькими нелинейностями всех трех классов точно тем же путем, как это делалось при исследовании автоколебаний в главах V и VI.

§ 7.6. Пример приложения асимптотического метода

Построение асимптотического решения, предложенного в § 7.1, рассмотрим на примере движения центра тяжести гидросамолета в вертикальной плоскости при посадке на гладкую поверхность воды.

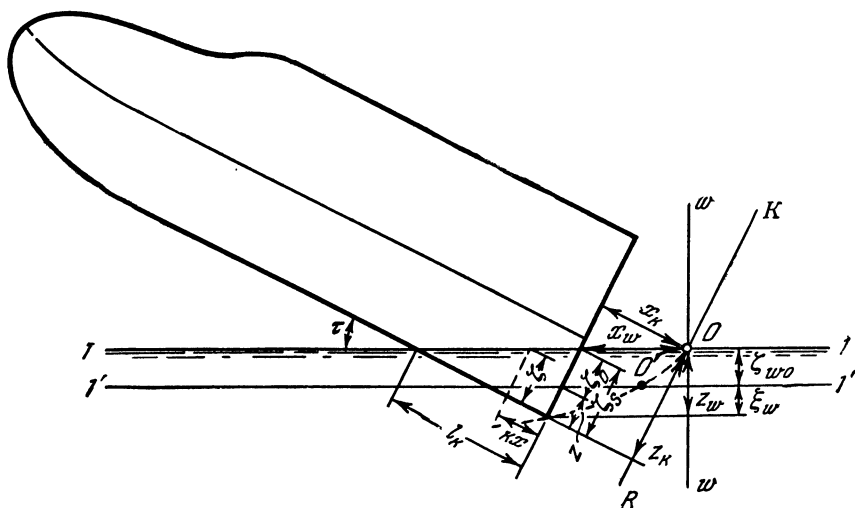


Рис. 7.17.

Указанная задача рассматривалась в [226]. На рис. 7.17 представлены выбранные для рассмотрения задачи системы координат: x_k, z_k — оси, соответственно параллельная и перпендикулярная к килю; x_w, z_w —

оси, соответственно параллельная и перпендикулярная к поверхности воды; x , z — оси, соответственно параллельная и перпендикулярная к килю, но с началом координат в точке пересечения киля с задним обрезаем. Первые две системы неподвижны, третья — связана с гидросамолетом.

Будем рассматривать движение гидросамолета относительно положения $I' - I'$ (рис. 7.17), отстоящего на величину ζ_0 по заднему обрезаем от невозмущенного уровня водной поверхности и соответствующего глубине погружения нижней точки на киле редана при установившемся движении с заданной скоростью.

Дифференциальное уравнение для случая быстро затухающего колебательного движения центра тяжести гидросамолета относительно поверхности воды имеет вид [226]

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + v^2 z = \varepsilon f(z, \dot{z}), \quad (7.144)$$

где z — перемещение гидросамолета в направлении оси z , связанной системы координат; средний коэффициент

$$2b = \frac{G\Gamma^3 \zeta_0^3 \dot{z}_k \operatorname{tg} \tau + D}{1 + \Gamma^3 \zeta_0^3}$$

характеризует затухание колебаний; Γ — коэффициент присоединенной массы в системе координат, ориентированной по отношению к килю; $D = N\dot{z}_k$; N — коэффициент, учитывающий аэродинамическое демпфирование;

$$v^2 = \frac{G\Gamma^3 \zeta_0 (\dot{z}_k \operatorname{tg} \tau)^2}{1 + \Gamma^3 \zeta_0^3};$$

малый параметр

$$\varepsilon = \frac{3\Gamma^3 \zeta_0^3}{1 + \Gamma^3 \zeta_0^3} \ll 1. \quad (7.145)$$

Нелинейная функция имеет вид

$$f(z, \dot{z}) = - \left\{ \frac{(\dot{z}_k \operatorname{tg} \tau)^2}{\zeta_0^3} z^2 + \frac{z^2}{\zeta_0^3} \dot{z}^2 + 2 \frac{z}{\zeta_0^3} \dot{z}^2 + \frac{1}{\zeta_0} \dot{z}^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\dot{z}_k z^2 \operatorname{tg} \tau}{\zeta_0^3} \dot{z} + \frac{4\dot{z}_k z \operatorname{tg} \tau}{\zeta_0^3} \dot{z} \right\}. \quad (7.146)$$

При $\varepsilon = 0$ решение уравнения (7.144) будет

$$z = a \sin(\omega_0 t + \psi_0),$$

где

$$a = a_0 e^{-bt}, \quad \omega_0 = \sqrt{v^2 - b^2}.$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ решение уравнения (7.144) будем искать в первом приближении в виде

$$z = a \sin \phi,$$

причем, согласно § 7.1:

$$\frac{da}{dt} = a\xi(a), \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega(a), \quad (7.147)$$

где ξ — мгновенный показатель затухания; ω — мгновенная частота исследуемого нелинейного процесса. При этом для определения $\xi(a)$ и $\omega(a)$ предварительно надо найти функции $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ по формулам (7.27), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \beta(a) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi, -ab \sin \psi) \cos \psi d\psi, \\ \gamma(a) &= -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi, -ab \sin \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.148)$$

Подставляя заданную функцию $f(z, \dot{z})$ из (7.146) и производя интегрирование, получим:

$$\left. \begin{aligned} \beta(a) &= -\frac{a^3}{2\zeta_0^3} [b(3b - 2\omega_0)\zeta_0 + \dot{z}_k \omega_0 \operatorname{tg} \tau], \\ \gamma(a) &= \frac{3ba^3}{2\zeta_0^3} (\zeta_0 b - \dot{z}_k \operatorname{tg} \tau). \end{aligned} \right\} \quad (7.149)$$

При исходных параметрах, которые охватывают большой класс гидросамолетов, первые члены, стоящие в скобках (7.149), по сравнению

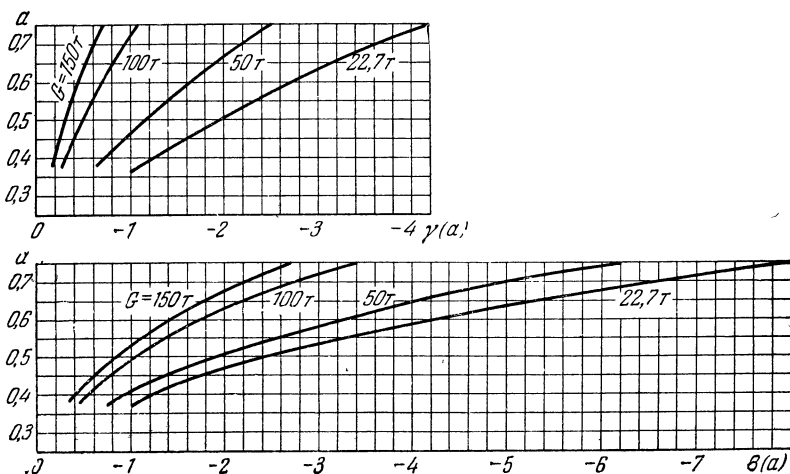


Рис. 7.18.

со вторым составляют 0,5—2%. Пренебрегая указанными членами перепишем формулы (7.149) в упрощенном виде:

$$\left. \begin{aligned} \beta(a) &= -\frac{\omega_0 \dot{z}_k \operatorname{tg} \tau}{2\zeta_0^3} a^3, \\ \gamma(a) &= -\frac{3b\dot{z}_k \operatorname{tg} \tau}{2\zeta_0^3} a^3. \end{aligned} \right\} \quad (7.150)$$

На рис. 7.18 представлены кривые $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ для различных типов гидросамолетов. Приведенные графики являются плавными кривыми с малой кривизной. Поэтому, согласно (7.30), формулы для определения показателя затухания ξ и частоты ω имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -b + \xi \left[\frac{\beta(a)}{2a\omega_0} + \frac{ba}{2(2\omega_0^2 + b^2)} \frac{d\gamma}{da} \right], \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \varepsilon \left[\gamma(a) - \frac{b}{2\omega_0} \frac{d\beta}{da} - \frac{b^2 a}{2\omega_0^2 + b^2} \frac{d\gamma}{da} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.151)$$

Определив $\varepsilon \frac{d\gamma}{da}$ и $\varepsilon \frac{d\beta}{da}$ из (7.150) и (7.145) и подставив в (7.151), получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -b - \frac{1}{4} k_1 k_3 a^2, \\ \omega^2 &= \omega_0^2 - k_2 k_3 b a^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.152)$$

где

$$k_1 = 1 + \frac{6b^2}{2\omega_0^2 + b^2}, \quad k_2 = \frac{3}{4} - \frac{3b^2}{2\omega_0^2 + b^2}, \quad k_3 = \frac{3\Gamma^2 z_k \operatorname{tg} \tau}{1 + \Gamma^2 z_k^2}.$$

Согласно (7.147) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -a \left(b + \frac{1}{4} k_1 k_3 a^2 \right), \\ \omega &= \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\omega_0^2 - k_2 k_3 b a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.153)$$

Запишем первое равенство (7.153) в виде

$$\frac{da}{a^2 + 4ma} = -\frac{k_1 k_3}{4} dt, \quad (7.154)$$

где

$$m = \frac{b}{k_1 k_3}.$$

Интегрируя (7.154) и учитывая, что $a = a_0$ при $t = 0$, получим:

$$a^2 = \frac{4m}{\left(1 + \frac{4m}{a_0^2}\right) e^{2bt} - 1}. \quad (7.155)$$

Из второго равенства (7.153) имеем:

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\omega_0^2 - ca^2}, \quad (7.156)$$

где

$$c = bk_2 k_3.$$

Так как $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{da} \frac{da}{dt}$, то, принимая во внимание (7.156), из (7.154) получим:

$$-k_1 k_3 d\psi = \frac{4 \sqrt{\omega_0^2 - ca^2}}{a(a^2 + 4m)} da. \quad (7.157)$$

Интегрируя равенство (7.157) с учетом $a = a_0$, $\psi = \psi_0$ при $t = 0$, получим расчетную формулу для ψ :

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0 + \frac{1}{2b} & \left[\omega_0 \ln \frac{(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - ca_0^2})(\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - ca^2})}{(\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - ca^2})(\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - ca_0^2})} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\omega_0^2 + 4cm} \ln \frac{(\sqrt{\omega_0^2 + 4cm} - \sqrt{\omega_0^2 - ca_0^2})(\sqrt{\omega_0^2 + cm} + \sqrt{\omega_0^2 - ca^2})}{(\sqrt{\omega_0^2 + 4cm} - \sqrt{\omega_0^2 - ca^2})(\sqrt{\omega_0^2 + 4cm} + \sqrt{\omega_0^2 - ca_0^2})} \right]. \end{aligned} \quad (7.158)$$

Полученные формулы (7.155), (7.156) и (7.158) позволяют выполнить построение затухающего колебательного движения гидросамолета при посадке. Результаты теоретических расчетов и экспериментальных исследований [226] дали хорошее совпадение.

§ 7.7. Симметричный колебательный переходный процесс в следящей системе

Выполним построение диаграммы качества переходного процесса и кривой переходного процесса на примере нелинейной следящей системы [215].

Структурная схема следящей системы изображена на рис. 7.19, где 1 — датчик рассогласований, 2 — усилитель, 3 — реле, 4 — исполнительный двигатель, 5 — редуктор, 6 — управляемый объект, 7 — дополнительная обратная связь.

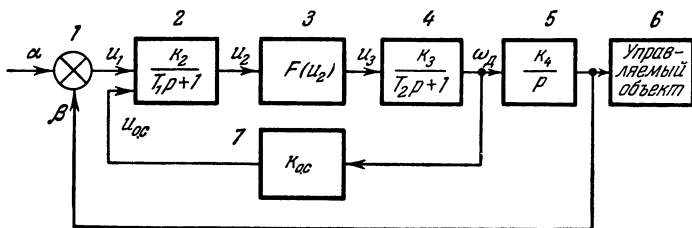


Рис. 7.19.

Системы с такой структурной схемой находят применение в тех случаях, когда для управления двигателем нужна значительная мощность, а увеличение габаритов и веса усилителя нежелательно.

Для датчика рассогласований системы имеем уравнения:

$$\vartheta = \alpha - \beta, \quad u_1 = k_1 \vartheta, \quad (7.159)$$

где ϑ — рассогласование системы, α и β соответственно входная и выходная величины системы, k_1 — передаточное число датчика рассогласований.

Статическая характеристика нелинейного элемента — реле изображена на рис. 7.20. Выполняя гармоническую линеаризацию нелинейной характеристики реле, получим уравнение

$$u_3 = q(a) u_2, \quad (7.160)$$

где в соответствии с (3.13) для однозначной релейной характеристики с зоной нечувствительности коэффициент гармонической линеаризации определяется формулой

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (7.161)$$

Учитывая уравнение датчика рассогласований (7.159), гармонически линеаризованное уравнение реле (7.160) и передаточные функции других линейных звеньев, приведенные на рис. 7.19, запишем уравнение для собственного движения ($\alpha = 0$) следящей системы в виде

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)p + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a)] u_2 = 0. \quad (7.162)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее полученному дифференциальному уравнению, будет

$$L(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)p + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a) = 0. \quad (7.163)$$

Так как статическая характеристика нелинейного звена симметрична и к системе не приложено внешнее воздействие, то колебательное решение (если оно имеется), соответствующее уравнению (7.162), будет симметричным.

Выполним вначале построение диаграммы качества колебательного процесса по первому способу, указанному в § 7.3. Для этого в уравнении (7.163) необходимо произвести подстановку

$$p = \xi + j\omega,$$

где ξ — затухание и ω — частота искомого переходного процесса. Чтобы упростить указанную задачу, можно характеристический многочлен представить конечным рядом по степеням $j\omega$ с коэффициентами, зависящими от ξ .

Выполняя вычисление соответствующих производных характеристического полинома (7.163), получим:

$$\frac{dL(p)}{dp} = 3T_1 T_2 p^2 + 2(T_1 + T_2)p + [1 + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)],$$

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2 L(p)}{dp^2} = 3T_1 T_2 p + T_1 + T_2, \quad \frac{1}{3!} \frac{d^3 L(p)}{dp^3} = T_1 T_2.$$

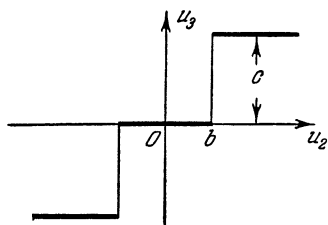


Рис. 7.2

Подстановка $p = \xi$ в выражения для $L(p)$ и ее производных дает коэффициенты разложения в ряд уравнения $L(a, \xi, j\omega) = 0$, которое распадается на следующие два уравнения:

$$X = T_1 T_2 \xi^3 + (T_1 + T_2) \xi^2 + [1 + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)] \xi + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a) - [3 T_1 T_2 \xi + T_1 + T_2] \omega^2 = 0. \quad (7.164)$$

$$Y = [3 T_1 T_2 \xi^2 + 2 (T_1 + T_2) \xi + 1 + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)] \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \quad (7.165)$$

Из уравнения (7.165) определяем квадрат частоты:

$$\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2} [3 T_1 T_2 \xi^2 + 2 (T_1 + T_2) \xi + 1 + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)]. \quad (7.166)$$

Подставляя значение ω^2 в уравнение (7.164), получим:

$$\begin{aligned} T_1 T_2 \xi^3 + (T_1 + T_2) \xi^2 + [1 + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)] \xi + k_1 k_2 k_3 k_4 q(a) = \\ = \frac{1}{T_1 T_2} [3 T_1 T_2 \xi^2 + 2 (T_1 + T_2) \xi + 1 + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)] [3 T_1 T_2 \xi + T_1 + T_2]. \end{aligned} \quad (7.167)$$

Построим диаграмму качества нелинейного процесса в следящей системе для параметра k_1 , т. е. для передаточного числа (крутизны характеристики) датчика рассогласований. Так как затухание ξ в (7.167) входит нелинейно, то удобно данное уравнение разрешить относительно параметра k_1 .

В результате из (7.167) получим:

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{1}{k_2 k_3 k_4 q(a)} \left\{ \frac{1}{T_1 T_2} [3 T_1 T_2 \xi^2 + 2 (T_1 + T_2) \xi + 1 + k_2 k_3 k_{o.c} q(a)] \times \right. \\ \left. \times [3 T_1 T_2 \xi + T_1 + T_2] - [T_1 T_2 \xi^3 + (T_1 + T_2) \xi^2 + \xi] \right\}. \end{aligned} \quad (7.168)$$

Для построения диаграммы зададимся следующими значениями других параметров: $T_1 = 0,05$ сек, $T_2 = 0,05$ сек, $k_2 = 1$, $k_3 = 200$ град/сек \cdot в, $k_4 = 0,01$, $k_{o.c} = 10^{-3}$ сек \cdot в/град, $b = 5$ в, $c = 120$ в.

Подставляя приведенные значения параметров в (7.168) и задаваясь различными постоянными значениями показателя затухания $\xi = \text{const}$, строим кривые $a(k_1)$ (рис. 7.21). На основании выполненного построения по формуле (7.166) при постоянных значениях частоты $\omega = \text{const}$ строим также кривые $a(k_1)$.

Кривые, изображенные на рис. 7.21, представляют собой диаграмму качества переходного процесса для рассматриваемой следящей системы. Кривая $a(k_1)$ при $\xi = 0$ соответствует автоколебаниям.

Выполним теперь построение диаграммы качества колебательного процесса в нелинейной системе по второму способу, указанному в § 7.3.

Уравнение (7.163) запишем в виде

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0, \quad (7.169)$$

где

$$A_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}; \quad A_2 = \frac{1 + k_2 k_3 k_{0.c} q(a)}{T_1 T_2}; \quad A_3 = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 q(a)}{T_1 T_2}. \quad (7.170)$$

Разложив левую часть уравнения (7.169) на множители, получим уравнение

$$(p + C_1)(p^2 + B_1 p + B_2) = 0, \quad (7.171)$$

коэффициенты которого связаны с коэффициентами (7.169) соотношениями:

$$A_1 = C_1 + B_1, \quad A_2 = B_2 + B_1 C_1, \quad A_3 = C_1 B_2. \quad (7.172)$$

Считая, что последний сомножитель (7.171) соответствует паре комплексных корней системы, имеющих значительно меньшую по

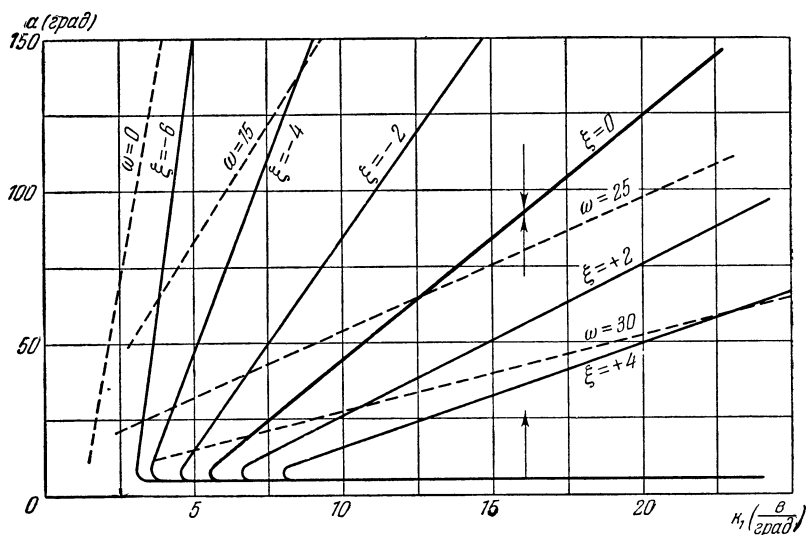


Рис. 7.21.

модулю вещественную часть, чем корень первого сомножителя, т. е. что

$$C_1 \gg \left| \frac{B_1}{2} \right|,$$

запишем формулы связи затухания ξ и частоты ω с параметрами системы в виде

$$\xi = -\frac{B_1}{2}, \quad \omega^2 = B_2 - \xi^2. \quad (7.173)$$

Составим по уравнению (7.169) предпоследний определитель Гурвица (для данного примера — второй) с учетом соотношений (7.172):

$$\begin{aligned} H_2 &= A_1 A_2 - A_3 = (C_1 + B_1)(B_2 + B_1 C_1) - C_1 B_2 = \\ &= B_1(B_2 + C_1^2 + C_1 B_1). \end{aligned}$$

Так как из (7.172)

$$B_2 + C_1 B_1 = A_2 \quad \text{и} \quad C_1^2 = (A_1 - B_1)^2,$$

а из (7.173)

$$B_1 = -2\xi,$$

то для определения затухания получается формула

$$\xi = -\frac{H_2}{2[A_2 + (A_1 + 2\xi)^2]} = -\frac{A_1 A_2 - A_3}{2[A_2 + (A_1 + 2\xi)^2]}. \quad (7.174)$$

Учитывая, что из (7.172)

$$B_2 = \frac{A_2}{C_1} = \frac{A_2}{A_1 - B_1} = \frac{A_2}{A_1 + 2\xi},$$

и подставляя значение B_2 в (7.173), получим формулу для квадрата частоты:

$$\omega^2 = -\frac{A_3}{A_1 + 2\xi} - \xi^2. \quad (7.175)$$

Формулы (7.174) и (7.175) позволяют построить диаграмму затухания нелинейных процессов по любому из параметров системы. Для этого достаточно воспользоваться формулами (7.170), связывающими коэффициенты A_1 , A_2 и A_3 с параметрами системы. Для параметра k_1 при выбранных значениях других параметров следящей системы это дает тот же результат, что и в предыдущем случае.

Выполняя построение диаграммы качества переходного процесса для той же системы при отключенной дополнительной обратной связи, получим результат, представленный на рис. 7.22. В данном частном случае линии $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ накладываются друг на друга.

Сравнивая полученные диаграммы для случаев наличия дополнительной обратной связи и отсутствия обратной связи, убеждаемся, что за счет обратной связи расширяется область затухающих колебательных процессов (область левее и выше линии $\xi = 0$, соответствующей автоколебаниям). Кроме того, при тех же самых значениях параметра k_1 в случае наличия обратной связи в области затухающих процессов получается большее по абсолютной величине затухание, чем без обратной связи. Например, при $k_1 = 8$ и $\alpha = 90^\circ$ при наличии обратной связи затухание $\xi = -4$, тогда как в случае отключенной обратной связи $\xi = -2$. Это говорит о том, что обратная

связь приводит к увеличению быстроты затухания переходного процесса.

Полученные диаграммы качества позволяют оценить переходный процесс в нелинейной системе, если заданы параметры последней, а также дают возможность решить и обратную задачу, т. е. выбрать значения параметров из условия заданного качества переходного процесса. Кроме того, как было показано в § 7.4, по диаграммам качества легко построить огибающую амплитуд переходного процесса

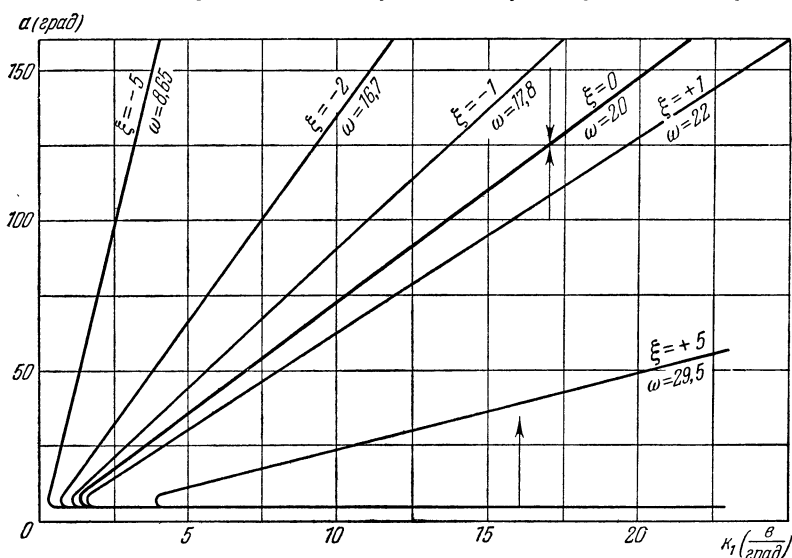


Рис. 7.22.

и найти изменение частоты процесса от периода к периоду, т. е. в конечном счете выполнить приближенное построение переходного процесса. Ошибка приближенного построения переходного процесса, как будет видно из дальнейшего, невелика и вполне допустима для инженерной практики проектирования нелинейных автоматических систем.

Для определения погрешности метода на рис. 7.23 построен переходный процесс в рассматриваемой системе численно-графическим методом [198] при значении параметра $k_1 = 5$ в/град и при начальном значении амплитуды колебаний $a_0 = 250$ в. Для достижения лучшей точности построение производилось в большом масштабе при малом шаге интегрирования.

На том же рис. 7.23 изображена пунктиром огибающая переходного процесса, построенная приближенно на основании диаграммы качества (рис. 7.21). Из выполненного построения видно, что приближенный расчет по методу гармонической линеаризации дает небольшую погрешность при определении огибающей.

Погрешность определения величины частоты ω оценим следующим образом. Точную кривую, полученную численно-графическим методом, разобьем на участки 1, 2, 3, 4 (рис. 7.23), соответствующие как

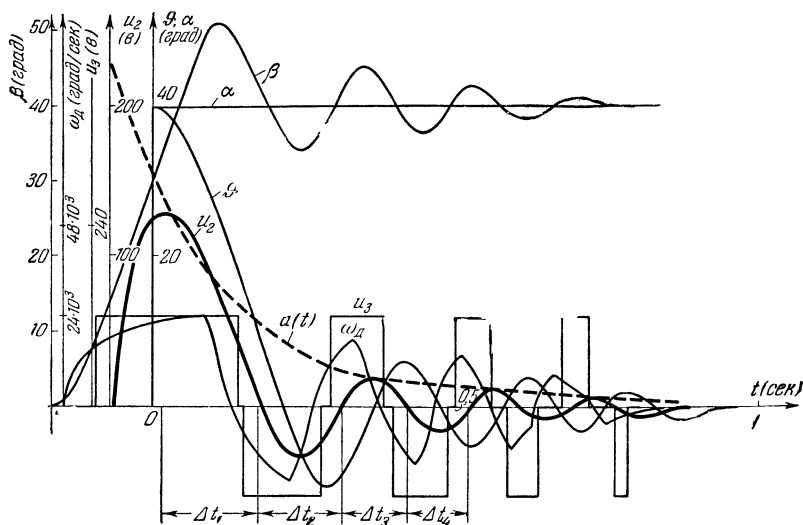


Рис. 7.23.

бы четвертям или половинам периода колебаний. Для каждого из участков найдем из чертежа точной кривой величины

$$\omega_T = \frac{\pi}{2\Delta t} \quad \text{либо} \quad \omega_T = \frac{\pi}{\Delta t},$$

где Δt обозначает длительность каждого участка. Погрешность в определении частоты при помощи рассматриваемого приближенного метода будет равна

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_T} \% = \frac{\omega - \omega_T}{\omega_T} 100\%,$$

где ω — значение частоты, взятое из диаграммы качества исследуемой нелинейной системы (7.21) для средней амплитуды a на каждом участке. Результаты вычислений приведены в таблице:

Δt	ω_T	ω	$\frac{\Delta\omega}{\omega_T} \%$
Δt_1	10,5	9,5	9,5
Δt_2	22	21	4,6
Δt_3	28	28	0
Δt_4	31	30	3,2

Оценим погрешность определения времени затухания t_1 переходного процесса от начальной амплитуды $a_0 = 250$ в до амплитуды $a_1 = 15$ в. Точное значение t_1 , определяемое из графика $u_2(t)$ (рис. 7.23), будет $t_1 = 0,85$ сек. Приближенный расчет по диаграмме качества (рис. 7.21) при грубом расчете, когда весь процесс разбивается на три участка, внутри которых считается $\xi = \text{const}$, дает $t_1 = 0,98$ сек. Более тщательный расчет приводит к лучшему совпадению получаемого времени переходного процесса с точным значением. Здесь скорее

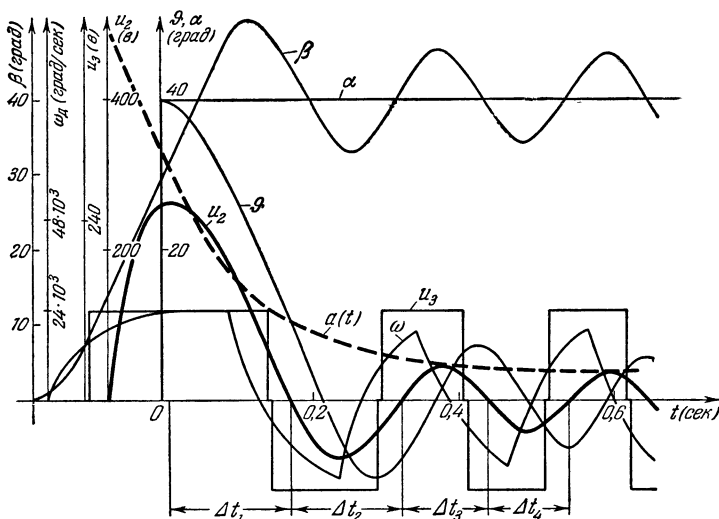


Рис. 7.24.

сказывается ошибка метода подсчета времени переходного процесса непосредственно по диаграмме качества, так как из рис. 7.23 видно, что практически время переходного процесса получается одинаковым как для огибающей, полученной приближенным методом, так и для кривой переходного процесса, полученной численно-графическим методом.

На рис. 7.24 построен переходный процесс в той же системе при повышенной крутизне датчика рассогласования $k_1 = 10$ в/град и при $a_0 = 500$ в. В данном случае в установившемся режиме имеют место автоколебания с амплитудой $A = 42$ в.

На рис. 7.25 построен переходный процесс в той же системе при $k_1 = 10$ в/град для случая, когда система приходит к режиму автоколебаний от малых начальных отклонений («снизу»), т. е. в результате расходящегося процесса. Там же показана огибающая $a(t)$, найденная по методу гармонической линеаризации на основании диаграммы качества.

Метод дает достаточно хорошие результаты и в том случае, когда колебания затухают практически за один период (рис. 7.26).

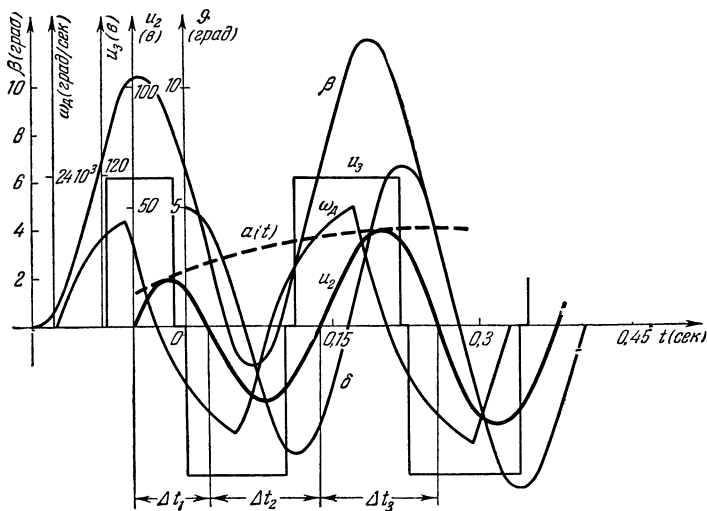


Рис. 7.25.

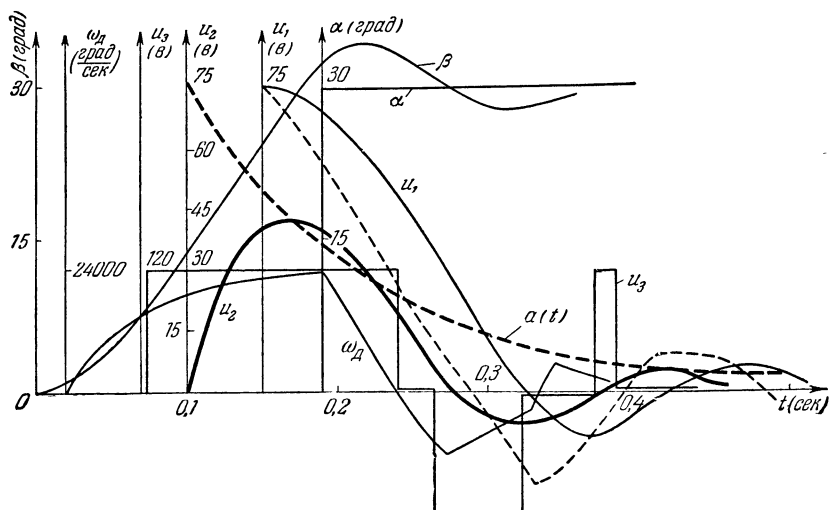


Рис. 7.26.

§ 7.8. Переходный процесс в следящей системе второго класса

В предыдущем параграфе рассматривалась нелинейная следящая система первого класса, когда под знак нелинейной функции входила только одна переменная. В данном параграфе проводится исследование переходного процесса для нелинейной следящей системы второго класса, когда под знаком нелинейной функции находится как входная, так и выходная величины нелинейного звена [228].

Структурная схема следящей системы представлена на рис. 7.27. В систему входят: датчик рассогласований 1 с передаточным числом k_1 ,

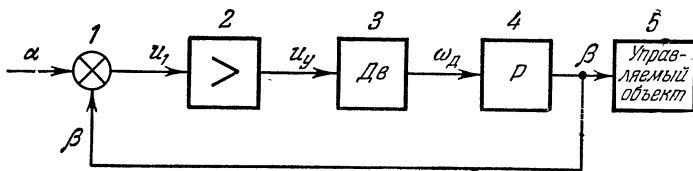


Рис. 7.27.

усилитель 2, двухфазный индукционный двигатель 3, редуктор 4. Там же показан управляемый объект 5.

Звенья системы описываются следующими уравнениями: датчик рассогласований

$$\vartheta = \alpha - \beta, \quad u_1 = -k_1 \vartheta, \quad (7.176)$$

усилитель

$$(T_1 p + 1) u_y = k_2 u_1, \quad (7.177)$$

редуктор

$$p\beta = k_4 \omega_d. \quad (7.178)$$

В этих формулах: ϑ — рассогласование, α и β — входная и выходная величины нелинейного звена, u_1 — напряжение на входе усилителя, u_y — напряжение на выходе усилителя, k_2 — коэффициент усиления усилителя, T_1 — постоянная времени усилителя, ω_d — угловая скорость вращения вала двигателя, β — угол поворота выходного вала редуктора.

Двухфазный асинхронный двигатель с полым ротором является нелинейным звеном. Особенностью механических характеристик подобных двигателей является то, что при питании двигателя от малоомощного источника коэффициент скольжения является функцией управляющего напряжения. Характеристики двигателя при этом могут аппроксимироваться прямыми линиями с различным наклоном, причем угол наклона характеристик является функцией управляющего напряжения (рис. 7.28).

Уравнение двигателя в данном случае может быть записано в виде

$$J\rho\omega_d + c(u_y)\omega_d = k_3 u_y, \quad (7.179)$$

где J — момент инерции всех вращающихся масс, приведенный к валу двигателя. С достаточной для инженерных расчетов точностью можно предполагать, что наклон механических характеристик изменяется пропорционально управляющему напряжению u_y , т. е.

$$c(u_y) = m - (m - n) \left| \frac{u_y}{u_n} \right|,$$

где u_n — номинальное значение напряжения управления, m и n — тангенсы углов наклона характеристик при $u_y = 0$ и $u_y = u_n$.

В таком случае уравнение (7.179) запишется в виде

$$J\rho\omega_d + m\omega_d - (m - n) \left| \frac{u_y}{u_n} \right| \omega_d = k_3 u_y. \quad (7.180)$$

Нелинейность в уравнении (7.180) можно представить следующим образом:

$$y = \frac{m - n}{u_n} |u_y| \omega_d. \quad (7.181)$$

Нелинейность данного вида относится ко второму классу, так как в нее входит произведение входной $|u_y|$ и выходной ω_d величин.

Для исследования переходных процессов в данном случае в соответствии с (7.52) нелинейная функция представляется через коэффициенты гармонической линеаризации в виде

$$y = \left[q(a, \xi, \omega) - \frac{\xi}{\omega} q'(a, \xi, \omega) \right] u_y + \frac{q'(a, \xi, \omega)}{\omega} \rho u_y. \quad (7.182)$$

Решение для u_y ищется в виде затухающей или расходящейся синусоиды

$$u_y = a(t) \sin \psi(t). \quad (7.183)$$

Колебания скорости двигателя ω_d будут происходить с амплитудой $a_2(t)$ и сдвигом по фазе $\varphi(\xi, \omega)$:

$$\omega_d = a_2(t) \sin [\psi(t) + \varphi(\xi, \omega)]. \quad (7.184)$$

Выразим выходную величину нелинейного звена ω_d через входную u_y , используя связь между этими переменными через линейную часть

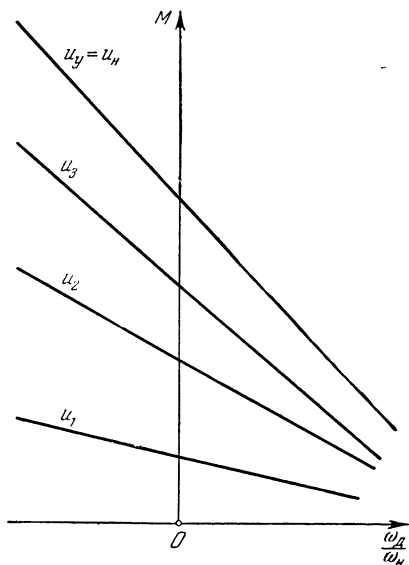


Рис. 7.28.

системы. Уравнение линейной части системы согласно уравнениям звеньев (7.176) — (7.178) при $\alpha(t) = 0$ запишем в виде

$$\omega_d = - \frac{(T_1 p + 1)p}{k} u_y, \quad k = k_1 k_2 k_3. \quad (7.185)$$

Тогда на основании (7.98) запишем:

$$\omega_d = U_1(\xi, \omega) a \sin \psi + V_1(\xi, \omega) a \cos \psi, \quad (7.186)$$

где U_1 и V_1 — соответственно вещественная и мнимая части комплексного выражения, получаемого из передаточной функции (7.185) при подстановке $p = \xi + j\omega$.

Выполняя указанную подстановку, получим:

$$U_1 = - \frac{\xi + T_1 \xi^2 - T_1 \omega^2}{k}, \quad V_1 = - \frac{2T_1 \xi \omega + \omega}{k}. \quad (7.187)$$

Следовательно, нелинейность (7.181) с учетом (7.186), (7.183) и (7.187) запишется в виде

$$y = - \frac{m-n}{u_H} |a \sin \psi| a \left[\frac{\xi + T_1 \xi^2 - T_1 \omega^2}{k} \sin \psi + \frac{2T_1 \xi \omega + \omega}{k} \cos \psi \right]. \quad (7.188)$$

На основании полученного выражения для нелинейности определим значения коэффициентов гармонической линеаризации q и q' , входящих в формулу (7.182).

Для коэффициента q имеем:

$$\begin{aligned} q &= \frac{-1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{m-n}{u_H} |a \sin \psi| a \left[\frac{\xi + T_1 \xi^2 - T_1 \omega^2}{k} \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2T_1 \xi \omega + \omega}{k} \cos \psi \right] \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{8(m-n)a}{3\pi u_H} \cdot \frac{\xi + T_1 \xi^2 - T_1 \omega^2}{k}. \end{aligned}$$

Выполняя вычисление коэффициента q' , получим:

$$\begin{aligned} q' &= \frac{-1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} \frac{m-n}{u_H} |a \sin \psi| a \left[\frac{\xi + T_1 \xi^2 - T_1 \omega^2}{k} \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2T_1 \xi \omega + \omega}{k} \cos \psi \right] \cos \psi d\psi = \\ &= - \frac{4(m-n)a}{3\pi u_H} \cdot \frac{2T_1 \xi \omega + \omega}{k}. \end{aligned}$$

После этого гармонически линеаризованное выражение нелинейности примет вид

$$\begin{aligned} y &= \left[\frac{8(m-n)a}{3\pi u_H} \cdot \frac{\xi + T_1 \xi^2 - T_1 \omega^2}{k} + \frac{4(m-n)a}{3\pi u_H} \cdot \frac{(2T_1 \xi + 1)\xi}{k} \right] u_y - \\ &\quad - \frac{4(m-n)a}{3\pi u_H} \cdot \frac{2T_1 \xi + 1}{k} p u_y. \end{aligned}$$

Уравнение двигателя с учетом полученного значения для u согласно (7.180) будет

$$\frac{J}{m} p \omega_{\text{х}} + \omega_{\text{х}} = \left[\frac{k_3}{m} - \frac{4(m-n)a}{3u_{\text{н}} \pi k m} (4T_1 \xi^2 + 3\xi - 2T_1 \omega^2) + \frac{4(m-n)a}{3u_{\text{н}} \pi k m} (2T_1 \xi + 1) p \right] u_{\text{у}}.$$

Введем обозначения:

$$k' = -\frac{4(m-n)a}{3u_{\text{н}} \pi k m} (4T_1 \xi^2 + 3\xi - 2T_1 \omega^2),$$

$$k'' = \frac{4(m-n)a}{3u_{\text{н}} \pi k m} (2T_1 \xi + 1), \quad T = \frac{J}{m}.$$

После этого гармонически линеаризованное уравнение двигателя запишется в виде

$$(Tp + 1) \omega_{\text{х}} = \left(\frac{k_3}{m} + k' + k'' p \right) u_{\text{у}}. \quad (7.189)$$

Как видно из полученного уравнения, нелинейность характеристик двигателя в данном случае сводится к наличию в уравнении (7.189) операторного коэффициента

$$k^* = \frac{k_3}{m} + k' + k'' p,$$

который является функцией амплитуды a колебаний напряжения $u_{\text{у}}$, коэффициента затухания ξ и частоты колебаний системы ω .

Учитывая уравнение линейной части (7.185) и гармонически линеаризованное уравнение двигателя (7.189), характеристическое уравнение системы запишем в виде

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0, \quad (7.190)$$

где

$$A_1 = \frac{T_1 + T}{T_1 T}, \quad A_2 = \frac{1 + k k''}{T_1 T}, \quad A_3 = \left(\frac{k_3}{m} + k' \right) \frac{k}{T_1 T}. \quad (7.191)$$

Для определения переходного процесса необходимо построить диаграмму качества, т. е. зависимости амплитуды от интересующего параметра при постоянных значениях затухания $\xi = \text{const}$ и частоты $\omega = \text{const}$. Для этого воспользуемся формулами (7.82) и (7.83) для системы третьего порядка. Указанные формулы определяют связь показателя затухания и частоты с параметрами системы и имеют вид:

$$\xi = -\frac{A_1 A_2 - A_3}{2[A_2 + (A_1 + 2\xi)^2]}, \quad \omega^2 = \frac{A_3}{A_1 + 2\xi} - \xi^2.$$

Подставляя в приведенные формулы значения коэффициентов A_1 , A_2 , A_3 , получим:

$$\xi = - \frac{(T_1 + T)(1 + kk'') - T_1 T \left(\frac{k_s}{m} + k' \right) k}{2[T_1 T(1 + kk'') + (T_1 + T + 2\xi T_1 T)^2]}, \quad (7.192)$$

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{k_s}{m} + k' \right) k}{T_1 + T + 2\xi T_1 T} - \xi^2. \quad (7.193)$$

Из данных уравнений для построения переходного процесса необходимо определить зависимости $\xi(a)$ и $\omega(\xi)$. Для этого уравнения (7.192) и (7.193) решим графически.

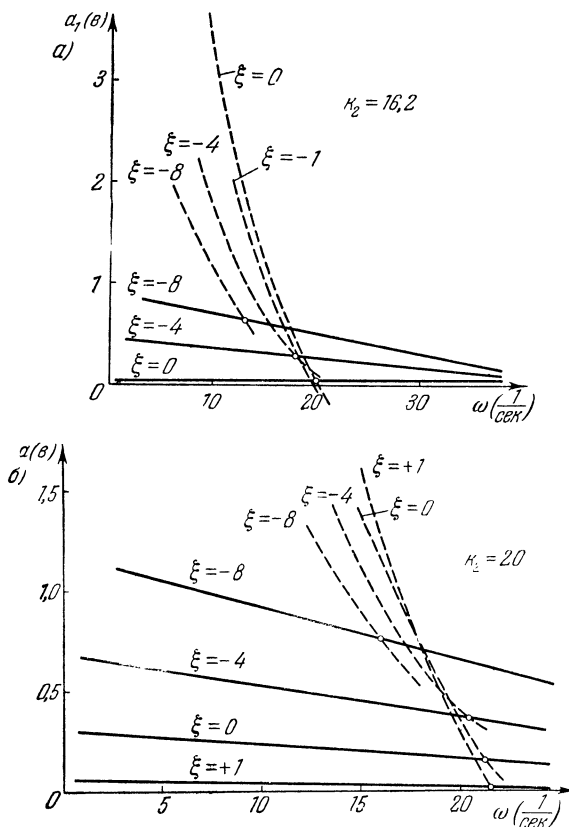


Рис. 7.29.

Выразив из каждого уравнения амплитуду колебаний a (входящую через k' и k''), построим по каждому из уравнений зависимости $a = a(\omega)$ при $\xi_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Точки пересечения указан-

ных кривых с одинаковыми индексами ξ_i соответствуют совместному решению уравнений (7.192) и (7.193).

На рис. 7.29, *а* и *б* построены графические решения для $k_2 = 16,2$ и $k_2 = 20$ при следующих значениях других параметров системы: $T = 0,05$ сек, $T_1 = 0,05$ сек, $u_n = 110$ в, $k_1 = 57$ в, $k_3 = 1,5 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{в}}$, $m = 0,34 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$, $n = 1 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}$, $k_4 = 0,01$. Сплошные линии построены на основании преобразованного уравнения (7.192), пунктирные — по уравнению (7.193).

При помощи графиков, приведенных на рис. 7.29, построены основные зависимости $\xi(a)$, $\omega(a)$ (рис. 7.30, *а*, *б*) при $k = 16,2$ и 20 . Полученные зависимости дают возможность приблизительно оценить характер переходного процесса при известных параметрах системы.

На основании предыдущего построения можно получить диаграмму качества переходного процесса (рис. 7.31). Диаграмма качества показывает, как изменяются постоянная времени переходного процесса $\tau = \frac{1}{\xi}$ и частота колебаний ω при изменении амплитуды колебаний в области интересующих значений параметра (в данном случае $16,2 < k_2 < 20$).

Диаграмма качества переходного процесса в нелинейной системе позволяет при определенных значениях параметров системы найти перерегулирование, длительность переходного процесса. Например, при $k_2 = 20$ длительность переходного процесса, согласно (7.115), при начальной амплитуде колебаний $a_0 = 135$ в и конечной $a_k = 35$ в будет

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_{a_0}^{a_k} \frac{da}{a\xi(a)} \approx \sum_{i=1}^k \frac{1}{\xi(a_{0i} + 0,5\Delta a_i)} \ln \frac{a_{0i} + \Delta a_i}{a_i} = \\ &= \frac{1}{9,5} \ln \frac{135}{100} + \frac{1}{7,5} \ln \frac{100}{66} + \frac{1}{5} \ln \frac{66}{35} = 0,209 \text{ сек.} \end{aligned}$$

Здесь переходный процесс разбит на три участка, на каждом из

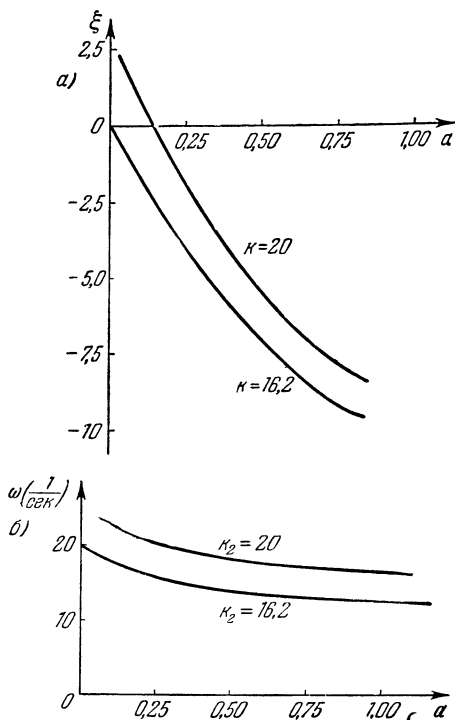


Рис. 7.30.

которых для ξ принято среднее значение. Заметим, что точное значение для данного случая $t_1 = 0,240$ сек, т. е. погрешность определения длительности переходного процесса составляет 12,5%.

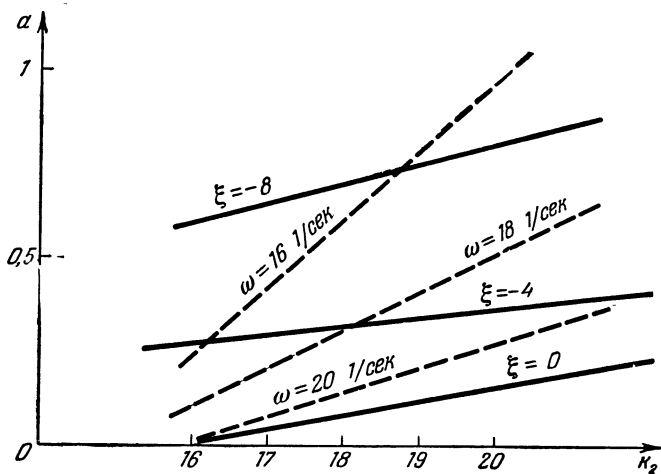


Рис. 7.31.

Для оценки погрешностей метода на рис. 7.32 приведено точное графоаналитическое решение исходных уравнений. Пунктирная линия построена на основании графиков рис. 7.30 и изображает изменение

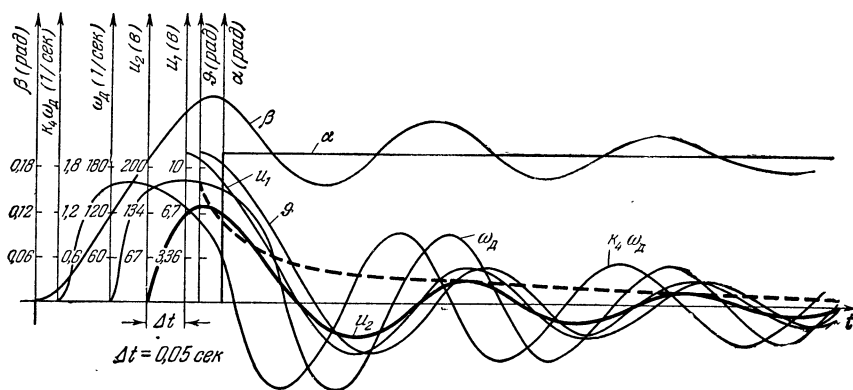


Рис. 7.32.

огибающей переходного процесса по результатам приближенного решения. Как видно, и для нелинейных систем второго класса приближенное определение переходного процесса по методу гармонической линеаризации дает небольшую, вполне допустимую в технических расчетах погрешность.

§ 7.9. Переходный процесс в системе третьего класса

Рассмотрим применение метода гармонической линеаризации для построения переходных процессов в нелинейных системах третьего класса, т. е. системах, содержащих несколько нелинейных звеньев, разделенных линейными частями.

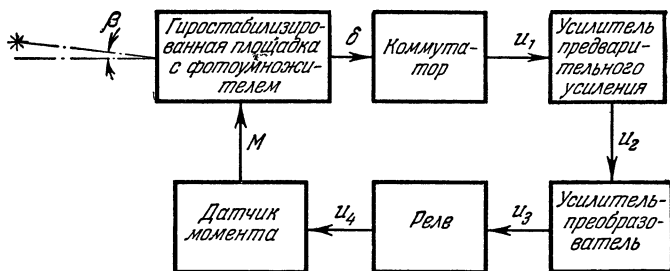


Рис. 7.33.

В качестве первого примера возьмем систему слежения за источником излучения с чувствительным элементом в виде фотоэлектронного умножителя. Структурная схема системы представлена на рис. 7.33.

Фотоумножитель устанавливается на гиростабилизированной площадке. Полярность и величина сигнала на выходе фотоумножителя не изменяются при изменении знака отклонения оптической оси фотоумножителя от направления на источник излучения. Для определения направления отклонения применяется коммутатор. Фотоумножитель совместно с коммутатором может быть представлен в виде идеального релейного звена с идеальной релейной статической характеристикой (рис. 7.34).

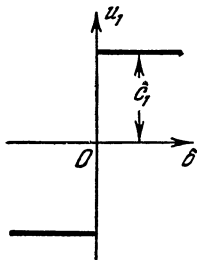


Рис. 7.34.

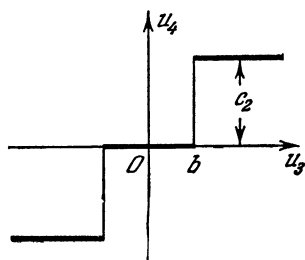


Рис. 7.35.

Слабый по мощности сигнал с выхода чувствительного элемента поступает на усилитель предварительного усиления с коэффициентом усиления k_1 и постоянной времени T_1 .

Затем сигнал поступает на усилитель-преобразователь, который дополнительно усиливает сигнал и преобразует импульсы в напряжение постоянного тока. Усилитель-преобразователь имеет коэффициент усиления k_2 и постоянную времени T_2 . Напряжение u_3 с усилителя-преобразователя подается в управляющую обмотку реле, статическая характеристика которого приведена на рис. 7.35.

Через контакты реле напряжение u_4 подается на датчик момента. Последний прикладывает момент к гироскопу, который прецессирует вместе с чувствительным элементом в сторону уменьшения рассогласования δ (угла в вертикальной плоскости между оптической осью чувствительного элемента и направлением на источник излучения).

Параметры системы должны обеспечивать: а) либо отсутствие автоколебаний, либо автоколебания, амплитуда которых не превышает определенную величину; б) быстро затухающий переходный процесс при отклонении системы от нулевого положения¹⁾.

Звенья системы в собственном движении описываются следующими уравнениями:

чувствительный элемент

$$\delta = -\beta, \quad u_1 = F_1(\delta),$$

усилитель предварительного усиления

$$(T_1 p + 1) u_2 = k_1 u_1,$$

усилитель-преобразователь

$$(T_2 p + 1) u_3 = k_2 u_2,$$

реле

$$u_4 = F_2(u_3),$$

датчик моментов

$$M = k_3 u_4,$$

гиростабилизированная площадка

$$\delta = -\frac{k_4}{p} M,$$

где $F_1(\delta)$ и $F_2(u_3)$ — нелинейные функции для соответствующих звеньев.

Для исследования системы необходимо предварительно провести гармоническую линеаризацию нелинейностей в соответствии с формулами (7.104).

Для характеристики коммутатора совместно с множителем (рис. 7.34) коэффициенты гармонической линеаризации согласно (3.14) будут

$$q_1(a) = \frac{4c_1}{\pi a}; \quad q'_1(a) = 0.$$

Таким образом, гармоническая линеаризация дает

$$u_1 = q_1(a) \delta = \frac{4c_1}{\pi a} \delta. \quad (7.194)$$

Аналогично для характеристики реле (рис. 7.35), согласно (3.13), получим:

$$q_2(a_2) = \frac{4c_2}{\pi a_2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}}, \quad q'_2(a_2) = 0$$

¹⁾ Эта задача была решена Е. И. Хлыпало.

и, следовательно, в результате гармонической линеаризации

$$u_4 = q_2(a_2) u_3 = \frac{4c_2}{\pi a_2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}} u_3. \quad (7.195)$$

Учитывая уравнения линейных звеньев и гармонически линеаризованные уравнения (7.194) и (7.195) для нелинейных звеньев, общее уравнение системы для угла рассогласования δ запишем в виде

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_1 k_2 k_3 k_4 q_1(a) q_2(a_2)] \delta = 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение системы имеет вид

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0, \quad (7.196)$$

где

$$A_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}, \quad A_2 = \frac{1}{T_1 T_2}, \quad A_3 = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 q_1(a) q_2(a_2)}{T_1 T_2}.$$

Связь между амплитудами колебаний на входе нелинейных звеньев a и a_2 , согласно структурной схеме системы, определяется через соответствующую передаточную функцию:

$$\frac{\delta}{u_3} = \frac{4c_2}{\pi a_2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}} \frac{k_3 k_4}{p}.$$

Отсюда получается выражение для амплитуды колебаний гиростабилизированной площадки

$$a = \frac{4c_2}{\pi} \frac{k_3 k_4}{\sqrt{\xi^2 + \omega^2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}}. \quad (7.197)$$

Если заменить в выражениях для коэффициентов характеристического уравнения (7.196) величину a через a_2 в соответствии с формулой (7.197), то при исследовании будет определяться амплитуда колебаний напряжения на входе релейного звена. Однако больший практический интерес представляет исследование колебаний чувствительного элемента, поэтому уравнение (7.197) целесообразно использовать в виде

$$a_2 = \frac{4c_2 k_3 k_4 b}{\sqrt{(4c_2 k_3 k_4)^2 - a^2 \pi^2 (\xi^2 + \omega^2)}}. \quad (7.198)$$

Уравнения для исследования переходных процессов, согласно (7.82) и (7.83), в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= - \frac{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - k_1 k_2 k_3 k_4 q_1(a) q_2(a_2)}{2 T_1 T_2 \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2\xi \right)^2}, \\ \omega^2 &= \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 q_1(a) q_2(a_2)}{T_1 + T_2 + 2 T_1 T_2 \xi} - \xi^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.199)$$

Коэффициент, характеризующий параметры нелинейных звеньев, в соответствии с значениями $q_1(a)$, $q_2(a_2)$ и (7.197) будет

$$q_1(a) q_2(a_2) = \frac{4c_1}{\pi k_3 k_4 a_2} \sqrt{\xi^2 + \omega^2}.$$

Заменяя в полученной формуле амплитуду колебаний a_2 ее значением из (7.198), получим:

$$q_1(a) q_2(a_2) = \frac{4c_1(\xi^2 + \omega^2)}{\pi b k_3 k_4} \sqrt{\frac{1}{\xi^2 + \omega^2} - \left(\frac{a\pi}{4c_2 k_3 k_4}\right)^2}. \quad (7.200)$$

Для исследования переходных процессов в уравнения (7.199) необходимо подставить полученное значение $q_1(a) q_2(a_2)$ и решать уравнения методом последовательного приближения. Однако в таком случае получаются громоздкие выражения, решение которых сравнительно трудоемко. Поэтому перед решением формул их целесообразно несколько упростить, не вводя при этом слишком больших допущений или приближений.

В соответствии с идеей, положенной в основу метода, одним из условий применимости метода является достаточная колебательность переходного процесса. Практически колебания не должны затухать быстрее, чем за 1—3 периода. Даже когда колебания затухают за один период, отношение $\frac{\omega}{\xi} = 4$. При этом ξ^2 составляет менее 7% от ω^2 . Следовательно, учитывая приближенность метода, во всех формулах можно пренебречь величиной ξ^2 по сравнению с ω^2 . Одновременно для сокращения записи введем обозначения:

$$k_r = k_3 k_4, \quad k_y = k_1 k_2.$$

При этом основные формулы (7.199) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= - \frac{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - \frac{4c_1 \omega}{\pi b} k_y \sqrt{1 - \left(\frac{a\pi \omega}{4c_2 k_r}\right)^2}}{2T_1 T_2 \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 2\xi\right)^2}, \\ \omega^2 &= \left(\frac{4c_1 c_2 k_y k_r}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(c_2 b k_r)^2 (T_1 + T_2 + 2T_1 T_2 \xi)^2 + (a c_1 k_y)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.201)$$

Из выражений (7.201) видно, что коэффициент затухания переходных процессов ξ и частота колебаний ω являются сложными функциями параметров системы и амплитуды колебаний a . Кроме того, коэффициент затухания является функцией частоты колебаний, а частота колебаний, в свою очередь, является функцией коэффициента затухания.

Первым шагом решения общей задачи исследования переходных процессов в нелинейной системе является определение автоколебаний.

При этом $\xi = 0$, $a = A$, $\omega = \Omega$ и формулы (7.201) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - \frac{4c_1 \Omega k_y}{\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{A \pi \Omega}{4c_2 k_r} \right)^2} &= 0, \\ \Omega &= \frac{4c_1 c_2 k_y k_r}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(c_2 b k_r)^2 (T_1 + T_2)^2 + (A c_1 k_y)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.202)$$

Из первой и второй формул (7.202) получаем выражения для амплитуды колебаний:

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{c_2 k_r}{\Omega^2} \right)^2 \left[1,62 - \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right)^2 \frac{b^2}{(c_1 \Omega k_y)^2} \right], \\ A^2 &= \left(\frac{4c_2 k_r}{\pi \Omega} \right)^2 - \frac{(c_2 b k_r)^2 (T_1 + T_2)^2}{(c_1 k_y)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.203)$$

Приравнивая полученные выражения для квадратов амплитуды и производя сокращения, получаем:

$$\Omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2},$$

т. е. в рассматриваемой нелинейной системе частота автоколебаний определяется только постоянными времени системы и не зависит от коэффициентов усиления.

Подставляя полученное значение Ω в первую формулу (7.203), получим окончательное выражение для амплитуды автоколебаний

$$A^2 = (c_2 k_r)^2 T_1 T_2 \left[1,62 - \frac{(T_1 + T_2)^2 b^2}{T_1 T_2 c_1^2 k_y^2} \right]. \quad (7.204)$$

Поскольку коэффициент $(c_2 k_r)^2 T_1 T_2$ является явно положительным, автоколебания в системе возможны лишь при

$$\frac{(T_1 + T_2)^2 b^2}{T_1 T_2 c_1^2 k_y^2} < 1,62.$$

Отсюда критическое значение коэффициента усиления будет

$$k_{y.кр} = 0,786 \frac{b}{c_1} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}.$$

Из формулы (7.204) следует, что для уменьшения амплитуды автоколебаний необходимо прежде всего понижать коэффициент усиления системы и величину постоянных времени.

На рис. 7.36 для конкретных численных значений параметров: $T_1 = 0,1$ сек, $c_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ в, $k_r = 1,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{в} \cdot \text{сек}}$, $T_2 = 0,2$ сек, $c_2 = 40$ в, $k_y = 4700$, $b = 10$ в, $k_1 = 1,6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{в} \cdot \text{сек}}$ построены графики амплитуды и частоты автоколебаний в зависимости от изменения некоторых параметров системы.

Из рис. 7.36, а следует, что наибольшее влияние на изменение амплитуды автоколебаний коэффициент усиления оказывает в области его малых значений. Из рис. 7.36, б видно, что амплитуда автоколебаний изменяется прямо пропорционально «общей постоянной» времени $T_1 + T_2$. Рис. 7.36, в иллюстрирует влияние на амплитуду автоколебаний коэффициента k_d , входящего в коэффициент k_r . Изменение коэффициента k_d может осуществляться путем изменения кинетического момента гироскопа H .

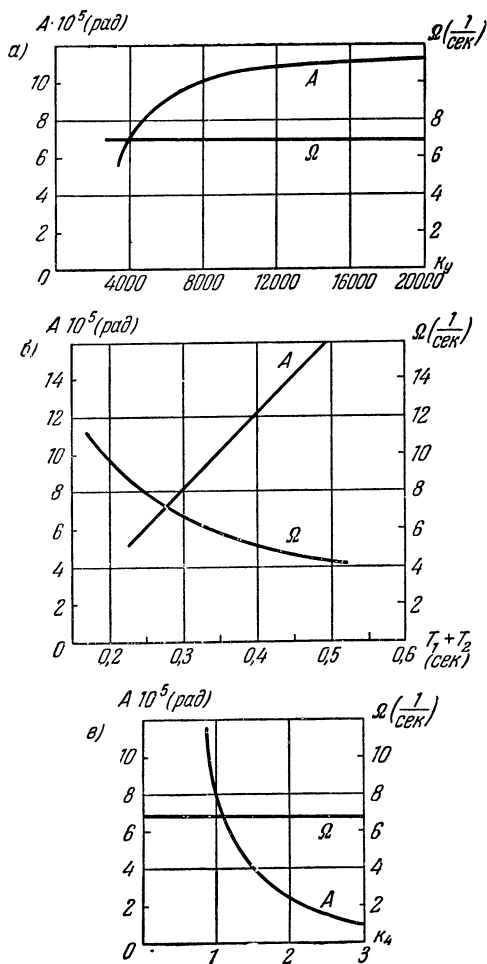


Рис. 7.36.

Приведенные графики позволяют приблизительно выбрать основные параметры системы. После этого может решаться следующий вопрос, т. е. исследование переходных процессов.

В условиях первоначального включения системы или по другим причинам приемник может значительно отклониться от нулевого положения. Величина отклонения может в несколько раз превышать величину амплитуды автоколебаний. После включения в системе начнется переходный процесс, при котором амплитуда колебаний будет уменьшаться до величины амплитуды автоколебаний. Время затухания определяется параметрами системы и имеет существенное значение для качества ее работы. Практически необходимо, чтобы переходный процесс заканчивался во всяком случае за несколько секунд. Поэтому последующий расчет должен дать, во-первых, возможность определить постоянную времени и частоту колебаний в переходном процессе, и, во-вторых, рекомендации по выбору параметров системы из условия получения требуемого переходного процесса, если он из первого расчета окажется неприемлемым.

Поэтому последующий расчет должен дать, во-первых, возможность определить постоянную времени и частоту колебаний в переходном процессе, и, во-вторых, рекомендации по выбору параметров системы из условия получения требуемого переходного процесса, если он из первого расчета окажется неприемлемым.

Зависимость амплитуды и частоты колебаний в переходном процессе для исследуемой системы определяются формулами (7.201). Решение указанных формул, как указывалось выше, можно производить методом последовательного приближения. Поскольку по условиям применимости метода переходный процесс должен быть достаточно колебательным, то полагаем, что $\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \gg 2\xi$. При этих допущениях решение формул (7.201) производится в следующем порядке.

В формулы подставляются выбранные или заданные условиями работы параметры системы. В частности, например, $T_1 = 0,1$ сек, $c_2 = 10$ в, $k_T = 1,6 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{сек}}$, $T_2 = 0,2$ сек, $k_y = 4700$, $a_0 = 82 \times 10^{-5}$ рад, $c_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ в, $b = 10$ в. Здесь a_0 — начальное отклонение системы от нулевого положения.

После этого в правой части формул (7.201) остаются две неизвестные величины: частота колебаний ω и коэффициент затухания системы ξ . В первом приближении полагаем в правой части формул $\xi = 0$ и из второй формулы (7.201) определяем первое приближение для частоты колебаний ω_1 . Подставляем полученное значение ω_1 в первую формулу (7.201) и определяем первое приближение для коэффициента затухания ξ . Подставляя значение ξ во вторую формулу (7.199), определяем второе приближение ω_2 . Таким же образом определяется второе приближение ξ_2 . Если полученное значение ξ_2 значительно отличается от ξ_1 , то определяется третье приближение.

Практически вследствие малой величины ξ_1 решение получается достаточно быстро. Таким образом будут получены значения ξ и ω для одного из значений амплитуды колебаний a . В частности для вышеприведенных значений параметров системы и $a_{1i} = 82 \cdot 10^{-5}$ рад имеем $\xi \approx -2,3 \frac{1}{\text{сек}}$, $\omega \approx 1 \frac{1}{\text{сек}}$.

Затем расчет повторяется для других необходимых значений амплитуды колебаний.

На рис. 7.37 приведены графики изменения коэффициента затухания ξ и частоты колебаний ω при изменении амплитуды колебаний a . Полученные графики позволяют приблизительно оценить переходный процесс.

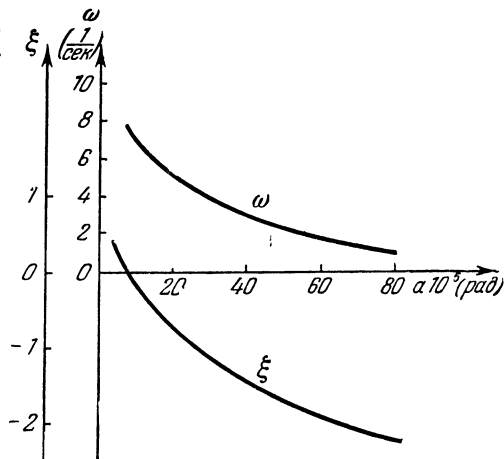


Рис. 7.37.

Если подобные расчеты произвести для ряда других значений одного из параметров системы, например коэффициента усиления, то можно построить диаграмму качества нелинейных процессов, которая позволяет оценивать переходные процессы во всей области изменения интересующего параметра.

Рассмотренная выше система является одноконтурной. Это значительно упростило все выкладки. Однако и для более сложных систем исследование переходных процессов не составляет затруднений.

Предположим, например, что проведенный расчет показал, что система с подобной структурной схемой не обеспечивает необходимых

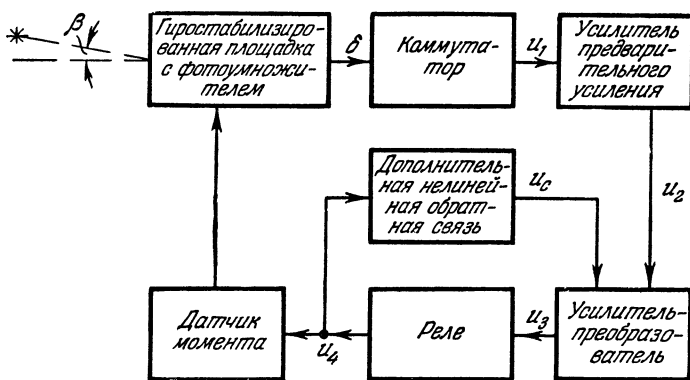


Рис. 7.38.

параметров переходного процесса. Поэтому в систему необходимо ввести дополнительные корректирующие сигналы, например гибкую обратную связь. Снять сигнал, пропорциональный скорости или ускорению прецессионного движения площадки, затруднительно ввиду малых скоростей ее движения. Поэтому целесообразным является, например, посмотреть вариант схемы с нелинейной гибкой обратной связью, охватывающей реле и каскады усилителей (рис. 7.38).

В данном случае переходные процессы собственного движения системы описываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= -\beta; \quad u_1 = F_1(\delta); \quad u_2 = k_1 u_1; \quad (T_1 p + 1) u_3 = k_2 (u_2 - u_c); \\ u_4 &= F_2(u_3); \quad M = k_3 u_4; \quad (T_c p + 1) u_c = p k_4 F_3(u_4); \quad \delta = -\frac{k_4}{p} M. \end{aligned} \right\} \quad (7.205)$$

Здесь, в отличие от предыдущего примера, усилитель предварительного усиления считается безынерционным.

Предполагаем, что нелинейный член в уравнении обратной связи (последнее уравнение (7.205)) определяется кубической зависимостью $F_3 = u_4^3$.

Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейностей согласно (3.14), (3.13) и (3.32) будут:

$$q_1(a) = \frac{4c_1}{\pi a}; \quad q_2(a_2) = \frac{4c_2}{\pi a_2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}}; \quad q_3(a_3) = \frac{3a_3^2}{4}.$$

Объединяя уравнение звеньев системы, с учетом гармонической линеаризации нелинейностей получим общее уравнение системы для рассогласования δ в виде

$$\{[(T_1 p + 1)(T_c p + 1) + k_2 k_c q_2(a_2) q_3(a_3) p] p + \\ + k_1 k_2 k_3 k_4 q_1(a) q_2(a_2) (T_c p + 1)\} \delta = 0.$$

Характеристическое уравнение системы будет

$$p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0,$$

где

$$A_1 = \frac{T_1 + T_c}{T_1 T_c}; \quad A_2 = \frac{1 + k_2 k_c q_2(a_2) q_3(a_3) + k_1 k_2 k_3 k_4 q_1(a) q_2(a_2) T_c}{T_1 T_c}; \\ A_3 = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 q_1(a_1) q_2(a_2)}{T_1 T_c}.$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$k'_c = k_2 k_c, \quad q_2(a_2) q_3(a_3) = q_4(a_2, a_3), \\ k = k_1 k_2 k_3 k_4, \quad q_1(a_1) q_2(a_2) = q_5(a, a_2).$$

После этого уравнения для исследования переходных процессов, согласно (7.82) и (7.83), примут вид

$$\xi = - \frac{\frac{T_1 + T_c}{T_1 T_c} [1 + k'_c q_4(a_2, a_3) + k q_5(a, a_2)] - k q_5(a, a_2)}{2 [1 + k'_c q_4(a_2, a_3) + k q_5(a, a_2) + T_1 T_c \left(\frac{T_1 + T_c}{T_1 T_c} + 2\xi \right)^2]}, \\ \omega^2 = \frac{k q_5(a, a_2)}{T_1 + T_c + 2\xi T_1 T_c} - \xi^2.$$

Связь между a , a_2 , a_3 , согласно (7.205), определится формулами:

$$a = \frac{k_3 k_4}{\omega} \frac{4c_2}{\pi a_2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}}, \quad a_2 = \frac{k_3 k_4}{\omega} \frac{4c_2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}}, \\ a_3 = \frac{4c_2}{\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a_2^2}}.$$

В дальнейшем исследование проводится аналогично тому, как это делалось в случае одноконтурной системы.

Для определения погрешности метода на рис. 7.39 построен переходной процесс в системе путем численно-графического решения нелинейных уравнений данной системы при начальном значении амплитуды

колебаний $a_0 = 80 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$ и ранее принятых значениях параметров. На том же рисунке пунктиром изображена огибающая переходного процесса, построенная приближенно на основании графиков $\xi(a)$.

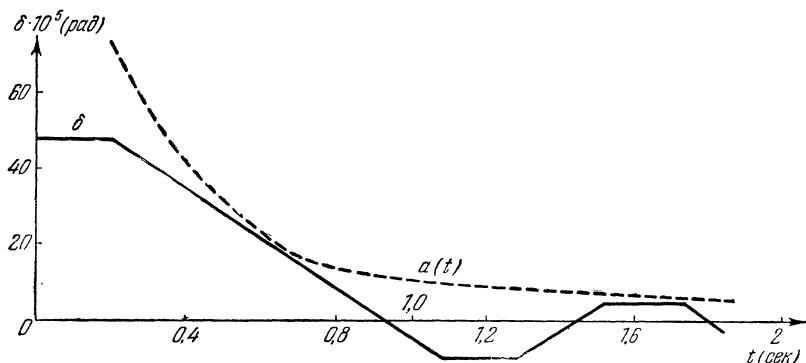


Рис. 7.39.

Из рисунка видно, что приближенный расчет по методу гармонической линеаризации дает небольшую, допустимую в технических расчетах погрешность при определении огибающей переходного процесса в нелинейных системах третьего класса.

§ 7.10. Пример скользящего переходного процесса

Рассмотрим исследование скользящего режима в нелинейной автоматической системе, выполненное М. В. Стариковой [227]. Автоколебания в подобной системе исследовались в § 6.8.

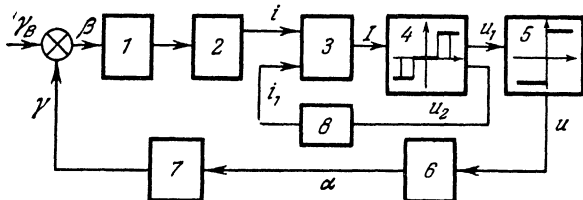


Рис. 7.40.

Скользящий режим рассматривается как монотонное изменение координаты с накладываемыми на него автоколебательными вибрациями.

Исследуемая система представлена структурными схемами (рис. 7.40 и 7.41), где обозначено: 1 — регулируемый объект, 2 — чувствительный элемент, 3 — усилитель, 4 — управляющее реле, 5 — силовое реле,

6 — исполнительный механизм, 7 — регулирующий орган, 8 — звено обратной связи. Система описывается следующими уравнениями: объект с чувствительным элементом

$$(d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1)i = (c_1 p + c_2)(\gamma_{\text{в}} - \gamma), \quad (7.206)$$

усилитель

$$(T_2 p + 1)I = k_1 i - k_2 i_1, \quad (7.207)$$

нелинейное звено $HЗ_1$

$$u = F_1(I), \quad (7.208)$$

исполнительный механизм

$$(T_3 p + 1)p\alpha = k_3 e^{-\tau p} u, \quad (7.209)$$

регулирующий орган

$$\gamma = s\alpha, \quad (7.210)$$

обратная связь с нелинейным звеном $HЗ'$

$$i_1 = k_{0.c} u_2, \quad r_2 = F'(I) = kF_1(I), \quad (7.211)$$

где γ — регулирующее воздействие, $\gamma_{\text{в}}$ — возмущающее воздействие, τ — запаздывание в исполнительном механизме и реле, s — крутизна характеристики регулирующего органа.

Будем искать решение для переменной I в виде двух составляющих:

$$I = I^0 + I^*,$$

$$I^* = a_1 \sin \omega t,$$

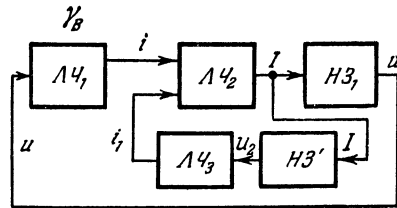


Рис. 7.11.

где I^0 — медленно меняющаяся аperiodическая составляющая тока, I^* — колебательная составляющая.

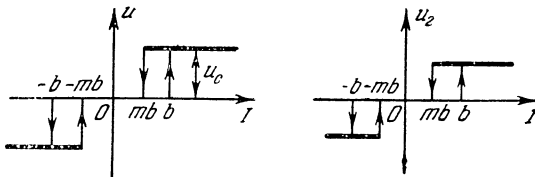


Рис. 7.42.

На рис. 7.42 изображены характеристики нелинейных звеньев $HЗ_1$ (рис. 7.42, а) и $HЗ'$ (рис. 7.42, б).

Гармоническая линеаризация уравнения (7.208) дает

$$u = F_1^0(a_1, I^0) + \left[q_1(a_1, I^0) + \frac{q_1'(a_1)}{\omega} p \right] I^*, \quad (7.212)$$

где составляющая F_1^0 и коэффициенты q_1 и q'_1 для случая колебаний, при которых работает только один контакт реле (скользящий режим), т. е. при условии

$$|b - I^0| < a_1 < b + I^0,$$

имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} F_1^0(a_1, I^0) &= \frac{u_c}{2\pi} \left[\pi - \arcsin \frac{mb - |I^0|}{a_1} - \arcsin \frac{b - |I^0|}{a_1} \right] \text{sign } I^0, \\ q_1(a_1, I^0) &= \frac{u_c}{\pi a_1} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b - |I^0|}{a_1} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb - |I^0|}{a_1} \right)^2} \right], \\ q'_1(a_1) &= \frac{u_c}{\pi a_1} [m - 1]. \end{aligned} \right\} \quad (7.213)$$

Для исследования автоколебательных вибраций воспользуемся методом гармонической линеаризации. Для этого по линейным уравнениям звеньев системы и гармонически линеаризованному уравнению нелинейного звена составим характеристическое уравнение, используя колебательные составляющие переменных величин.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} (d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)p + \\ + sk_1 k_3 (c_1 p + c_2) \left[q_1(a_1, I^0) + \frac{q'_1(a_1)}{\omega} p \right] e^{-\tau p} + \\ + k_{o.c} k_2 k (d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p \left[q_1(a_1, I^0) + \right. \\ \left. + \frac{q'_1(a_1)}{\omega} p \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.214)$$

Подстановка $p = j\omega$ в характеристический полином (7.214) дает уравнение

$$L(j\omega) = X(a_1, \omega, I^0) + jY(a_1, \omega, I^0) = 0,$$

которое разбиваем на два уравнения:

$$X(a_1, \omega, I^0) = 0, \quad Y(a_1, \omega, I^0) = 0. \quad (7.215)$$

Для определения амплитуды и частоты вибраций при заданных параметрах системы представим левые части уравнений (7.215) в виде

$$\left. \begin{aligned} X(a_1, \omega, I^0) &= X_1(\omega) + sX_2(a_1, \omega, I^0) + k_{o.c} X_3(a_1, \omega, I^0), \\ Y(a_1, \omega, I^0) &= Y_1(\omega) + sY_2(a_1, \omega, I^0) + k_{o.c} Y_3(a_1, \omega, I^0). \end{aligned} \right\} \quad (7.216)$$

Устойчивость периодического решения определяется известными способами.

Определим условия существования скользящего режима. При постоянном или медленно меняющемся возмущении скользящий режим будет иметь место в том случае, если медленно меняющаяся составляющая I^0 и амплитуда a_1 изменяются в таких пределах, что работает

только один и тот же контакт (рис. 7.43), т. е. скользящий режим будет иметь место при выполнении следующих условий:

$$b - a_1 \leq |I^0| \leq a_1 + mb; \quad |I^0| > a_1 - b. \quad (7.217)$$

Здесь первое условие обеспечивает срабатывание и отпускание одного контакта реле; второе условие обеспечивает отсутствие включения другого контакта реле.

Построим сглаженную с помощью вибраций характеристику нелинейного звена. При изменении величины I^0 изменяются значения a_1 и ω , так как коэффициент $q_1(a_1, I^0)$, входящий в характеристическое уравнение, зависит от I^0 .

Найдем зависимость амплитуды и частоты вибрации a_1, ω от медленно меняющейся составляющей I^0 . Для этого, задаваясь различными значениями I^0 , найдем $q_1(a_1, I^0)$; затем для тех же значений I^0 найдем a_1 и ω из уравнений $X=0, Y=0$.

Из условия (7.217) следует, что граничные значения I^0 , при которых может иметь место скользящий режим, следующие:

$$|I_1^0| = b - a_1; \quad |I_2^0| = a_1 + mb \quad (|I^0| > a_1 - b). \quad (7.218)$$

Найдем амплитуду и частоту вибраций для этих значений I^0 при заданных параметрах системы. Для удобства представим слагаемые характеристического уравнения (7.214) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} X_1(\omega) &= T_1 T_2 T_3 d_1 \omega^6 + \\ &+ [(T_1 T_2 T_3) d_1 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) d_2 + T_1 T_2 T_3 d_3] \omega^4 - \\ &\quad - [(T_1 + T_2 + T_3) d_3 + d_2] \omega^2, \\ Y_1(\omega) &= [(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) d_1 + T_1 T_2 T_3 d_2] \omega^5 - \\ &- [d_1 + (T_1 + T_2 + T_3) d_2 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) d_3] \omega^3 + \\ &\quad + d_3 \omega, \\ X_2(a_1, \omega, I^0) &= \\ &= k_1 k_3 \{ [q_1(a_1, I^0) \cos \omega \tau + q'_1(a_1) \sin \omega \tau] c_2 - \\ &\quad - [q'_1(a_1) \cos \omega \tau - q_1(a_1, I^0) \sin \omega \tau] c_1 \omega \}, \\ Y_2(a_1, \omega, I^0) &= \\ &= k_1 k_3 \{ [q_1(a_1, I^0) \cos \omega \tau + q'_1(a_1) \sin \omega \tau] c_1 \omega + \\ &\quad + [q'_1(a_1) \cos \omega \tau - q_1(a_1, I^0) \sin \omega \tau] c_2 \}, \\ X_3(a_1, \omega, I^0) &= k k_2 q_1(a_1, I^0) \{ [T_1 T_3 d_2 + (T_1 + T_3) d_1] \omega^4 + \\ &\quad + [(T_1 + T_3) d_3 + d_2] \omega^2 \} + k k_2 q'_1(a_1) \times \\ &\quad \times \{ -d_1 T_1 T_3 \omega^5 + [T_1 T_3 d_3 + (T_1 + T_2) d_2 + d_1] \omega^3 - d_3 \omega \}, \\ Y_3(a_1, \omega, I^0) &= k k_2 q_1(a_1, I^0) \{ T_1 T_3 d_1 \omega^5 - \\ &\quad - [T_1 T_3 d_3 + (T_1 + T_3) d_2 + d_1] \omega^3 + d_3 \omega \} + \\ &\quad + k k_2 q'_1(a_1) \{ [T_1 T_3 d_2 + (T_1 + T_3) d_1] \omega^4 - \\ &\quad - [(T_1 + T_3) d_3 + d_2] \omega^2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (7.219)$$

По уравнениям (7.215) определяем амплитуду и частоту автоколебательных вибраций для постоянных значений I^0 в интересующих пределах и получаем зависимость $a_1 = a_1(I^0)$.

В результате легко можно определить влияние медленно меняющейся составляющей I^0 на составляющую F_1^0 гармонически линейризованного уравнения (7.212) по первой формуле (7.213), используя зависимость $a_1 = a_1(I^0)$. Полученная зависимость $F_1^0 = F_1^0(I^0)$ есть характеристика нелинейного звена по отношению к медленно меняющемуся входному сигналу I^0 , или так называемая функция смещения, соответствующая скользящему переходному процессу.

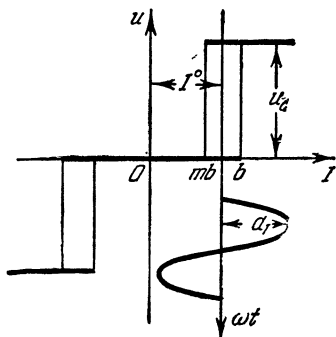


Рис. 7.43.

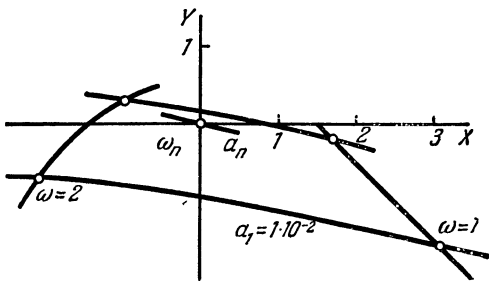


Рис. 7.44.

Для примера используем следующие числовые данные: зона нечувствительности нелинейного звена $b = 1,8 \cdot 10^{-2} a$, коэффициент возврата реле $m = 0,65$, $u_c = 26$ в. В этом случае будем иметь:

$$|I_1^0| = 1,8 \cdot 10^{-2} - a_1, \quad |I_2^0| = a_1 + 1,18 \cdot 10^{-2},$$

$$|I_{cp}^0| = \frac{mb + b}{2} = 1,5 \cdot 10^{-2}.$$

На рис. 7.44 приведен пример графоаналитического способа определения амплитуды и частоты автоколебательных вибраций (см. § 6.8) при значениях параметров $s = 0,3$, $k_{o.c} = 1,25 \cdot 10^{-3}$ и найденных I_1^0, I_2^0 . На рис. 7.45 построена зависимость $a_1 = a_1(k_{o.c})$ для некоторых значений параметров: 1 для $s = 0,3$, I_{cp}^0 ; 2 — для $s = 0,5$, I_{cp}^0 ; 3 — для $s = 0,3$, I_1^0 ; 4 — для $s = 0,5$, I_1^0 .

Определим параметры скользящего режима при значениях $s = 0,3$ и $k_{o.c} = 1,25 \cdot 10^{-3}$.

Для амплитуды вибраций получаются значения $a_1 = 1,7 \cdot 10^{-2}$ при I_{cp}^0 и $a_1 = 1,5$ при граничных значениях $I_1^0 = 1,8 \cdot 10^{-2} - a_1$ и $I_2^0 = 1,18 \cdot 10^{-2} + a_1$. Пользуясь этими данными, находим:

$$I_1^0 = 0,3 \cdot 10^{-2} a \quad \text{и} \quad I_2^0 = 2,68 \cdot 10^{-2} a.$$

На рис. 7.46 построена зависимость $a_1 = a_1(I^0)$. Из второго условия (7.217) следует, что $a_1 < |I^0| + b$. Как видно из рисунка, это условие выполняется, т. е. оба условия (7.217) выполнены и скользящий режим имеет место. По найденной зависимости $a_1 = a_1(I^0)$ определяем $F_1^0 = F_1^0(I^0)$, пользуясь первой формулой (7.213) и соотношением

$$u = F_1^0 + u^*.$$

Сглаженная характеристика нелинейного звена приведена на рис. 7.47.

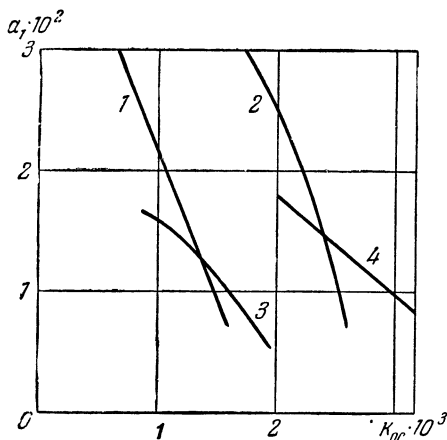


Рис. 7.45.

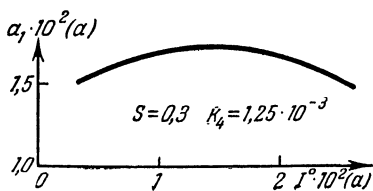


Рис. 7.46.

Имея сглаженную характеристику, можно построить переходный процесс для случая медленно меняющегося внешнего воздействия.

Полученную сглаженную характеристику реле линеаризуем с тем, чтобы при построении переходного процесса можно было пользоваться линейными методами и опишем следующим уравнением:

$$U^0 = k_n I^0 + U_n.$$

Обозначив $I^0 = I$, $U^0 = U$, получим выражение для медленно меняющейся составляющей:

$$I = \frac{1}{k_n} (U - U_n). \quad (7.220)$$

Теперь можно построить переходный процесс методами линейной теории, например методом трапецидальных частотных характеристик. Для этого, воспользовавшись уравнениями (7.206) — (7.211) и (7.220), получим уравнение замкнутой системы. Движение системы, описываемое указанной системой дифференциальных уравнений, будет скользящим до

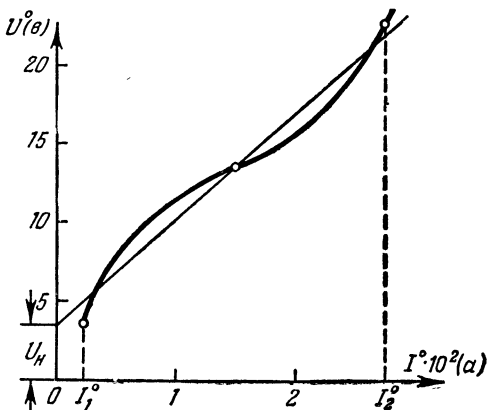


Рис. 7.47.

тех пор, пока выполняются условия (7.217), т. е. при изменении I^0 в пределах

$$b - a_1 \leq |I^0| \leq a_1 + mb, \quad |I^0| > a_1 - b.$$

Уравнение замкнутой системы для переменной i имеет следующий вид:

$$\{(d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1)[(T_2 p + 1) + k_n k_2 k k_{o.c.}](T_3 p + 1)p + \\ + k_1 k_n k_3 s e^{-\tau p} (c_1 p + c_2)\} i = (T_1 p + 1)[(T_2 p + 1) + \\ + k_n k_2 k_{o.c.} k](T_3 p + 1)p (c_1 p + c_2) \gamma_b - s k_3 c_2 U_n. \quad (7.221)$$

Решение уравнения складывается из двух частей:

$$i = i(t) + i_n.$$

Величина i_n определяется из алгебраического уравнения

$$c_2 k_1 k_n s k_3 i_n = s k_3 c_2 U_n,$$

т. е.

$$i_n = \frac{1}{k_1 k_n} U_n.$$

Переменная $i(t)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\{(d_1 p^2 + d_2 p + d_3)(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p[(T_2 p + 1) + k_n k_2 k k_{o.c.}] + \\ + k_1 k_n s k_3 e^{-\tau p} (c_1 p + c_2)\} i = \\ = (T_1 p + 1)(T_3 p + 1)p[(T_2 p + 1) + k_n k_2 k_{o.c.} k](c_1 p + c_2) \gamma_b. \quad (7.222)$$

Результат решения уравнения методом трапецидальных характеристик [202] при некоторых значениях параметров системы для тока i на входе усилителя представлен на рис. 7.48.

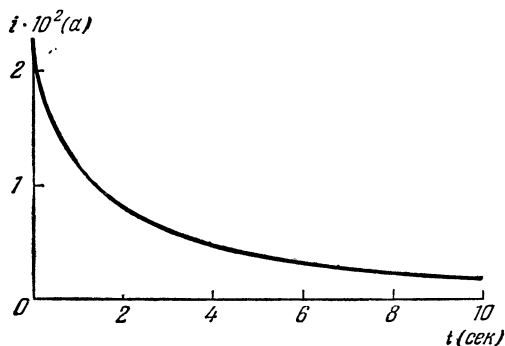


Рис. 7.48.

На полученный переходный процесс накладываются найденные раньше автоколебательные вибрации.

Г Л А В А VIII

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫСШИХ ГАРМОНИК АВТОКОЛЕБАНИЙ

§ 8.1. Отыскание конечного числа высших гармоник и уточнение первой гармоники автоколебаний

До сих пор периодическое решение (автоколебания) для нелинейной системы искалось в первом приближении в виде ¹⁾

$$x = A \sin \Omega t, \quad (8.1)$$

что соответствовало приближенному значению первой гармоники периодического решения. Все высшие гармоники при этом отбрасывались ввиду их малости. В § 2.2 были выведены условия, обеспечивающие малость всех высших гармоник периодического решения для переменной x при наличии существенной нелинейности $F(x, px)$.

Оставляя в силе все наложенные там на систему условия, произведем [242] отыскание малых высших гармоник, определяемых формулой (2.47):

$$\varepsilon x_{\text{в}}(t) = \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k), \quad (8.2)$$

для периодического решения (2.45):

$$x = x_1 + \varepsilon x_{\text{в}}(t), \quad (8.3)$$

что позволит затем также уточнить значение амплитуды и частоты первой гармоники (2.46):

$$x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t \quad (8.4)$$

по сравнению с ее первым приближением (8.1)

¹⁾ Здесь рассматривается случай симметричных колебаний. Ниже в § 8.6 будет изложено также определение высших гармоник при несимметричных колебаниях и при наличии постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия.

Все отбрасывавшиеся ранее высшие гармоники в решении (8.3) записывались в виде одного добавочного члена $\varepsilon x_k(t)$. Теперь, пользуясь разложением (8.2), введем отдельное обозначение для каждой k -й гармоники:

$$x_k = \delta_k A \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k), \quad (8.5)$$

где амплитуда k -й гармоники $\delta_k A$, обозначавшаяся ранее через εA_k , выражена теперь через амплитуду первой гармоники A , причем коэффициент δ_k является малой величиной (так как амплитуда высшей гармоники предполагается малой по сравнению с амплитудой первой гармоники). Величину δ_k , играющую в данной задаче роль малого параметра, можно назвать *относительной амплитудой k -й гармоники*.

Вычислив высшие гармоники (8.5) на основании найденного ранее (§ 2.3) первого приближения для первой гармоники (8.1) и уточнив с помощью этих высших гармоник амплитуду и частоту первой гармоники (8.4), можно затем уточнить также и высшие гармоники, найдя их вместо (8.5) в виде

$$x_k = \delta'_k A_1 \sin(k\Omega_1 t + \varphi'_k),$$

о чем подробнее будет сказано ниже.

Поскольку в разложении (8.2) коэффициенты членов ряда стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, будем учитывать лишь конечное число (n) гармоник. Тогда искомое решение (8.3) с учетом обозначения (8.5) запишется в виде

$$x = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k. \quad (8.6)$$

Точное уравнение для первой гармоники x_1 , согласно (2.57), (2.51) и (2.76), имеет вид

$$Q(p)x_1 + R(p)\left(q + \frac{q'}{\Omega_1}p\right)x_1 + R(p)\varepsilon\Phi_1 = 0. \quad (8.7)$$

Рассматривая ранее для первого приближения уравнение (2.78), мы в точном уравнении (8.7) для первой гармоники совсем отбрасывали малый член $R(p)\varepsilon\Phi_1$. Теперь же в этом члене учтем слагаемые первого порядка малости и отбросим только члены высшего порядка малости. Согласно (2.53) величина $\varepsilon\Phi_1$ является первой гармоникой сложной периодической функции (2.49). Ограничиваясь в выражении (2.49), как уже сказано, членами первого порядка малости и учитывая, что $x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t$, $\cos \Omega_1 t = \frac{1}{\Omega_1} p \sin \Omega_1 t$, можно записать первую гармонику $\varepsilon\Phi_1$ в виде

$$\varepsilon\Phi_1 = \left(C_1 + \frac{D_1}{\Omega_1}p\right) \sin \Omega_1 t, \quad (8.8)$$

где, согласно формулам коэффициентов ряда Фурье для (2.49), имеем:

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_B + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_B \right] \sin \psi d\psi,$$

$$D_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_B + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_B \right] \cos \psi d\psi.$$

Подставляя (8.8) в уравнение (8.7) и учитывая принятую выше замену

$$\varepsilon x_B = \sum_{k=2}^n x_k,$$

получим уточненное линейризованное уравнение для первой гармоники периодического решения x_1 в виде

$$Q(p) x_1 + R(p) \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\Omega_1} p \right) x_1 = 0, \quad (8.9)$$

где имеем аналогичные прежним формулам первого приближения (2.76) основные коэффициенты (причем $\psi = \Omega_1 t$):

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_1 \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_1 \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

и новые добавки к ним, вычисляемые, в отличие от (8.10), через первое приближение (8.1):

$$\Delta q = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \sin \psi d\psi,$$

$$\Delta q' = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \cos \psi d\psi,$$

уточняющие первую гармонику x_1 за счет учета высших гармоник искомого периодического решения. Формулы для Δq и $\Delta q'$ с учетом (8.5) и с использованием выражений

$$\left. \begin{aligned} \sin(k\psi + \varphi_k) &= \cos \varphi_k \sin k\psi + \sin \varphi_k \cos k\psi, \\ \cos(k\psi + \varphi_k) &= \cos \varphi_k \cos k\psi - \sin \varphi_k \sin k\psi, \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

можно преобразовать к следующей, удобной для вычислений форме:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= \sum_{k=2}^n (I_{k1} \delta_k \cos \varphi_k + I_{k2} \delta_k \sin \varphi_k), \\ \Delta q' &= \sum_{k=2}^n (I_{k3} \delta_k \cos \varphi_k + I_{k4} \delta_k \sin \varphi_k), \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{k1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_k(\psi) \sin \psi \, d\psi, & I_{k2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_k(\psi) \sin \psi \, d\psi, \\ I_{k3} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_k(\psi) \cos \psi \, d\psi, & I_{k4} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_k(\psi) \cos \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

причем

$$\begin{aligned} \Psi_k(\psi) &= \frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \sin k\psi + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p x} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) k \Omega \cos k\psi, \\ \Theta_k(\psi) &= \frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \cos k\psi - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial p x} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) k \Omega \sin k\psi. \end{aligned}$$

Имея в виду, что новое гармонически линеаризованное уравнение (8.9) содержит уточнения прежних коэффициентов гармонической линеаризации q и q' в виде добавок Δq и $\Delta q'$, определяемых, согласно (8.12), через высшие гармоники искомого периодического решения (8.6), можно вводимое здесь при вычислении первой гармоники новое выражение

$$F(x, px) \rightarrow \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\Omega_1} p \right) x_1$$

взамен прежнего (2.75) назвать *уточненной гармонической линеаризацией нелинейности*. Полное выражение для нелинейной функции $F(x, px)$ см. ниже (8.15).

Если бы мы решили уравнение (8.9), то получили бы уточненное значение амплитуды A_1 и частоты Ω_1 первой гармоники автоколебаний за счет учета высших гармоник. Решение уравнения (8.9), вообще говоря, можно произвести любым из способов, описанных в § 2.3. Но для этого нужно уже знать высшие гармоники (т. е. значения δ_k и φ_k), чтобы суметь вычислить добавки Δq и $\Delta q'$ по формулам (8.12). Поэтому, прежде чем решать уравнение (8.9), необходимо сначала обратиться к уравнениям для высших гармоник (2.60).

В уравнениях (2.60) также ограничимся членами первого порядка малости. Как было показано в § 2.2, за счет обобщенного свойства фильтра (2.64) член $R(p)F_k$ имеет первый порядок малости, а член $R(p) \in \Phi_k$, следовательно, — второй. Отбрасывая последний член и раскрывая выражения F_k , согласно ряду Фурье (2.50), представим уравнения (2.60) с учетом (8.5) в виде

$$Q(p)x_k + R(p)\frac{1}{\delta_k}\left(q_k + \frac{q'_k}{k\Omega}p\right)x_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n), \quad (8.14)$$

где

$$q_k = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \sin(k\psi + \varphi_k) d\psi,$$

$$q'_k = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A\Omega \cos \psi) \cos(k\psi + \varphi_k) d\psi.$$

В результате получим, что исходное нелинейное дифференциальное уравнение (2.71) в определенном смысле эквивалентно системе n линейных дифференциальных уравнений (8.9) и (8.14), построенных по определенному рецепту, а прежнее одно линейное уравнение (2.78) служит для них первым приближением.

Если мы сложим почленно уравнения (8.9) и (8.14) и сравним результат с исходным нелинейным уравнением (2.71), то увидим, что в рассматриваемом здесь уточненном решении нелинейная функция $F(x, px)$ заменяется следующим выражением через первую x_1 и высшие x_k гармоники искомой переменной x :

$$F(x, px) = \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\Omega_1} p\right)x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\delta_k} \left(q_k + \frac{q'_k}{k\Omega} p\right)x_k. \quad (8.15)$$

Очень важно отметить, что малый параметр δ_k , стоящий в знаменателе каждого слагаемого суммы (8.15), входит одновременно множителем в каждую величину x_k (8.5). Поэтому величина δ_k фактически в каждом слагаемом суммы (8.15) сокращается и здесь получаются не малые, а конечные величины высших гармоник нелинейной функции $F(x, px)$. Это полностью соответствует существу задачи исследования автоматических систем с существенными нелинейностями. И если в § 2.3 говорилось об условности равенства (2.75), то теперь можно сказать, что выражение (8.15) наилучшим образом аппроксимирует нелинейную функцию $F(x, px)$ вместе с ее конечными высшими гармониками.

Количество $n - 1$ уравнений (8.14) определяется числом учитываемых высших гармоник искомого периодического решения (8.6). Следовательно, каждая из высших гармоник определяется теперь по отдельности из соответствующего уравнения (8.14),

Преобразуем к более удобному для вычислений виду коэффициенты гармонической линеаризации для высших гармоник q_k и q'_k , используя соотношения (8.11), что дает

$$\left. \begin{aligned} q_k &= r_k \cos \varphi_k + s_k \sin \varphi_k, \\ q'_k &= s_k \cos \varphi_k - r_k \sin \varphi_k, \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

где введены вспомогательные коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} r_k &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \sin k\psi \, d\psi, \\ s_k &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \cos k\psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

На основании уравнений (8.14) для каждой из высших гармоник получаем свое характеристическое уравнение

$$Q(p) + \frac{1}{\delta_k} R(p) \left(q_k + \frac{q'_k}{k\Omega} p \right) = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (8.18)$$

Аналогично методу § 2.3 теперь можно каждое из этих уравнений решать отдельно путем подстановки $p = jk\Omega$, т. е.

$$Q(jk\Omega) + \frac{1}{\delta_k} R(jk\Omega) (q_k + jq'_k) = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (8.19)$$

Используя выражения (8.16), легко проверить справедливость следующего соотношения:

$$q_k + jq'_k = (r_k + js_k) (\cos \varphi_k - j \sin \varphi_k) = (r_k + js_k) e^{-j\varphi_k}.$$

Подставив это в уравнение (8.19), получим:

$$\delta_k e^{j\varphi_k} = - \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} (r_k + js_k), \quad (8.20)$$

откуда находим в явном виде относительную амплитуду и фазу каждой из высших гармоник:

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \left| \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| \sqrt{r_k^2 + s_k^2}, \\ \varphi_k &= \arg \frac{-R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} + \arctg \frac{s_k}{r_k} \end{aligned} \right\} \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (8.21)$$

Поскольку коэффициенты r_k и s_k согласно (8.17), уже выражены через величины A и Ω , известные из решения задачи в первом приближении (§ 2.3), то теперь каждая пара формул (8.21) позволяет найти для каждой гармоники величины относительной амплитуды δ_k и фазы φ_k .

Следовательно, найдены все высшие гармоники (8.5) переменной x :

$$x_k = \delta_k A \sin(k\Omega t + \varphi_k).$$

Теперь можно вычислить и уточненные значения амплитуды A_1 и частоты Ω_1 первой гармоники. Для этого запишем, согласно (8.9), характеристическое уравнение

$$Q_1(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega_1} p \right) = 0, \quad (8.22)$$

где введено обозначение

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} p \right) \quad (8.23)$$

(замена Ω_1 на Ω в малых добавках не играет существенной роли). Введение такого обозначения удобно по двум причинам. Во-первых, отделяются искомые A_1 и Ω_1 , входящие в q и q' , от известных величин Δq и $\Delta q'$, которые вычисляются здесь по формулам (8.12) через найденные выше значения δ_k , φ_k и через A и Ω , известные из первого приближения (§ 2.3). Во-вторых, уравнение (8.22) для определения уточненной первой гармоники $x_1 = A_1 \sin \Omega_1 t$ приведено к виду, формально совпадающему с уравнением (2.79), которое определяет первое приближение. Это позволяет использовать при определении уточненной первой гармоники совершенно те же способы, что и в § 2.3 для первого приближения. Кроме того, согласно (8.10), здесь можно использовать все готовые выражения коэффициентов гармонической линеаризации q и q' для конкретно заданных нелинейностей с заменой только A , Ω на A_1 , Ω_1 .

Следует помнить, что, используя любой из способов § 2.3, применительно к данной задаче надо везде вместо $Q(p)$ ставить новый многочлен $Q_1(p)$, отличающийся от $Q(p)$ некоторыми добавками к его коэффициентам, определяемыми по формуле (8.23).

Важная особенность уточненного решения состоит еще и в том, что многочлен $Q_1(p)$, в отличие от прежнего $Q(p)$, зависит не только от параметров *линейной* части системы, но, согласно (8.23) и (8.12), также и от формы *нелинейности* $F(x, px)$ за счет добавок Δq и $\Delta q'$. Однако в то время как основные коэффициенты q и q' имеют готовые выражения для каждой нелинейности (см. главу III), здесь нельзя применять заранее вычисленные конкретные формулы для величин Δq и $\Delta q'$, так как входящие в формулу (8.12) величины δ_k и φ_k , согласно (8.21), зависят от параметров и структуры линейной части системы. Однако можно заранее вычислить для различных конкретных форм нелинейностей вспомогательные величины r_k и s_k , что и будет сделано для простейших типичных случаев ниже в § 8.3.

Итак, полностью найдено искомое уточненное решение для автоколебаний (8.6) в виде

$$x = A_1 \sin \Omega_1 t + \sum_{k=2}^n \delta_k A \sin(k\Omega_1 t + \varphi_k).$$

где первая гармоника дана в уточненном виде, а высшие гармоники — в первом приближении.

Далее можно уточнить также и значения высших гармоник, базирываясь на том, что теперь уже известна уточненная первая гармоника. Для этого в формулы (8.17) и (8.21) подставим новые уточненные значения A_1 и Ω_1 вместо прежних A и Ω . Отсюда получим новые уточненные значения относительной амплитуды δ'_k и фазы φ'_k каждой высшей гармоники. Тогда уточненное решение для автоколебаний примет вид

$$x = A_1 \left[\sin \Omega_1 t + \sum_{k=2}^n \delta'_k \sin (k\Omega_1 t + \varphi'_k) \right]. \quad (8.24)$$

Затем можно было бы с помощью новых значений δ'_k и φ'_k найти уточненные значения Δq и $\Delta q'$ по формулам (8.12) и отыскать второе уточнение для первой гармоники по уравнению (8.22). В результате был бы развит метод последовательных приближений, что, однако, едва ли имеет практический смысл. Поэтому ограничимся формулой (8.24) или даже предыдущей.

О том, какой состав высших гармоник (8.6) в каждой конкретной задаче следует учесть, можно судить по разложению (2.50) заданной нелинейной функции $F(x_1, px_1)$ в ряд Фурье. Так, например, в часто встречающемся на практике случае *однозначной нечетно-симметричной нелинейности* $F(x)$ наиболее существенной из высших гармоник будет третья. Учитывая ее, представляем искомое периодическое решение (автоколебания), согласно (8.6), в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + x_3, & x_1 &= A_1 \sin \Omega_1 t, \\ x_3 &= \delta_3 A \sin (3\Omega_1 t + \varphi_3) & \text{или} & \quad x_3 = \delta'_3 A_1 \sin (3\Omega_1 t + \varphi'_3). \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

В этом случае в уравнении для первой гармоники (8.9), как и прежде, будет равен нулю коэффициент q' . Характеристическое уравнение (8.22) для уточненной первой гармоники, следовательно, будет

$$Q_1(p) + R(p)q = 0, \quad (8.26)$$

где

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} p \right),$$

причем выражения для коэффициента

$$q = \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (8.27)$$

может быть взято из главы III с заменой A на A_1 . Формулы для добавочных коэффициентов Δq и $\Delta q'$ здесь значительно упрощаются, так как в формулах (8.12) и (8.13) многие члены пропадают, а в

формулах (8.16) коэффициент $s_k = 0$. В результате вместо (8.12) и (8.13) с учетом (8.17) приходим к весьма простым соотношениям:

$$\Delta q = h_3 \delta_3 \cos \varphi_3, \quad \Delta q' = 3r_3 \delta_3 \sin \varphi_3, \quad (8.28)$$

где введено новое сокращенное обозначение h_3 . Заменяя в формулах (8.12) и (8.17) ввиду нечетной симметрии однозначной нелинейности $F(x)$ интеграл с пределами $(0; 2\pi)$ учетверенным интегралом с пределами $(0; \frac{\pi}{2})$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi \, d\psi, \\ r_3 &= \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Коэффициенты h_3 и r_3 для конкретных нелинейностей в заранее вычисленном виде даны ниже в § 8.3. Из формул (8.21) определяются относительная амплитуда и фаза третьей гармоники:

$$\delta_3 = r_3 \left| \frac{R(j3\Omega)}{Q(j3\Omega)} \right|, \quad \varphi_3 = \arg \frac{-R(j3\Omega)}{Q(j3\Omega)}. \quad (8.30)$$

Таким образом достаточно просто определяется уточненное периодическое решение для случая однозначной нелинейности $F(x)$ с учетом третьей гармоники в виде

$$x = A_1 \sin \Omega_1 t + \delta_3 A \sin (3\Omega_1 t + \varphi_3). \quad (8.31)$$

Если же воспользоваться формулами (8.30) вторично, подставив в них A_1 , Ω_1 вместо A , Ω , то уточнится и третья гармоника, причем решение примет вид

$$x = A_1 [\sin \Omega_1 t + \delta'_3 \sin (3\Omega_1 t + \varphi'_3)].$$

Определив периодическое решение для переменной x , стоящей в уравнениях автоматической системы под знаком нелинейной функции, можно затем найти также решение для всех остальных переменных с учетом высших гармоник, используя соответствующие передаточные функции. Если какая-либо переменная z связана с x передаточной функцией

$$z = W(p) x, \quad (8.32)$$

то в общем случае, когда, согласно (8.6),

$$x = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k,$$

получим:

$$z = z_1 + \sum_{k=2}^n z_k. \quad (8.33)$$

В соответствии с (8.4) будем иметь первую гармонику

$$z_1 = A_1 |W(j\Omega_1)| \sin [\Omega_1 t + \arg W(j\Omega_1)] \quad (8.34)$$

и, согласно (8.5), — высшие гармоники

$$z_k = \delta_k A |W(jk\Omega_1)| \sin [k\Omega_1 t + \varphi_k + \arg W(jk\Omega_1)]. \quad (8.35)$$

Для переменной же, представляющей саму нелинейную функцию $y = F(x, px)$, получим:

$$y = F(x, px) = y_1 + \sum_{k=2}^n y_k, \quad (8.36)$$

где, согласно (8.15), имеем первую гармонику

$$y_1 = \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\Omega_1} p \right) x_1 \quad (8.37)$$

и высшие гармоники

$$y_k = \frac{1}{\delta_k} \left(q_k + \frac{q'_k}{k\Omega_1} p \right) x_k, \quad (8.38)$$

причем q_k и q'_k определяются формулами (8.16) и (8.17), а x_1 и x_k — формулами (8.4) и (8.5).

§ 8.2. Уточнение первого приближения

Изложенный выше метод уточнения первого приближения при определении автоколебаний путем вычисления конечного числа высших гармоник позволяет находить периодическое решение для переменной x в виде

$$x = A_1 \sin \Omega_1 t + \sum_{k=2}^n \delta_k A \sin (k\Omega_1 t + \varphi_k) \quad (8.39)$$

или же в виде

$$x = A_1 \left[\sin \Omega_1 t + \sum_{k=2}^n \delta'_k \sin (k\Omega_1 t + \varphi'_k) \right]. \quad (8.40)$$

Отыскание этого уточненного решения может иметь двоякий смысл. Во-первых, найдя величины δ_k , мы получаем количественную оценку амплитуд высших гармоник для переменной x . Если их достаточная малость, предположенная в начале решения задачи, имеет

место, то выражение (8.39) или (8.40) действительно представляет собой уточненное решение для автоколебаний в данной нелинейной системе и может быть практически использовано как таковое.

Во-вторых, решение для автоколебаний, найденное в форме (8.39) или (8.40) с учетом высших гармоник, имеет некоторые принципиально новые свойства по сравнению с первым приближением $x = A \sin \Omega t$. Таким образом могут быть исправлены некоторые качественные недостатки первого приближения [251] (которые количественно могут быть и невелики). К ним относятся, например, следующие:

1) в системах с одной однозначной нечетно-симметричной нелинейностью любой конфигурации в результате решения по первому приближению ($x = A \sin \Omega t$) частота автоколебаний Ω оказывается совершенно не зависящей от формы нелинейности;

2) в решении по первому приближению не обнаруживается фазовый сдвиг при прохождении колебаний через однозначную нечетно-симметричную нелинейность, который, однако, реально может иметь место за счет высших гармоник.

Покажем в общем виде, что указанные два обстоятельства действительно имеют место.

Дифференциальное уравнение динамики собственных колебаний любой системы (с постоянными сосредоточенными параметрами) с одной нелинейностью $F(x)$ можно записать, согласно (2.42), в виде

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0. \quad (8.41)$$

Отыскивая автоколебания приближенно в виде $x = A \sin \Omega t$, мы для однозначной нечетно-симметричной нелинейности пользуемся характеристическим уравнением

$$Q(p) + R(p)q(A) = 0. \quad (8.42)$$

Заменяя в нем $p = j\Omega$ и обозначив

$$Q(j\Omega) = X_Q(\Omega) + jY_Q(\Omega), \quad R(j\Omega) = X_R(\Omega) + jY_R(\Omega), \quad (8.43)$$

будем иметь два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_Q(\Omega) + X_R(\Omega)q(A) = 0, \\ Y &= Y_Q(\Omega) + Y_R(\Omega)q(A) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

Исключив отсюда $q(A)$, получим уравнение для определения частоты Ω автоколебаний (при $X_R \neq 0$):

$$X_R(\Omega)Y_Q(\Omega) - X_Q(\Omega)Y_R(\Omega) = 0, \quad (8.45)$$

после чего определяется амплитуда по одному из уравнений (8.44).

В случае петлевой нелинейной характеристики $F(x)$ вместо (8.42) получается, как известно, характеристическое уравнение

$$Q(p) + R(p)\left[q(A) + \frac{q'(A)}{\Omega}p\right] = 0, \quad (8.46)$$

вследствие чего не удастся получить уравнение для частоты типа (8.45), в которое не входят параметры нелинейной характеристики.

Итак, выражение (8.45) показывает, что действительно в любой системе с одной однозначной нелинейностью результат решения для частоты автоколебаний зависит только от параметров линейной части системы и совершенно не зависит от формы нелинейности (не зависит от коэффициента q). Это и есть первый из указанных выше недостатков первого приближения. На самом же деле частота автоколебаний в ряде случаев будет зависеть от формы нелинейности (например, от ширины зоны нечувствительности реле и т. п.), хотя в других случаях эта зависимость может действительно отсутствовать [253].

Заметим, что наличие постоянного по времени запаздывания τ в системе, т. е. наличие множителя $e^{-\tau p}$ в составе $R(p)$, не меняет дела.

Второй из указанных выше недостатков еще более очевиден. В самом деле, если для петлевой нелинейности первая гармоника, согласно (8.46), получает фазовый сдвиг в виде

$$\varphi = \arctg \frac{q'(A)}{q(A)}, \quad (8.47)$$

то для однозначной нелинейности, согласно (8.42), он отсутствует. В действительности же даже малые высшие гармоники, присутствующие на «входе» x любой нелинейности, вызывают фазовый

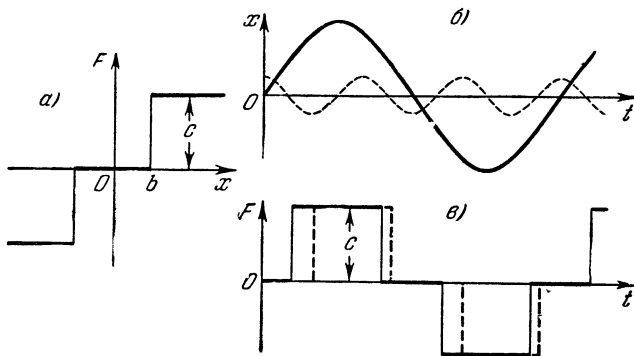


Рис. 8.1.

сдвиг первой гармоники «на выходе» F , причем величина этого сдвига будет зависеть от формы нелинейности. Проиллюстрируем это на простейшем примере.

Пусть нелинейность имеет вид рис. 8.1, *а*. Если бы переключения реле происходили по первой гармонике x (сплошная линия на рис. 8.1, *б*), то выходная величина F имела бы вид сплошной линии на рис. 8.1, *в*, первая гармоника которой не имеет фазового сдвига. Но из чертежа

видно, что даже малая третья гармоника x (пунктир на рис. 8.1, б) вызывает сдвиг во времени переключения реле (пунктир на рис. 8.1, в). При этом вследствие неодинаковости сдвигов переднего и заднего скачков первая гармоника выходной величины F не только сдвигается по фазе, но и изменяет свою амплитуду.

Принципиально новым по сравнению с решением по первому приближению здесь является появление фазового сдвига. При этом сдвиг первой гармоники величины F , равно как и изменение ее амплитуды за счет наличия малых высших гармоник переменной x , должны зависеть не только от параметров линейной части, но и от формы нелинейности, например в данном случае от ширины зоны нечувствительности $2b$.

Метод, изложенный в § 8.1, позволяет произвести учет любого конечного числа высших гармоник. Но для изучения поставленных вопросов мы ограничимся учетом только одной третьей гармоники¹⁾, отыскивая автоколебания системы в виде

$$x = A_1 \sin \Omega_1 t + \delta_3 A \sin (3\Omega_1 t + \varphi_3), \quad (8.48)$$

где A_1 , Ω_1 — новые (уточненные) амплитуда и частота первой гармоники переменной x , изменившиеся (по сравнению с прежними A , Ω) за счет учета третьей гармоники; δ_3 — относительная амплитуда третьей гармоники (малая); φ_3 — ее фаза по отношению к новой первой гармонике. Все эти величины подлежат вычислению.

Новая первая гармоника автоколебаний переменной x определяется, согласно (8.26), следующим характеристическим уравнением вместо (8.42):

$$Q_1(p) + R(p)q(A_1) = 0, \quad Q_1(p) = Q(p) + R(p)\left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega_1}p\right), \quad (8.49)$$

где q , Δq и $\Delta q'$ определяются формулами (8.27) — (8.29), а для третьей гармоники, согласно (8.30), имеем:

$$\delta_3 = r_3 \left| \frac{R(j3\Omega_1)}{Q(j3\Omega_1)} \right|, \quad \varphi_3 = \arg \frac{-R(j3\Omega_1)}{Q(j3\Omega_1)}, \quad (8.50)$$

причем, в отличие от (8.30), здесь для улучшения решения вводится сразу уточненная частота Ω_1 .

Таким образом полностью определяется уточненное периодическое решение (8.48) с учетом третьей гармоники. При этом из (8.49), используя прежние обозначения (8.43), получаем вместо (8.44) новую пару расчетных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_{Q_1}(\Omega_1) + X_R(\Omega_1)q(A_1) = 0, \\ Y_1 &= Y_{Q_1}(\Omega_1) + Y_R(\Omega_1)q(A_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

¹⁾ Четные гармоники не принимаются во внимание вследствие нечетности нелинейной характеристики $F(x)$. Учет же более высоких нечетных гармоник не внесет ничего принципиально нового.

Поэтому уравнение для определения уточненного значения частоты автоколебаний принимает вместо (8.45) вид

$$X_R(\Omega_1) Y_{Q1}(\Omega_1) - X_{Q1}(\Omega_1) Y_R(\Omega_1) = 0, \quad (8.52)$$

где, согласно (8.49):

$$\left. \begin{aligned} X_{Q1}(\Omega_1) &= X_Q(\Omega_1) + X_R(\Omega_1) \Delta q - Y_R(\Omega_1) \Delta q', \\ Y_{Q1}(\Omega_1) &= Y_Q(\Omega_1) + Y_R(\Omega_1) \Delta q + X_R(\Omega_1) \Delta q'. \end{aligned} \right\} \quad (8.53)$$

Очевидно, что, во-первых, определяемое отсюда уточненное значение частоты первой гармоники Ω_1 уже будет зависеть от формы нелинейности, так как от нее зависят добавочные коэффициенты Δq и $\Delta q'$. Во-вторых, и при однозначной нелинейности обнаруживается

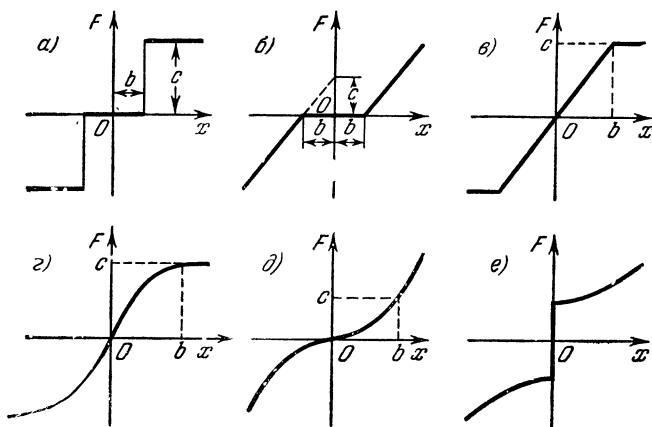


Рис. 8.2.

сдвиг фазы первой гармоники величины F (показанный, например, пунктиром на рис. 8.1, e) в виде

$$\varphi = \arctg \frac{\Delta q'}{q + \Delta q}. \quad (8.54)$$

Если третья гармоника переменной x мала, то малыми будут также величина $\Delta q'$ и сдвиг φ (при этом знак \arctg в формуле (8.54) можно опустить).

Порядок расчета можно предложить следующий. Сначала определяем автоколебания в первом приближении по уравнениям (8.44), находя из них величины A и Ω ($x = A \sin \Omega t$). Получаем результат для Ω , не зависящий от формы нелинейной характеристики. Потом определяем зависимость частоты (и амплитуды) автоколебаний от формы нелинейности по уточненному решению (по методике, изложенной ниже). При этом форму нелинейности (рис. 8.2) и ее связь

с величиной амплитуды первой гармоники переменной x будем характеризовать следующими основными коэффициентами:

$$\gamma = \frac{2c}{\pi b}, \quad \beta = \frac{A}{b} \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{A_1}{b}, \quad (8.55)$$

где γ — коэффициент формы нелинейности, β и β_1 — относительные амплитуды первой гармоники. Например, для нелинейностей, изображенных на рис. 8.2, а, б, в, пользуясь формулами главы III, в обозначениях (8.55) получим (при $\beta \geq 1$) соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } q &= \frac{2\gamma}{\beta^3} \sqrt{\beta^2 - 1}, \\ \text{б) } q &= \gamma \left(\arccos \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^3} \sqrt{\beta^2 - 1} \right), \\ \text{в) } q &= \gamma \left(\arcsin \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^3} \sqrt{\beta^2 - 1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.56)$$

(случай $b = 0$ на рис. 8.2, а или в, для которого обозначения (8.55) не имеют смысла, будет рассмотрен ниже особо).

Точно так же, например, для квадратичной и кубической характеристик (рис. 8.2, б), когда

$$F = k|x|x = kx^2 \operatorname{sign} x \quad \text{и} \quad F = kx^3, \quad (8.57)$$

используя координаты любой заданной точки (b , c), легко, согласно главе III, в обозначениях (8.55) получить соответственно:

$$q = \frac{4}{3} \gamma \beta \quad \text{и} \quad q = \frac{3\pi}{8} \gamma \beta^3. \quad (8.58)$$

Аналогично поступаем и с другими нелинейностями.

Введя понятие коэффициента формы нелинейности γ , будем определять искомую зависимость частоты автоколебаний от формы нелинейности в виде функции

$$\Omega_1 = \Omega_1(\gamma). \quad (8.59)$$

Преобразуем все полученные выше формулы уточненного решения к виду, удобному для отыскания функции (8.59), помня, что в решении по первому приближению частота Ω не зависела от коэффициента формы нелинейности γ .

Прежде всего запишем вспомогательные коэффициенты h_3 и r_3 , определяемые формулами (8.29) как функции γ , т. е.

$$h_3 = h_3(\gamma) \quad \text{и} \quad r_3 = r_3(\gamma). \quad (8.60)$$

При этом можно пользоваться готовыми значениями h_3 и r_3 , приведенными в § 8.3. Например, для релейной характеристики с зоной нечувствительности (рис. 8.2, а) получаем:

$$h_3 = 2\gamma \frac{3\beta^2 - 4}{\beta^4 \sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad r_3 = 2\gamma \frac{\beta^2 - 4}{3\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad (8.61)$$

где $\beta = \frac{A}{b}$ должно быть известно из первого приближения как функция γ . Следовательно, для решения данной задачи результат отыскания автоколебаний по первому приближению (§ 2.3) должен быть представлен в виде графика типа рис. 8.3, а. Тогда формулы (8.61), а в общем случае (8.29) позволят определить нужные для дальнейшего решения функции (8.60), например, в виде рис. 8.3, б.

После этого можно вычислить по формулам (8.50) относительную амплитуду δ_3 и фазу φ_3 третьей гармоники автоколебаний как функции

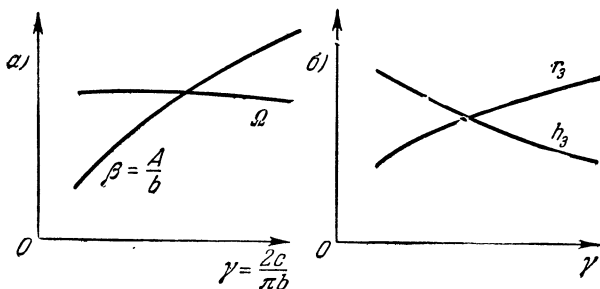


Рис. 8.3.

от искомой частоты Ω_1 и от коэффициента формы нелинейности, а затем по формулам (8.28) определить Δq и $\Delta q'$:

$$\Delta q = U_3(3\Omega_1) h_3(\gamma) r_3(\gamma), \quad \Delta q' = 3V(3\Omega_1) [r_3(\gamma)]^2, \quad (8.62)$$

где

$$U_3(3\Omega_1) = \operatorname{Re} \left[\frac{-R(j3\Omega_1)}{Q(j3\Omega_1)} \right], \quad V_3(3\Omega_1) = \operatorname{Im} \left[\frac{-R(j3\Omega_1)}{Q(j3\Omega_1)} \right], \quad (8.63)$$

которые представляют собой значения вещественной и мнимой частей амплитудно-фазовой частотной характеристики приведенной линейной части системы с обратным знаком на частоте 3Ω .

Запишем уравнения (8.51) для определения уточненного значения частоты Ω_1 с учетом (8.53) в виде

$$\left. \begin{aligned} X_Q(\Omega_1) + X_R(\Omega_1)(q + \Delta q) - Y_R(\Omega_1)\Delta q' &= 0, \\ Y_Q(\Omega_1) + Y_R(\Omega_1)(q + \Delta q) + X_R(\Omega_1)\Delta q' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.64)$$

Исключив отсюда величину $(q + \Delta q)$, получим равенство

$$[X_R^2(\Omega_1) + Y_R^2(\Omega_1)] \Delta q' = X_Q(\Omega_1) Y_R(\Omega_1) - Y_Q(\Omega_1) X_R(\Omega_1),$$

которое с подстановкой (8.62) приводится к виду

$$[r_3(\gamma)]^2 = \Phi_1(\Omega_1), \quad (8.65)$$

где

$$\Phi_1(\Omega_1) = \frac{X_Q(\Omega_1) Y_R(\Omega_1) - Y_Q(\Omega_1) X_R(\Omega_1)}{3V_3(3\Omega_1) [X_R^2(\Omega_1) + Y_R^2(\Omega_1)]}. \quad (8.66)$$

Уравнение (8.65) легко решается графически, как показано на рис. 8.4, а. В самом деле, изобразив отдельно графики левой и правой частей уравнения (8.65), можно для каждого заданного значения

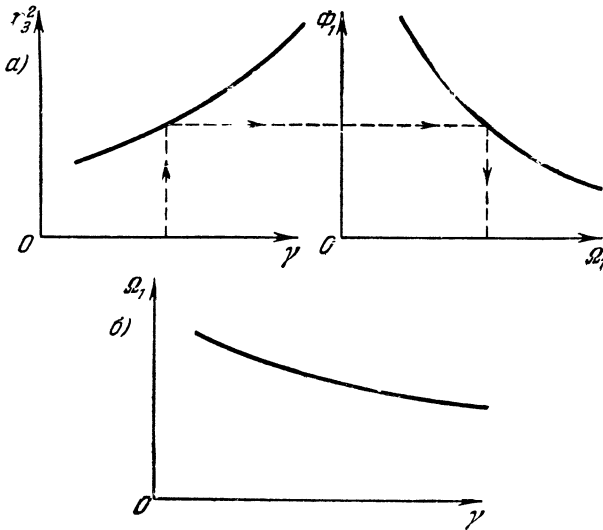


Рис. 8.4.

коэффициента формы нелинейности γ найти свое уточненное значение частоты Ω_1 , идя по стрелкам, показанным на рис. 8.4, а. В результате можно построить график искомой зависимости (8.59), например, в виде рис. 8.4, б.

После этого, если потребуется, можно определить и уточненное значение амплитуды первой гармоники автоколебаний A_1 по первому из уравнений (8.64). В соответствии с обозначением (8.55) будем искать уточненное значение амплитуды в безразмерной форме $\beta_1 = \frac{A_1}{b}$. Поэтому величина q в уравнении (8.64) будет иметь вид $q(\gamma, \beta_1)$, как, например, в (8.56) и (8.58), но только с заменой β и β_1 . Тогда из первого уравнения (8.64) получим:

$$q(\gamma, \beta_1) = - \frac{X_Q(\Omega_1) + X_R(\Omega_1) \Delta q - Y_R(\Omega_1) \Delta q'}{X_R(\Omega_1)}, \quad (8.67)$$

где Ω_1 как функция γ уже определена (рис. 8.4, б) и, следовательно, согласно (8.62), определены также Δq и $\Delta q'$ как функции γ . Это уравнение решается графически. Для каждого заданного значения γ

левая часть" уравнения (8.67) изобразится (как показано на рис. 8.5, а) в виде кривых, а правая часть — в виде прямых. Точки их пересечения (при одинаковых значениях γ) дают искомое решение, в результате чего получается зависимость уточненной амплитуды первой гармоники автоколебаний $\beta_1 = \frac{A_1}{b}$ от коэффициента формы нелинейности γ .

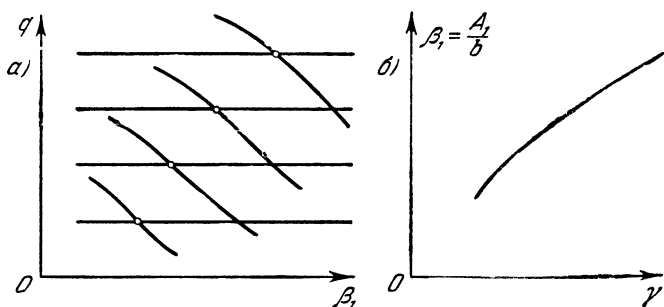


Рис. 8.5.

Заметим, что исходная зависимость амплитуды $\beta = \frac{A}{b}$ первого приближения от γ , показанная на рис. 8.3, а определялась, согласно первому из уравнений (8.44), из следующего равенства:

$$q(\gamma, \beta) = -\frac{X_Q(\Omega)}{X_R(\Omega)}. \quad (8.68)$$

Левая часть здесь изображается теми же самыми кривыми, что и левая часть уравнения (8.67), так как в обоих случаях используются одни и те же формулы типа (8.56) и (8.58) с заменой лишь β на β_1 . Правые же части (8.67) и (8.68) отличаются за счет добавков $\Delta q = f_1(\gamma)$ и $\Delta q' = f_2(\gamma)$ и за счет замены Ω на Ω_1 , что означает смещение горизонтальных линий на рис. 8.5, а. Поэтому можно использовать одинаковый графический метод определения как первого приближения $\beta(\gamma)$, так и уточненных значений $\beta_1(\gamma)$.

Далее, согласно (8.50), определяются относительная амплитуда δ_3 и фаза φ_3 третьей гармоники автоколебаний, так же как функции от коэффициента формы нелинейности γ .

Наконец, теперь можно вычислить и фазовый сдвиг φ первой гармоники переменной F (который, как известно, отсутствовал в решении по первому приближению), пользуясь формулой (8.54), в которую нужно подставить значения Δq и $\Delta q'$ из (8.62) как функции γ , а также величину $q(\beta_1, \gamma)$, учитывая, что зависимости $\Omega_1(\gamma)$ и $\beta_1(\gamma)$ уже найдены.

Таким образом, поставленная задача полностью решена¹⁾.

¹⁾ Примеры даны в последующих параграфах настоящей главы.

Один особый частный случай. Как уже говорилось, введение коэффициента формы нелинейности γ и относительных амплитуд β и β_1 не имеет смысла при $b=0$, т. е. для случая идеальной релейной характеристики (рис. 8.6, а). Для нее, следовательно, не имеют

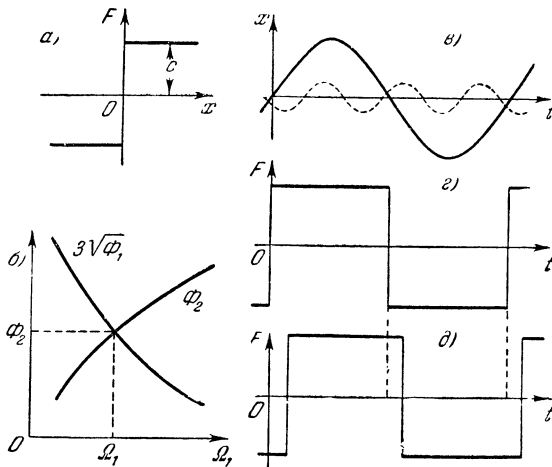


Рис. 8.6.

смысла и выведенные выше общие формулы. Поэтому рассмотрим этот частный случай особо. Здесь по аналогии с главой III имеем:

$$q = \frac{4c}{\pi A_1}, \quad (8.69)$$

а формулы (8.29) и (8.28) дают

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= 0, & r_3 &= \frac{4c}{3\pi A_1} = \frac{1}{3} q, \\ \Delta q &= 0, & \Delta q' &= \frac{1}{3} V_3 (3\Omega_1) q^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.70)$$

Поэтому вместо (8.65) получаем уравнение

$$q^2 = 9\Phi_1(\Omega_1). \quad (8.71)$$

Но, с другой стороны, величину q , учитывая, что $\Delta q = 0$, можно выразить из уравнений (8.64) в виде (путем исключения из них величины $\Delta q'$):

$$q = \Phi_2(\Omega_1), \quad (8.72)$$

где

$$\Phi_2(\Omega_1) = - \frac{X_Q(\Omega_1) X_R(\Omega_1) + Y_Q(\Omega_1) Y_R(\Omega_1)}{X_R^2(\Omega_1) + Y_R^2(\Omega_1)}. \quad (8.73)$$

Сравнивая выражения (8.71) и (8.72), получим следующее уравнение для определения уточненной частоты первой гармоники автоколебаний:

$$\Phi_2(\Omega_1) = 3 \sqrt{\Phi_1(\Omega_1)}, \quad (8.74)$$

где $\Phi_1(\Omega_1)$ и $\Phi_2(\Omega_1)$ определяются формулами (8.66) и (8.73).

Простым графическим решением этого уравнения (рис. 8.6, б) определяется уточненное значение частоты автоколебаний Ω_1 . Оно не зависит от величины c (рис. 8.6, а), что подтверждается, как известно, и точным решением задачи. После этого, согласно (8.69) и (8.72), находится уточненное значение амплитуды первой гармоники в виде

$$A_1 = \frac{4c}{\pi\Phi_2}, \quad (8.75)$$

где значение Φ_2 берется из того же графика (рис. 8.6, б).

После этого, согласно (8.50), легко определяются амплитуда и фаза третьей гармоники:

$$A_3 = \delta_3 A_1 = \frac{4c}{3\pi} \left| \frac{R(j3\Omega_1)}{Q(j3\Omega_1)} \right|, \quad \varphi_3 = \arg \frac{-R(j3\Omega_1)}{Q(j3\Omega_1)}. \quad (8.76)$$

Ввиду того что фаза третьей гармоники сдвинута на φ_3 относительно первой (рис. 8.6, в), переключение реле будет происходить не по первой гармонике (рис. 8.6, г), как было в решении первого приближения, а с некоторым сдвигом (рис. 8.6, д), причем фаза этого сдвига для первой гармоники переменной F , согласно (8.54) и (8.70), будет

$$\varphi = \arctg(\delta_3 \sin \varphi_3). \quad (8.77)$$

Ниже в § 8.4 на примере будет показано, что результаты предлагаемого в §§ 8.1 и 8.2 уточненного решения оказываются весьма близкими к результатам точного решения, найденного для того примера.

§ 8.3. Коэффициенты третьей гармоники для некоторых нелинейностей

Как было сказано в § 8.1, для уточнения гармонической линеаризации часто встречающихся однозначных¹⁾ нечетно-симметричных нелинейных характеристик достаточно учитывать третью гармонику разложения в ряд Фурье нелинейной периодической функции $F(A \sin \psi)$. Этот учет сводится к введению некоторых поправок Δq и $\Delta q'$ в коэффициенты гармонической линеаризации, которые в соответствии с (8.28) определяются по формулам:

$$\Delta q = h_3 \delta_3 \cos \varphi_3, \quad \Delta q' = 3r_3 \delta_3 \sin \varphi_3, \quad (8.78)$$

¹⁾ В конце этого параграфа будут приведены также формулы и для петлевых нелинейностей.

где $\delta_3 = \frac{A_3}{A}$ — относительная амплитуда третьей гармоники и φ_3 — сдвиг по фазе для третьей гармоники, определяемые по формулам (8.21). Коэффициенты h_3 и r_3 зависят от вида нелинейной характеристики и в соответствии с (8.29) для однозначных нечетно-симметричных нелинейных характеристик определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi d\psi, \\ r_3 &= \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(A \sin \psi) \sin 3\psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.79)$$

Вычислим коэффициенты h_3 и r_3 по этим формулам для некоторых типовых нелинейностей.

1. Однозначная релейная характеристика. Рассмотрим релейную характеристику с зоной нечувствительности (рис. 8.7, а). Входящая

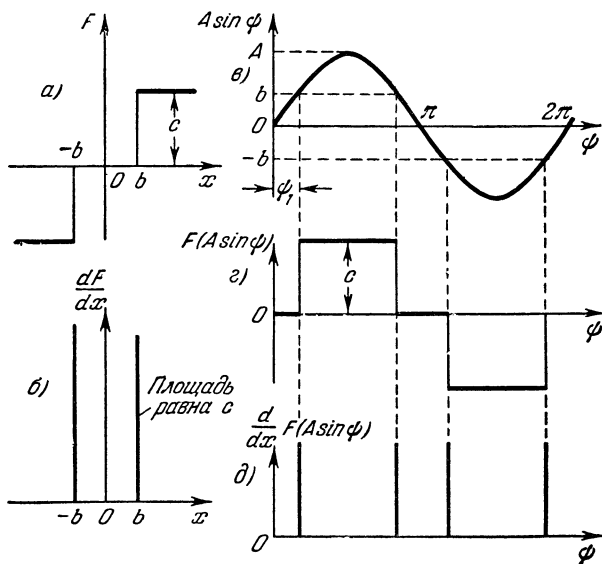


Рис. 8.7.

под интеграл в формуле для h_3 величина производной $\frac{dF}{dx}$ будет для этой нелинейности равна нулю везде, кроме двух точек $x = \pm b$, где она равна мгновенному импульсу, площадь которого равна c (рис. 8.7, б). Такой импульс называется дельта-функцией. Стоящее

там же выражение $\sin \psi d\psi$ при $x = A \sin \psi$ можно преобразовать к виду

$$\sin \psi d\psi = \frac{\sin \psi}{\frac{dx}{d\psi}} dx = \frac{\sin \psi}{A \cos \psi} dx = \frac{\operatorname{tg} \psi}{A} dx. \quad (8.80)$$

Поскольку подынтегральное выражение в формуле (8.79) для h_3 на участке интегрирования $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, согласно рис. 8.7, ∂ , будет нулем везде, кроме одной точки $\psi = \psi_1$, то эту формулу в данном примере можно переписать в виде

$$h_3 = \frac{4}{\pi A} \sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 \int_0^A \frac{dF}{dx} dx = \frac{4}{\pi A} \sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 [F(A) - F(0)].$$

Но из рис. 8.7, *в* имеем:

$$\sin \psi_1 = \frac{b}{A}, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{b}{\sqrt{A^2 - b^2}}, \quad \sin 3\psi_1 = \frac{3bA^2 - 4b^3}{A^3}, \quad (8.81)$$

а из рис. 8.7, *а* при $A \geq b$

$$F(A) = c, \quad F(0) = 0.$$

Окончательно получаем:

$$h_3 = \frac{4cb^2(3A^2 - 4b^2)}{\pi A^4 \sqrt{A^2 - b^2}} \quad (A \geq b), \quad (8.82)$$

или в обозначениях (8.55):

$$h_3 = 2\gamma \frac{3\beta^2 - 4}{\beta^4 \sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (\beta \geq 1). \quad (8.83)$$

Формула (8.79) для r_3 , согласно рис. 8.7, *з*, принимает вид

$$r_3 = \frac{4c}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3\psi d\psi = \frac{4c}{3\pi A} \cos 3\psi_1,$$

откуда с учетом соотношений (8.81) находим:

$$r_3 = \frac{4c(A^2 - 4b^2)}{3\pi A^4} \sqrt{A^2 - b^2} \quad (A \geq b), \quad (8.84)$$

или в обозначениях (8.55):

$$r_3 = 2\gamma \frac{\beta^2 - 4}{3\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (\beta \geq 1). \quad (8.85)$$

2. В частности, для идеальной релейной характеристики (рис. 8.6, *а*) из формул (8.82) и (8.84), полагая $b = 0$, получим:

$$h_3 = 0, \quad r_3 = \frac{4c}{3\pi A}. \quad (8.86)$$

3. Характеристика с зоной нечувствительности и насыщением.

Для такой характеристики (рис. 8.8, а) при $x = A \sin \psi$ функции $F(A \sin \psi)$ и $\frac{d}{dx} F(A \sin \psi)$ получают форму, изображенную на рис. 8.8, б

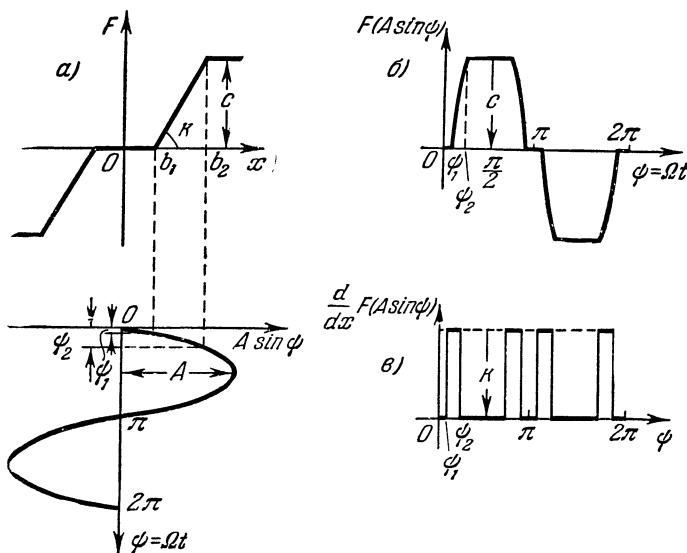


Рис. 8.8.

и г. Поэтому, выполняя вычисление коэффициента h_3 по формуле (8.79), получим:

$$\begin{aligned}
 h_3 &= \frac{4}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} k \sin 3\psi \sin \psi d\psi = \frac{4k}{\pi} \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} 3 \sin^2 \psi d\psi - \int_{\psi_1}^{\psi_2} 4 \sin^4 \psi d\psi \right) = \\
 &= \frac{k}{\pi} (\sin 2\psi_2 - \sin 2\psi_1) - \frac{k}{2\pi} (\sin 4\psi_2 - \sin 4\psi_1). \quad (8.87)
 \end{aligned}$$

Учитывая значения

$$\begin{aligned}
 \sin \psi_1 &= \frac{b_1}{A}, \quad \sin 2\psi_1 = \frac{2b_1 \sqrt{A^2 - b_1^2}}{A^2}, \quad \sin 4\psi_1 = \frac{4b_1 (A^2 - 2b_1^2) \sqrt{A^2 - b_1^2}}{A^4}, \\
 \sin \psi_2 &= \frac{b_2}{A}, \quad \sin 2\psi_2 = \frac{2b_2 \sqrt{A^2 - b_2^2}}{A^2}, \quad \sin 4\psi_2 = \frac{4b_2 (A^2 - 2b_2^2) \sqrt{A^2 - b_2^2}}{A^4},
 \end{aligned}$$

окончательно из (8.87) получим:

$$h_3 = \frac{4k}{\pi A^4} (b_2^3 \sqrt{A^2 - b_2^2} - b_1^3 \sqrt{A^2 - b_1^2}) \quad (A \geq b_2). \quad (8.88)$$

Вычисление коэффициента r_3 , согласно (8.79) и рис. 8.8, б, дает

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{4}{\pi A} \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} kA \sin \psi \sin 3\psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\frac{\pi}{2}} c \sin 3\psi d\psi \right) = \\ &= \frac{k}{\pi} (\sin 2\psi_2 - \sin 2\psi_1) - \frac{k}{2\pi} (\sin 4\psi_2 - \sin 4\psi_1) + \frac{4c}{3\pi A} \cos 3\psi_2. \end{aligned}$$

Учитывая значения, написанные выше, а также то, что

$$\cos 3\psi_2 = \frac{(A^2 - 4b_2^2) \sqrt{A^2 - b_2^2}}{A^3},$$

окончательно имеем:

$$r_3 = \frac{4k}{3\pi A^4} [(b_2 A^2 - b_1 A^2 - b_2^3 + 4b_1 b_2^2) \sqrt{A^2 - b_2^2} - 3b_1^3 \sqrt{A^2 - b_1^2}]. \quad (8.89)$$

4. Характеристика с зоной нечувствительности без насыщения. Для характеристики с зоной нечувствительности без насыщения (рис. 8.9, а), полагая в формулах (8.88) и (8.89) $b_1 = b$, $b_2 = A$, получим:

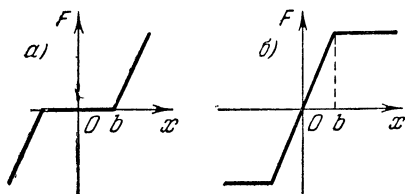


Рис. 8.9.

$$h_3 = -\frac{4kb^3}{\pi A^4} \sqrt{A^2 - b^2},$$

$$r_3 = -\frac{4kb^3}{\pi A^4} \sqrt{A^2 - b^2}$$

$$(A \geq b), \quad (8.90)$$

или в обозначениях (8.55), где надо считать $c = kb$ (согласно рис. 8.2, б):

$$h_3 = -\frac{2\gamma}{\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad r_3 = -\frac{2\gamma}{\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (\beta \geq 1). \quad (8.91)$$

В данном случае $\gamma = \frac{2k}{\pi}$.

5. Характеристика с насыщением без зоны нечувствительности. Для характеристики с насыщением без зоны нечувствительности (рис. 8.9, б), полагая в формулах (8.88) и (8.89) $b_1 = 0$, $b_2 = b$, получим:

$$h_3 = \frac{4kb^3}{\pi A^4} \sqrt{A^2 - b^2}, \quad r_3 = \frac{4kb(A^2 - b^2)}{3\pi A^4} \sqrt{A^2 - b^2} \quad (A \geq b), \quad (8.92)$$

или в обозначениях (8.55):

$$h_3 = \frac{2\gamma}{\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad r_3 = \frac{2\gamma(\beta^2 - 1)}{3\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (\beta \geq 1). \quad (8.93)$$

6. Характеристика с переменным коэффициентом усиления.

Для нелинейной характеристики с переменным коэффициентом усиления (рис. 8.10, а) при изменении x по синусоидальному закону функция $F(A \sin \psi)$ изображена на рис. 8.10, б, а функция $\frac{d}{dx} F(A \sin \psi)$ — на рис. 8.10, в.

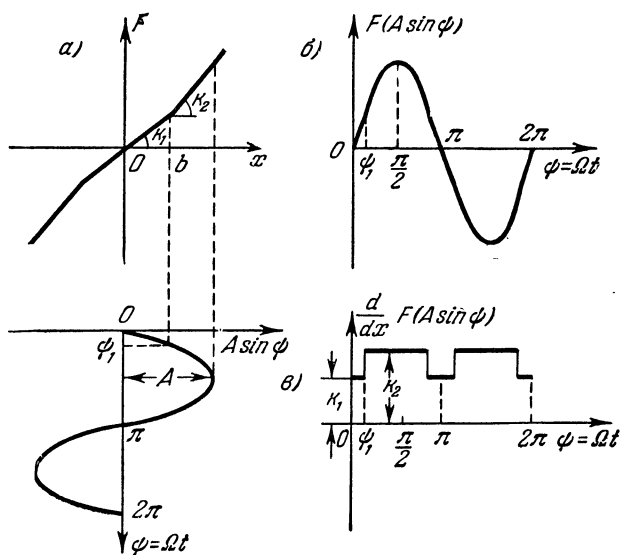


Рис. 8.10.

Выполняя вычисление коэффициента h_3 , согласно формуле (8.79) и рис. 8.10, в, получим:

$$\begin{aligned}
 h_3 &= \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\psi_1} k_1 \sin 3\psi \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} k_2 \sin 3\psi \sin \psi d\psi \right) = \\
 &= \frac{k_1 - k_2}{\pi} \left(\sin 2\psi_1 - \frac{1}{2} \sin 4\psi_1 \right).
 \end{aligned}$$

Учитывая значения

$$\sin \psi_1 = \frac{b}{A}, \quad \sin 2\psi_1 = \frac{2b \sqrt{A^2 - b^2}}{A^2}, \quad \sin 4\psi_1 = \frac{4b(A^2 - 2b^2)}{A^4} \sqrt{A^2 - b^2},$$

получим:

$$h_3 = \frac{4(k_1 - k_2)b^3 \sqrt{A^2 - b^2}}{\pi A^4} \quad (A \geq b), \quad (8.94)$$

или

$$h_3 = \frac{2\gamma}{\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \left(\gamma = \frac{2(k_1 - k_2)}{\pi}, \quad \beta = \frac{A}{b} \geq 1 \right). \quad (8.95)$$

Выполняя вычисление коэффициента r_3 в соответствии с формулой (8.79) и рис. 8.10, б, получим:

$$r_3 = \frac{4}{\pi A} \left\{ \int_0^{\psi_1} k_1 A \sin \psi \sin 3\psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} [k_2 (A \sin \psi - b) + k_1 b] \sin 3\psi d\psi \right\} =$$

$$= \frac{k_1 - k_2}{\pi} \left(\sin 2\psi_1 - \frac{1}{2} \sin 4\psi_1 \right) + \frac{4(k_1 - k_2)b}{3\pi A} \cos 3\psi_1.$$

Учитывая значения, написанные выше, а также

$$\cos 3\psi_1 = \frac{A^3 - 4b^3}{A^3} \sqrt{A^2 - b^2},$$

окончательно имеем:

$$r_3 = \frac{4(k_1 - k_2)(A^3 - b^3)b}{3\pi A^4} \sqrt{A^2 - b^2} \quad (A \geq b), \quad (8.96)$$

или

$$r_3 = \frac{2\gamma(\beta^3 - 1)}{3\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \left(\gamma = \frac{2(k_1 - k_2)}{\pi}, \quad \beta = \frac{A}{b} \geq 1 \right). \quad (8.97)$$

7. Нелинейная функция $F = kx^2 \operatorname{sign} x$. Для данной нелинейной функции (рис. 8.11, а) при изменении x по синусоидальному закону

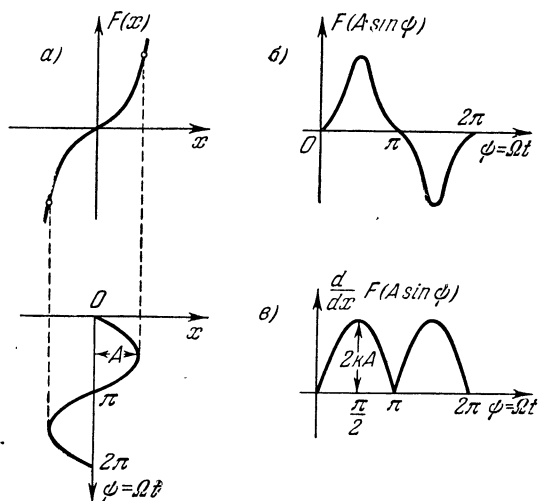


Рис. 8.11.

функция $F(A \sin \psi)$ имеет вид, показанный на рис. 8.11, б, а функция $\frac{d}{dx} F(A \sin \psi)$ изображается в виде двух положительных полу- волн синусоиды с амплитудой $2kA$ (рис. 8.11, в).

Выполняя вычисление коэффициента h_3 , согласно формуле (8.79) и рис. 8.11, в, получим:

$$h_3 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2kA \sin \psi \sin 3\psi \sin \psi d\psi = \frac{8kA}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3\psi \sin^2 \psi d\psi.$$

В результате интегрирования найдем:

$$h_3 = -\frac{16kA}{15\pi} = -\frac{8}{15} \gamma \beta \quad \left(\gamma = \frac{2kb}{\pi}, \quad \beta = \frac{A}{b} \right), \quad (8.98)$$

где через b обозначено любое фиксированное значение x , выбираемое для получения безразмерного выражения амплитуды β .

Выполняя вычисление коэффициента r_3 в соответствии с формулой (8.79) и рис. 8.11, б, получим:

$$r_3 = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} kA^2 \sin^2 \psi \sin 3\psi d\psi = \frac{4kA}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3\psi \sin^2 \psi d\psi.$$

В результате интегрирования будем иметь:

$$r_3 = -\frac{8kA}{15\pi} = -\frac{4}{15} \gamma \beta \quad \left(\gamma = \frac{2kb}{\pi}, \quad \beta = \frac{A}{b} \right). \quad (8.99)$$

8. Нелинейная функция $F = kx^3$. Для такой нелинейной функции вычисление коэффициентов h_3 и r_3 будет производиться аналогично предыдущему. Функция $F(A \sin \psi)$ в этом случае равна $kA^3 \sin^3 \psi$, и функция $\frac{d}{dx} F(A \sin \psi) = 3kA^2 \sin^2 \psi$.

Выполняя вычисления, для коэффициента h_3 получим:

$$h_3 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3kA^2 \sin^2 \psi \sin 3\psi \sin \psi d\psi.$$

В результате интегрирования имеем:

$$h_3 = -\frac{3kA^2}{4} = -\frac{3\pi}{8} \gamma \beta^2 \quad \left(\gamma = \frac{2kb^2}{\pi}, \quad \beta = \frac{A}{b} \right). \quad (8.100)$$

Для коэффициента r_3 имеем:

$$r_3 = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} kA^3 \sin^3 \psi \sin 3\psi d\psi,$$

что дает

$$r_3 = -\frac{kA^2}{4} = -\frac{\pi}{8} \gamma \beta^2 \quad \left(\gamma = \frac{2kb^2}{\pi}, \quad \beta = \frac{A}{b} \right). \quad (8.101)$$

Аналогично можно вычислить коэффициенты h_3 и r_3 и для других однозначных нечетно-симметричных нелинейных характеристик.

9. Для петлевых нелинейностей $F(x)$ и для нелинейностей более общего вида $F(x, px)$ необходимо пользоваться вместо формул (8.78) и (8.79) общими формулами (8.12) и (8.17). В качестве иллюстрации ниже будет рассмотрено вычисление коэффициентов третьей гармоники для двух видов петлевых нелинейностей, по примеру которых можно будет производить вычисления и для всех остальных.

Для вычисления третьей гармоники автоколебаний, согласно (8.21), необходимо знать коэффициенты r_3 и s_3 , определяемые формулами (8.17), которые для нечетно-симметричных петлевых нелинейностей $F(x)$ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} r_3 &= \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \, d\psi, \\ s_3 &= \frac{2}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos 3\psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.102)$$

Для уточнения первой гармоники автоколебаний с учетом третьей гармоники необходимо вычислить величины добавков Δq и $\Delta q'$ по формулам (8.12), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= I_{31} \delta_3 \cos \varphi_3 + I_{32} \delta_3 \sin \varphi_3, \\ \Delta q' &= I_{33} \delta_3 \cos \varphi_3 + I_{34} \delta_3 \sin \varphi_3, \end{aligned} \right\} \quad (8.103)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{31} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi \, d\psi, \\ I_{32} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \cos 3\psi \sin \psi \, d\psi, \\ I_{33} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \cos \psi \, d\psi, \\ I_{34} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \cos 3\psi \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.104)$$

Формулы (8.102) — (8.104) пригодны для любых петлевых нелинейностей $F(x)$.

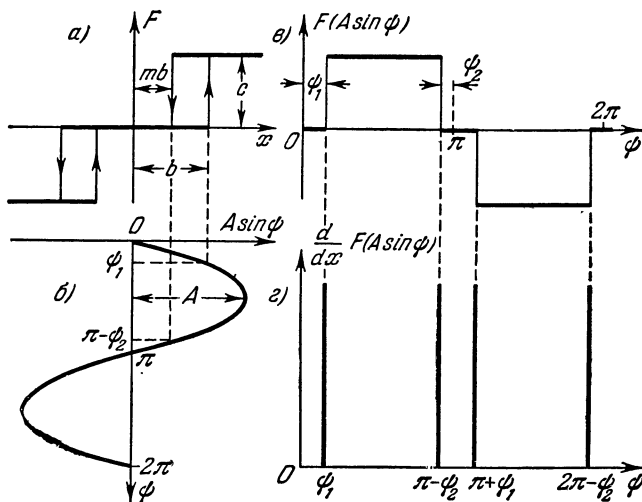


Рис. 8.12.

10. Релейная характеристика общего вида. Для петлевой релейной характеристики общего вида (рис. 8.12, а) из (8.102) с учетом рис. 8.12, в получаем:

$$r_3 = \frac{2c}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_2} \sin 3\psi d\psi = \frac{2c}{3\pi A} (\cos 3\psi_1 + \cos 3\psi_2),$$

$$s_3 = \frac{2c}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\pi-\psi_2} \cos 3\psi d\psi = -\frac{2c}{3\pi A} (\sin 3\psi_1 - \sin 3\psi_2).$$

Но так как

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{mb}{A}, \quad (8.105)$$

то окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} r_3 &= \frac{2c}{3\pi A} \left[\left(1 - 4 \frac{b^2}{A^2}\right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \left(1 - 4 \frac{m^2 b^2}{A^2}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right], \\ s_3 &= -\frac{2cb}{\pi A^3} \left[1 - \frac{4b^2}{3A^2} - m \left(1 - \frac{4m^2 b^2}{3A^2}\right) \right] \quad (A \geq b). \end{aligned} \right\} \quad (8.106)$$

Вычислим теперь интегралы (8.104), входящие в формулы (8.103). В данном случае удобно воспользоваться преобразованием (8.80), т. е.

$$\sin \psi d\psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{A} dx, \quad \cos \psi d\psi = \frac{1}{A} dx. \quad (8.107)$$

Замечая, что на участке интегрирования $(0, \pi)$, согласно рис. 8.12, z , величина $\frac{dF}{dx}$ не равна нулю только в двух точках $\psi = \psi_1$ и $\psi = \pi - \psi_2$ на интервале изменения x соответственно от 0 до A и от A до 0, получаем, согласно (8.104), с заменой (8.107) следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_{31} &= \frac{2}{\pi A} \sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 \int_0^A \frac{dF}{dx} dx - \frac{2}{\pi A} \sin 3\psi_2 \operatorname{tg} \psi_2 \int_A^0 \frac{dF}{dx} dx = \\ &= \frac{2}{\pi A} (\sin 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 + \sin 3\psi_2 \operatorname{tg} \psi_2) [F(A) - F(0)], \\ I_{32} &= \frac{2}{\pi A} (\cos 3\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 - \cos 3\psi_2 \operatorname{tg} \psi_2) [F(A) - F(0)], \\ I_{33} &= \frac{2}{\pi A} (\sin 3\psi_1 - \sin 3\psi_2) [F(A) - F(0)], \\ I_{34} &= \frac{2}{\pi A} (\cos 3\psi_1 + \cos 3\psi_2) [F(A) - F(0)]. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (8.81), находим:

$$\left. \begin{aligned} I_{31} &= \frac{2cb^3}{\pi A^4} \left(\frac{3A^2 - 4b^2}{\sqrt{A^2 - b^2}} + m^2 \frac{3A^2 - 4m^2 b^2}{\sqrt{A^2 - m^2 b^2}} \right), \\ I_{32} &= \frac{2cb}{\pi A^2} \left[1 - 4 \frac{b^2}{A^2} - m \left(1 - 4 \frac{m^2 b^2}{A^2} \right) \right], \\ I_{33} &= \frac{2cb}{\pi A^2} \left[\left(3 - 4 \frac{b^2}{A^2} \right) - m \left(3 - 4 \frac{m^2 b^2}{A^2} \right) \right], \\ I_{34} &= \frac{2c}{\pi A} \left[\left(1 - 4 \frac{b^2}{A^2} \right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \left(1 - 4 \frac{m^2 b^2}{A^2} \right) \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A^2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.108)$$

11. Петлевая релейная характеристика. Как частный случай предыдущих формул при $m = -1$, можно получить формулы для чисто петлевой релейной характеристики без среднего нулевого положения (рис. 8.13). Так, из формулы (8.106) при $m = -1$ имеем:

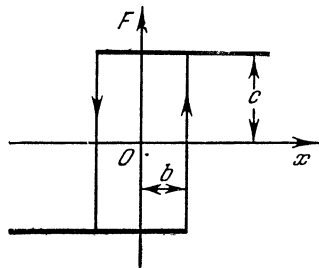


Рис. 8.13.

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{4c}{3\pi A} \left(1 - 4 \frac{b^2}{A^2} \right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \\ s_3 &= - \frac{4cb}{\pi A^2} \left(1 - \frac{4b^2}{3A^2} \right) \quad (A \geq b), \end{aligned}$$

(8.109)

или в обозначениях (8.55):

$$r_3 = \frac{2\gamma(\beta^2 - 4)}{3\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad s_3 = - \frac{2\gamma(3\beta^2 - 4)}{3\beta^4} \quad (\beta \geq 1). \quad (8.110)$$

Из (8.108) при $m = -1$ находим:

$$\left. \begin{aligned} I_{31} &= \frac{4cb^2(3A^2 - 4b^2)}{\pi A^4 \sqrt{A^2 - b^2}} = \frac{2\gamma(3\beta^2 - 4)}{\beta^4 \sqrt{\beta^2 - 1}}, \\ I_{32} &= \frac{4cb}{\pi A^2} \left(1 - 4\frac{b^2}{A^2}\right) = \frac{2\gamma}{\beta^4} (\beta^2 - 4), \\ I_{33} &= \frac{4cb}{\pi A^2} \left(3 - 4\frac{b^2}{A^2}\right) = \frac{2\gamma}{\beta^4} (3\beta^2 - 4), \\ I_{34} &= \frac{4c}{\pi A} \left(1 - 4\frac{b^2}{A^2}\right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} = \frac{2\gamma}{\beta^4} (\beta^2 - 4) \sqrt{\beta^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.111)$$

Интересно также отметить, что все формулы, выведенные в начале данного параграфа для однозначной релейной характеристики, получаются из приведенного выше общего случая при $m = +1$.

§ 8.4. Примеры вычисления третьей гармоники и уточнения первой

В данном параграфе будут даны два примера, иллюстрирующих процесс отыскания высших гармоник при автоколебаниях, а также уточнения первой гармоники за счет учета высших [246].

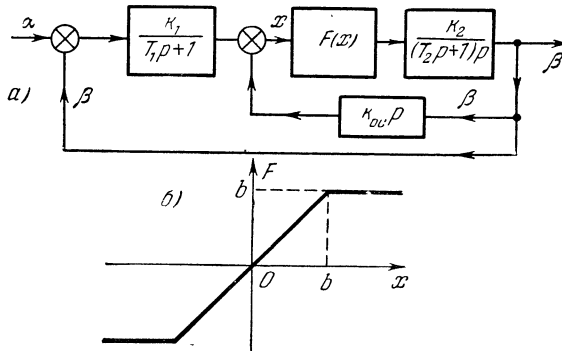


Рис. 8.14.

Пример 1. Рассмотрим следящую систему с нелинейностью типа насыщения. Уравнение системы, схема которой изображена на рис. 8.14, а, относительно переменной x при $u = 0$ будет

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p x + [k_1 + (T_1 p + 1)k_{oc} p] k_2 F(x) = 0, \quad (8.112)$$

где нелинейность $F(x)$ имеет вид рис. 8.14, б.

Сначала находим первое приближение $x = A \sin \Omega t$. Для этого составляем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + [k_1 + (T_1 p + 1)k_{oc} p] k_2 q(A) = 0, \quad (8.113)$$

где, согласно рис. 8.14, б и главе III:

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 \quad \text{при } A \leq b, \\ q &= \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) \quad \text{при } A \geq b. \end{aligned} \right\} \quad (8.114)$$

Подставив в (8.113) $p = j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части, найдем:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 q(A) - [T_1 + T_2 + T_1 k_{o.c} k_2 q(A)] \Omega^2 &= 0, \\ [1 + k_{o.c} k_2 q(A)] \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует:

$$\Omega^2 = \frac{1 + k_{o.c} k_2 q(A)}{T_1 T_2}, \quad (8.115)$$

а из первого

$$k_1 = \left[\frac{T_1 + T_2}{k_2 q(A)} + T_1 k_{o.c} \right] \Omega^2. \quad (8.116)$$

Задавая различные значения амплитуды A , по формулам (8.114) и (8.115) находим $q(A)$ и Ω^2 , а затем по формуле (8.116) величину k_1 .

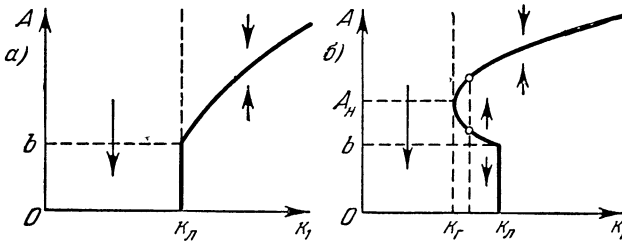


Рис. 8.15.

Это дает возможность построить график зависимости амплитуды периодического решения A от коэффициента усиления k_1 (при всех остальных заданных параметрах системы). Этот график получает вид рис. 8.15, а или б соответственно при следующих соотношениях параметров системы (см. § 4.4):

$$k_2 k_{o.c} \leq \sqrt{1 + \frac{T_2}{T_1}} \quad \text{или} \quad k_2 k_{o.c} > \sqrt{1 + \frac{T_2}{T_1}}, \quad (8.117)$$

причем

$$\begin{aligned} k_n &= \left(\frac{T_1 + T_2}{k_2} + T_1 k_{o.c} \right) \frac{1 + k_2 k_{o.c}}{T_1 T_2}, \\ k_r &= \frac{k_{o.c}}{T_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T_2}{T_1}} \right)^2. \end{aligned} \quad (8.118)$$

Пусть заданы параметры системы:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,005 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,4 \text{ сек}, \quad k_1 = 140, \\ k_2 &= 100 \text{ сек}^{-1}, \quad k_{o.c} = 0,5 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Они удовлетворяют второму из соотношений (8.117). Следовательно, здесь имеет место случай, изображенный на рис. 8.15, б, причем, согласно (8.118), $k_n = 166$, $k_r = 125$. Заданное значение k_1 лежит между ними, что соответствует области наличия двух периодических режимов, обозначенных точками на рис. 8.15, б. Выведенные выше формулы первого приближения (8.115) и (8.116) при этом дают для неустойчивого режима $A = 2,29$ в, $\Omega = 118,2$ сек⁻¹, а для устойчивого режима $A = 21,4$ в, $\Omega = 44,8$ сек⁻¹, причем $A_n = 7,08$ в.

Наибольший интерес представляет первое (неустойчивое) периодическое решение. Оно указывает границу для начальных условий, вне которой переходный процесс в системе будет расходиться, стремясь к автоколебаниям с очень большой амплитудой $A = 21,4$ в, что практически можно считать неустойчивостью системы в большом. Поэтому уточнение решения с вычислением высших гармоник произведем только для первого периодического решения.

Для данной нелинейности (рис. 8.14, б) в § 8.3 находим готовые выражения (8.92):

$$h_3 = \frac{4b^3}{\pi A^3} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, \quad r_3 = \frac{4b}{3\pi A} \left(1 - \frac{b^2}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (8.119)$$

Поэтому из формул (8.30) и (8.113) получаем относительную амплитуду δ_3 и фазу φ_3 третьей гармоники в виде

$$\delta_3 = \frac{k_3 r_3}{3\Omega} \sqrt{\frac{(k_1 - 9k_{o.c} T_1 \Omega^2)^2 + 9k_{o.c}^2 \Omega^2}{(9T_1^2 \Omega^2 + 1)(9T_3^2 \Omega^2 + 1)}},$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{3k_{o.c} \Omega}{k_1 - 9T_1 k_{o.c} \Omega^2} - \arctg 3T_1 \Omega - \arctg 3T_3 \Omega.$$

Вычисление по этим формулам дает

$$\delta_3 = 0,0317, \quad \varphi_3 = -1,875.$$

Для уточнения первой гармоники за счет только что вычисленной третьей гармоники находим, согласно (8.28), добавки к коэффициентам гармонической линеаризации

$$\Delta q = h_3 \delta_3 \cos \varphi_3, \quad \Delta q' = 3r_3 \delta_3 \sin \varphi_3,$$

подставляя которые в (8.26), согласно (8.113), придем к уточненному характеристическому уравнению

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + [k_1 + (T_1 p + 1)k_{o.c}p] \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} p \right) + [k_1 + (T_1 p + 1)k_{o.c}p] k_2 q(A_1) = 0, \quad (8.120)$$

где аналогично (8.114) имеем:

$$q = \begin{cases} q = 1 & \text{при } A_1 \leq b, \\ q = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A_1} + \frac{b}{A_1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_1^2}} \right) & \text{при } A_1 > b. \end{cases} \quad (8.121)$$

Подставив в уравнение (8.120) $p = j\Omega_1$ и выделив вещественную и мнимую части, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 q(A_1) + k_1 k_2 \Delta q - [T_1 + T_2 + T_1 k_{o.c} k_2 q(A_1)] \Omega_1^2 - \\ - \left(T_1 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} \right) k_{o.c} k_2 \Omega_1^2 = 0, \\ [1 + k_{o.c} k_2 q(A_1)] \Omega_1 + \left(k_{o.c} \Delta q + k_1 \frac{\Delta q'}{\Omega} \right) k_2 \Omega_1 - T_1 T_2 \Omega_1^3 - \\ - T_1 k_{o.c} k_2 \frac{\Delta q'}{\Omega} \Omega_1^3 = 0. \end{aligned}$$

Эти уточненные уравнения отличаются от прежних уравнений первого приближения несколькими добавочными членами, но способ решения их остается прежним. Из последнего уравнения находим:

$$\Omega_1^2 = \frac{1 + k_{o.c} k_2 q(A_1) + \left(k_{o.c} \Delta q + k_1 \frac{\Delta q'}{\Omega} \right) k_2}{T_1 T_2 + T_1 k_{o.c} k_2 \frac{\Delta q'}{\Omega}}, \quad (8.122)$$

а из первого

$$k_1 = \frac{T_1 + T_2 + T_1 k_{o.c} k_2 q(A_1) + \left(T_1 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} \right) k_{o.c} k_2}{k_2 q(A_1) + k_2 \Delta q} \Omega_1^3. \quad (8.123)$$

Задаваясь разными значениями амплитуды A_1 и вычисляя каждый раз по формулам (8.121), (8.122) и (8.123) значения $q(A_1)$, Ω_1^2 и k_1 , получим графики $A_1(k_1)$ типа рис. 8.15, но уже для уточненного значения амплитуды A_1 первой гармоники периодического решения.

Для заданного значения $k_1 = 140$ это уточнение дает $A_1 = 2,39$ в, $\Omega_1 = 117,8 \text{ сек}^{-1}$. Значения эти достаточно близки к величинам первого приближения, а подсчитанная выше амплитуда третьей гармоники достаточно мала.

Пример 2. Пусть в системе автоматического регулирования используется двухфазный индукционный двигатель, описываемый нелинейным уравнением (1.27), а именно:

$$J p x + J c_3 |x| p x + c_2 x + (c_2 c_3 + c_4) |x| x + c_3 c_4 x^3 = c_1 u,$$

где x — угловая скорость вала двигателя, а u — управляющее напряжение. Перепишем это уравнение в виде

$$(T_1 p + 1) x + F(x, p x) = k_1 u,$$

где

$$T_1 = \frac{J}{c_2}, \quad k_1 = \frac{c_1}{c_2},$$

$$F(x, p x) = T_1 c_3 |x| p x + \left(c_3 + \frac{c_4}{c_2} \right) |x| x + \frac{c_3 c_4}{c_2} x^3.$$

Гармоническая линеаризация этой нелинейности при $x = A \sin \Omega t$ приводит уравнение двигателя к виду

$$[(T_1 p + 1) + (T_1 b_1 A p + b_2 A + b_3 A^2)] x = k_1 u, \quad (8.124)$$

где

$$b_1 = \frac{4c_3}{3\pi}, \quad b_2 = 2b_1 + \frac{8c_4}{3\pi c_2}, \quad b_3 = \frac{3c_3 c_4}{4c_2}. \quad (8.125)$$

Уравнения остальных звеньев системы автоматического регулирования пусть будут линейными:

$$p x_1 = k_2 x, \quad (T_2 p + 1) x_2 = -k_3 x_1, \quad u = k_4 x_2, \quad (8.126)$$

где x_2 — регулируемая величина.

Найдем сначала первое приближение для автоколебаний. Характеристическое уравнение, согласно (8.124) и (8.126), будет

$$[(T_1 p + 1) + (T_1 b_1 A p + b_2 A + b_3 A^2)] (T_2 p + 1) p + k = 0, \quad (8.127)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_4$. Подставив $p = j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части, получим:

$$\left. \begin{aligned} k - [T_1(1 + b_1 A) + T_2(1 + b_2 A + b_3 A^2)] \Omega^2 &= 0, \\ (1 + b_2 A + b_3 A^2) \Omega - T_1 T_2 (1 + b_1 A) \Omega^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.128)$$

Из второго уравнения имеем:

$$\Omega^2 = \frac{1 + b_2 A + b_3 A^2}{T_1 T_2 (1 + b_1 A)}, \quad (8.129)$$

а из первого

$$k = [T_1(1 + b_1 A) + T_2(1 + b_2 A + b_3 A^2)] \Omega^2. \quad (8.130)$$

Задавая различные значения A и вычисляя при этом Ω^2 и k , получаем зависимость $A(k)$, изображенную на рис. 8.16. Рассмотрим следующий числовой пример:

$$T_1 = 0,5 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,1 \text{ сек},$$

$$k = 26,5 \text{ сек}^{-1}$$

с двумя вариантами нелинейности:

а) слабая нелинейность

$$b_1 = 0,01, \quad b_2 = 0,1, \quad b_3 = 0,002;$$

б) сильная нелинейность

$$b_1 = 0,1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0,166.$$

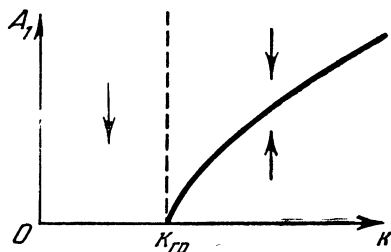


Рис. 8.16.

Расчет по формулам первого приближения (8.129) и (8.130) дает автоколебания в виде $x = A \sin \Omega t$, где для варианта слабой нелинейности

$$A = 8,14, \quad \Omega = 6 \text{ сек}^{-1},$$

а для варианта сильной нелинейности

$$A = 0,834, \quad \Omega = 6 \text{ сек}^{-1}.$$

Вычислим теперь высшие гармоники. Для учета второй и третьей гармоник воспользуемся формулой (8.17). Для рассматриваемой в настоящем примере нелинейности $F(x, px)$ коэффициенты r_2 и s_3 , подсчитанные по формулам (8.17), оказываются нулями. Поэтому остается только третья гармоника, для которой по формулам (8.17) для данной нелинейности с учетом обозначений (8.125) находим:

$$r_3 = -\frac{2}{5} b_2 A - \frac{1}{3} b_3 A^2, \quad s_3 = -\frac{3}{5} T_1 b_1 A \Omega. \quad (8.131)$$

Тогда по формулам (8.21) с учетом того, что, согласно (8.127):

$$Q(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k, \quad R(p) = (T_2 p + 1)p,$$

находим относительную амплитуду и фазу третьей гармоники

$$\delta_3 = 3\Omega \sqrt{\frac{(9T_2^2\Omega^2 + 1)(r_3^2 + s_3^2)}{[k - 9(T_1 + T_2)\Omega^2]^2 + 9\Omega^2(1 - 9T_1T_2\Omega^2)^2}},$$

$$\varphi_3 = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 3T_2\Omega - \operatorname{arctg} \frac{3\Omega(1 - 9T_1T_2\Omega^2)}{k - 9(T_1 + T_2)\Omega^2} + \operatorname{arctg} \frac{s_3}{r_3}.$$

При указанных выше данных получаем для варианта слабой нелинейности

$$\delta_3 = 0,041, \quad \varphi_3 = -0,377,$$

а для сильной нелинейности

$$\delta_3 = 0,042, \quad \varphi_3 = -0,0384.$$

После этого уточняется первая гармоника автоколебаний $A_1 \sin \Omega_1 t$. Для этого по формулам (8.12) находим величины добавков Δq и $\Delta q'$ к коэффициентам гармонической линеаризации:

$$\Delta q = \frac{3}{5} T_1 b_1 A \Omega \delta_3 \sin \varphi_3 - \left(\frac{2}{5} b_2 + b_3 A \right) A \delta_3 \cos \varphi_3,$$

$$\Delta q' = -\frac{2}{5} T_1 b_1 A \Omega \delta_3 \cos \varphi_3 - \left(\frac{3}{5} b_2 + b_3 A \right) A \delta_3 \sin \varphi_3.$$

Поэтому новое характеристическое уравнение для определения уточненной первой гармоники будет

$$[(T_1 p + 1) + (T_1 b_1 A_1 p + b_2 A_1 + b_3 A_1^2)](T_2 p + 1)p + k + \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} p \right) (T_2 p + 1)p = 0.$$

Подставляя $p = j\Omega_1$ и выделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$k - [T_1(1 + b_1A_1) + T_2(1 + b_2A_1 + b_3A_1^2)] \Omega_1^2 - \left(T_2 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} \right) \Omega_1^3 = 0,$$

$$(1 + b_2A_1 + b_3A_1^2) \Omega_1 + \Delta q \Omega_1 - T_1 T_2 (1 + b_1A_1) \Omega_1^2 - T_2 \frac{\Delta q'}{\Omega} \Omega_1^3 = 0.$$

Эти уравнения решаются тем же методом, что и (8.128), а именно из второго уравнения имеем:

$$\Omega_1^2 = \frac{1 + b_2A_1 + b_3A_1^2 + \Delta q}{T_1 T_2 (1 + b_1A_1) + T_2 \frac{\Delta q'}{\Omega}},$$

а из первого

$$k = \left[T_1(1 + b_1A_1) + T_2(1 + b_2A_1 + b_3A_1^2) + \left(T_2 \Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega} \right) \right] \Omega_1^2.$$

Эти уравнения приводят также к графику $A_1(k)$ вида рис. 8.16.

Для приведенных выше числовых значений параметров системы получаем следующие уточненные значения амплитуды и частоты автоколебаний:

для слабой нелинейности

$$A_1 = 8,03, \quad \Omega_1 = 5,99 \text{ сек}^{-1},$$

а для сильной нелинейности

$$A_1 = 0,820, \quad \Omega_1 = 5,98 \text{ сек}^{-1}.$$

Как видим, сильная нелинейность¹⁾ значительно снижает амплитуду автоколебаний (в линейной системе было бы $A_1 = \infty$). Этот результат получался выше в решении по первому приближению и подтверждается теперь уточненным решением.

§ 8.5. Примеры определения зависимости частоты от формы нелинейности

Проиллюстрируем изложенную в § 8.2 методику выявления зависимости частоты автоколебаний от формы нелинейности при некоторых однозначных нелинейностях путем учета высших гармоник [251].

Пример 1. Рассмотрим релейную систему автоматического регулирования, динамические процессы в которой описываются нелинейным уравнением третьего порядка

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p x + kF(x) = 0, \quad (8.132)$$

¹⁾ Нелинейность в данном примере характеризует степень отклонения реальной криволинейной характеристики двухфазного индукционного двигателя от прямолинейной.

где $F(x)$ задана в виде графика рис. 8.17, а (релейная характеристика с зоной нечувствительности).

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы для первого приближения здесь будет

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + kq = 0, \quad (8.133)$$

где, согласно (8.56), в обозначениях (8.55) имеем:

$$q = \frac{2\gamma}{\beta^2} \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Подставив $p = j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части, получаем два уравнения типа (8.44) в виде

$$X = kq - (T_1 + T_2) \Omega^2 = 0,$$

$$Y = \Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0.$$

Отсюда следует:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad \gamma = \frac{T_1 + T_2}{2k T_1 T_2} \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \quad (\beta \geq 1). \quad (8.134)$$

Последнее выражение дает зависимость относительной амплитуды автоколебаний $\beta = \frac{A}{b}$ от коэффициента формы нелинейности $\gamma = \frac{2c}{\pi b}$, изображенную на рис. 8.17, б. Верхняя ветвь кривой на

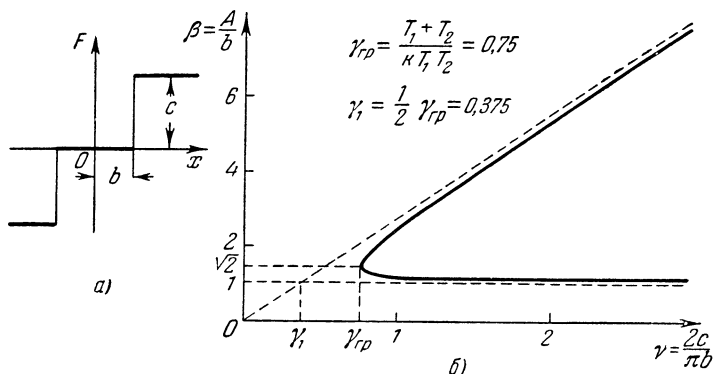


Рис. 8.17.

рис. 8.17, б соответствует устойчивому периодическому решению (автоколебаниям), а нижняя — неустойчивому. При построении были приняты следующие значения параметров системы:

$$T_1 = 0,1 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,2 \text{ сек}, \quad k = 20, \quad c = 1. \quad (8.135)$$

Если результаты расчета по первому приближению, приведенные на рис. 8.17, б, при этих данных пересчитать на зависимость ампли-

туды автоколебаний A (устойчивой ветви периодических решений) от зоны нечувствительности b , то получим:

b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,633	0,825	0,849
A	1,698	1,695	1,686	1,670	1,647	1,550	1,334	1,200

Как видно из рис. 8.17, б, при соотношении параметров системы, отвечающем неравенству

$$\gamma = \frac{2c}{\pi b} < \frac{T_1 + T_2}{kT_1T_2} = 0,75,$$

автоколебания невозможны. При этом данная релейная система будет устойчивой.

Частота автоколебаний Ω в решении по первому приближению, как видно из (8.134), не зависит от формы нелинейности и равна $7,07 \text{ сек}^{-1}$.

Чтобы установить зависимость частоты автоколебаний от коэффициента формы нелинейности γ , обратимся к уточненному решению. При этом определится одновременно новое уточненное значение амплитуды первой гармоники и будут найдены амплитуды и фаза третьей гармоники.

Найдем уточненное значение частоты Ω_1 в зависимости от формы нелинейности, для чего решим уравнение (8.65). Предварительно составим выражение $\Phi_1(\Omega_1)$ по формуле (8.66). Заметив, что согласно (8.133) в данном примере

$$Q(p) = T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p, \quad R(p) = k,$$

получим:

$$\begin{aligned} X_Q(\Omega_1) &= -(T_1 + T_2)\Omega_1^2, & X_R(\Omega_1) &= k, \\ Y_Q(\Omega_1) &= \Omega_1 - T_1T_2\Omega_1^3, & Y_R(\Omega_1) &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, согласно (8.63), запишем:

$$\begin{aligned} V_3(3\Omega_1) &= \text{Im} \left\{ \frac{-k}{j3\Omega_1 [1 + (T_1 + T_2)j3\Omega_1 - T_1T_29\Omega_1^2]} \right\} = \\ &= \frac{-k(9T_1T_2\Omega_1^2 - 1)}{3\Omega_1[(9T_1T_2\Omega_1^2 - 1)^2 + 9(T_1 + T_2)^2\Omega_1^2]}. \end{aligned}$$

Подставив все эти выражения в формулу (8.66), получим:

$$\Phi_1(\Omega_1) = \frac{\Omega_1^3(1 - T_1T_2\Omega_1^2)[(9T_1T_2\Omega_1^2 - 1)^2 + 9(T_1 + T_2)^2\Omega_1^2]}{k^2(9T_1T_2\Omega_1^2 - 1)}. \quad (8.136)$$

Чтобы решить уравнение (8.65), нужно еще знать $r_3(\gamma)$. Из § 8.3 для данной нелинейности (рис. 8.17, а), согласно (8.85), имеем:

$$r_3 = 2\gamma \frac{\beta^2 - 4}{3\beta^4} \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (8.137)$$

Теперь уравнение (8.65) легко решается графически, как показано на рис. 8.4, а. При прежних значениях параметров системы и при найденных выше зависимостях $\beta(\gamma)$ или $A(b)$ в результате произведенного уточнения получается зависимость частоты Ω_1 от зоны нечувствительности b , показанная на рис. 8.18 (кривая 2). Верхняя ветвь этой кривой соответствует устойчивому периодическому решению (т. е. верхней ветви кривой на рис. 8.17, б), а нижняя — неустойчивому решению (т. е. нижней ветви на рис. 8.17, б).

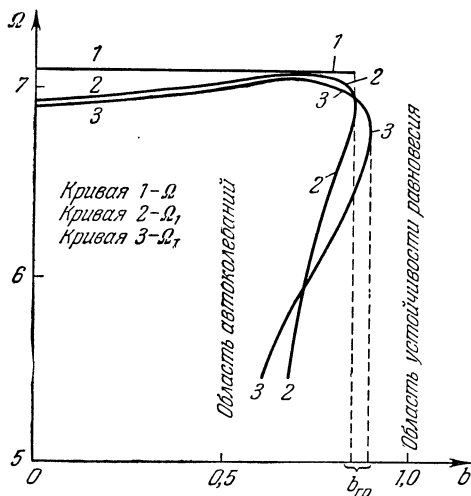


Рис. 8.18.

В решении же по первому приближению частота $\Omega = \text{const} = 7,07 \text{ сек}^{-1}$ для обеих ветвей (прямая 1 на рис. 8.18). Как видим, уточненное решение (кривая 2) дает довольно близкий результат по сравнению с первым приближением для устойчивой ветви периодических решений и существенно отличающийся для неустойчивой. Однако последний случай нас и не интересует практически¹⁾. В первом же случае принципиально важно то, что здесь улавливается зависимость частоты от

формы нелинейности (в данном случае от размера зоны нечувствительности) и в то же время подтверждается достаточно высокая точность первого приближения.

Далее, представляет большой интерес сравнение уточненного решения с точным решением той же задачи. Произведем определение периодических решений в данной нелинейной системе точным методом Г. С. Поспелова [245]. Согласно этому методу нужно сначала произвести разложение передаточной функции линейной части системы в виде

$$W_a(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p} = \frac{c_1}{p + p_1} + \frac{c_2}{p + p_2} + \frac{k}{p}, \quad (8.138)$$

где

$$c_1 = \frac{k T_1}{T_2 - T_1}, \quad c_2 = \frac{k T_2}{T_1 - T_2}, \quad p_1 = \frac{1}{T_1}, \quad p_2 = \frac{1}{T_2}.$$

¹⁾ Расхождение здесь объясняется быстрым изменением функции $q(A)$ в данном интервале амплитуд, т. е. нарушением оговоренного в главе II условия плавности функции $q(A)$.

Для передаточной функции такого вида при заданной нелинейности (рис. 8.17, а) по таблицам 1 и 2 из [245] находим уравнения периодов:

$$F_1(t)_{t=\theta_1} = \frac{k}{2} \theta_1 + c_1 T_1 \frac{1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{1 + e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_1}}} + c_2 T_2 \frac{1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_2}}}{1 + e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_2}}} = -b,$$

$$F_2(t)_{t=\theta_2} = \frac{k}{2} \theta_1 + c_1 T_1 \frac{(1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}) e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}}{1 + e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_1}}} + c_2 T_2 \frac{(1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_2}}) e^{-\frac{\theta_2}{T_2}}}{1 + e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_2}}} = b,$$

причем $\theta_1 + \theta_2$ составляет полупериод и, следовательно, точное значение частоты будет

$$\Omega_T = \frac{\pi}{\theta_1 + \theta_2}. \quad (8.139)$$

Сложив эту пару уравнений, а затем переписав второе из них, придем к следующим двум уравнениям:

$$\theta_1 + \frac{T_1^2}{T_2 - T_1} \frac{(1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_1}})(1 + e^{\frac{\theta_2}{T_1}})}{e^{-\frac{\theta_1}{T_1}} + e^{\frac{\theta_2}{T_1}}} + \frac{T_2^2}{T_1 - T_2} \frac{(1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_2}})(1 + e^{\frac{\theta_2}{T_2}})}{e^{-\frac{\theta_1}{T_2}} + e^{\frac{\theta_2}{T_2}}} = 0, \quad (8.140)$$

$$b = \frac{k}{2} \theta_1 + c_1 T_1 \frac{1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{e^{-\frac{\theta_1}{T_1}} + e^{\frac{\theta_2}{T_1}}} + c_2 T_2 \frac{1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_2}}}{e^{-\frac{\theta_1}{T_2}} + e^{\frac{\theta_2}{T_2}}}. \quad (8.141)$$

Решение полученных уравнений при заданных параметрах системы (8.135) будем производить следующим образом. Задаваясь каким-либо числовым значением θ_1 , будем находить графически из уравнения (8.140) величину θ_2 . Это позволит сразу вычислить точное значение частоты Ω_T (8.139) и определить затем по формуле (8.141), какой величине зоны нечувствительности b это соответствует. В результате будет найдена точная зависимость $\Omega_T(b)$.

Для удобства графического решения уравнения (8.140) оно преобразуется к следующему виду:

$$\theta_2 = \frac{T_1}{\lg e} [\lg(B_2 e^{\frac{\theta_2}{T_2}} - B_1) - \lg(B_3 - e^{\frac{\theta_2}{T_2}})], \quad (8.142)$$

и строятся графики левой и правой частей как функции θ_2 . В формуле (8.142)

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 - M \alpha_2 - N \alpha_1}{M + N - 1}, & B_2 &= \alpha_1 - \frac{M(\alpha_1 - 1)}{M + N - 1}, \\ B_3 &= \frac{N(\alpha_2 - 1)}{M + N - 1} - \alpha_2, & M &= \frac{T_1^2}{T_2 - T_1} \frac{\alpha_1 - 1}{\theta_1}, \\ N &= \frac{T_2^2}{T_1 - T_2} \frac{\alpha_2 - 1}{\theta_1}, & \alpha_1 &= e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}, & \alpha_2 &= e^{-\frac{\theta_1}{T_2}}. \end{aligned}$$

Найденная таким путем точная зависимость $\Omega_T(b)$ показана в виде кривой 3 на рис. 8.18. Как видно, она достаточно близка к кривой 2, соответствующей уточненному решению. Этим подтверждаются, во-первых, хорошая точность как уточненного решения, так и первого приближения для устойчивой ветви периодических решений и, во-вторых, хорошая точность уточненного решения для определенной области неустойчивой ветви периодических решений.

Очень важно также, что точное решение подтверждает разбивку прямой изменения параметра b , произведенную методом гармонической линеаризации, на две области: область наличия двух периодических решений ($b < b_{\text{гр}}$) и область устойчивости равновесного состояния системы ($b > b_{\text{гр}}$). При этом как первое приближение, так и уточненное решение дает границу устойчивости в виде

$$b_{\text{гр}} = 0,85,$$

а точное решение

$$b_{\text{гр}} = 0,89.$$

Приведем также таблицу числовых значений $\Omega(b)$, по которым построены кривые на рис. 8.18:

- 1) первое приближение $\Omega = 7,07 \text{ сек}^{-1}$;
- 2) уточненное решение $\Omega_1(b)$:

b	0	0,25	0,50	0,65	0,82	0,85	0,81	0,75	0,68
Ω_1	6,92	6,95	7,02	7,06	7,04	6,92	6,60	6,20	5,40

3) точное решение $\Omega_T(b)$:

b	0	0,25	0,48	0,63	0,82	0,88	0,88	0,83	0,60
Ω_T	6,90	6,94	6,98	7,06	6,98	6,89	6,61	6,27	5,43

На рис. 8.19, а, б и в показаны формы колебаний $x(t)$ для следующих величин зоны нечувствительности: $b = 0$, $b = 0,633$ и $b = 0,825$,

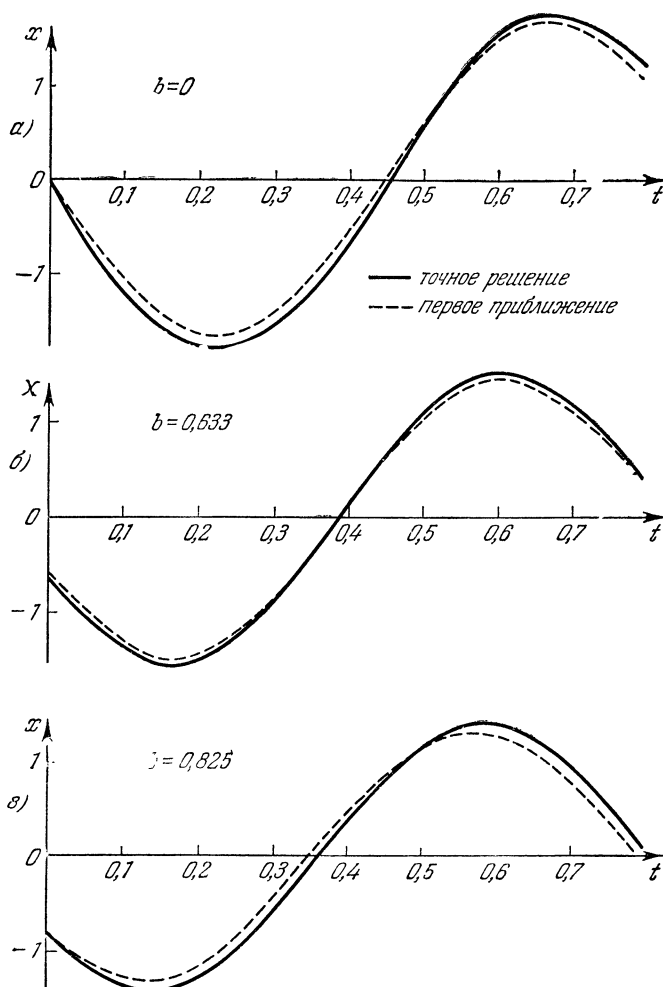


Рис. 8.19.

причем везде сплошной линией показано точное решение $x(t)$, а пунктиром — первое приближение $x = A \sin \Omega t$. Из рисунка видно достаточно хорошее совпадение с точным решением даже первого приближения без уточнения.

Наконец, по формулам (8.50) легко можно вычислить относительную амплитуду и фазу третьей гармоники автоколебаний:

$$\delta_3 = \frac{4c(A^2 - 4b^2)}{3\pi A^4} \frac{\sqrt{A^2 - b^2}}{3\Omega_1 \sqrt{(1 - 9T_1 T_2 \Omega_1^2)^2 + 9(T_1 + T_2)^2 \Omega_1^2}}, \quad (8.143)$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3(T_1 + T_2)\Omega_1}{1 - 9T_1 T_2 \Omega_1^2},$$

а затем и уточненное значение амплитуды A_1 первой гармоники, подобно тому как это уже делалось в § 8.4. В результате можно построить уточненное решение

$$x = A_1 \sin \Omega_1 t + \delta_3 A \sin (3\Omega_1 t + \varphi_3).$$

Пример 2. Пусть динамика системы описывается тоже нелинейным уравнением третьего порядка

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)px + kF(x) = 0,$$

но нелинейность $F(x)$ задана в виде кривой (рис. 8.20, а):

$$F = k_1(1 - k_2 x^2)x \quad \text{при } x \leq b,$$

$$F = c \quad \text{при } x \geq b.$$

Из условий

$$F = c \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{при } x = b$$

находим:

$$k_1 = \frac{3c}{2b}, \quad k_2 = \frac{1}{3b^2}.$$

Формула гармонической линеаризации в данном случае в обозначениях (8.55) дает

$$q = \gamma f_1(\beta),$$

где при $A \leq b$

$$f_1(\beta) = \frac{3\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\beta^2\right) \quad (\beta \leq 1), \quad (8.144)$$

а при $A \geq b$

$$f_1(\beta) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\beta^2\right) \arcsin \frac{1}{\beta} + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right) \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (\beta \geq 1) \quad (8.145)$$

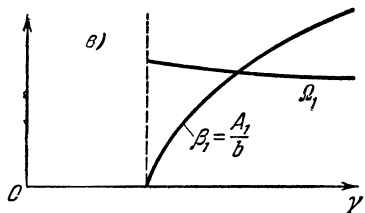
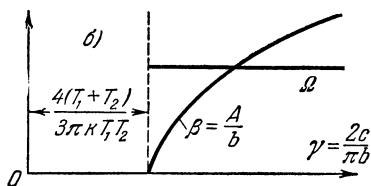
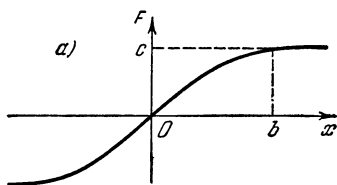


Рис. 8.20.

Аналогично предыдущему примеру получаем здесь первое приближение в виде

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad \gamma = \frac{T_1 + T_2}{k T_1 T_2 f_1(\beta)}.$$

Следовательно, частота автоколебаний в первом приближении остается одной и той же независимо от формы нелинейности (так как не зависит от величины γ). Вторая из этих формул дает зависимость относительной амплитуды $\beta = \frac{A}{b}$ от коэффициента формы нелинейности $\gamma = \frac{2c}{\pi b}$. Эту зависимость легко можно построить (рис. 8.20, б), если задаться разными значениями β и вычислять каждый раз γ .

Как видно из рис. 8.20, б, при соотношении параметров системы, отвечающем неравенству

$$\gamma = \frac{2c}{\pi b} < \frac{4(T_1 + T_2)}{3\pi k T_1 T_2},$$

автоколебания в системе невозможны. При этом данная нелинейная система будет устойчивой (так же как и соответствующая линейная система, получающаяся при $k_2 = 0$).

Для отыскания уточненного значения частоты Ω_1 в зависимости от формы нелинейности здесь получается прежнее выражение (8.136) для функции $\Phi_1(\Omega_1)$. Необходимо теперь только найти величину r_3 для данной нелинейности (рис. 8.20, а) по формуле (8.29). В результате получаем:

$$r_3 = \gamma f_2(\beta), \quad (8.146)$$

где при $A \leq b$

$$f_2(\beta) = \frac{\pi}{16} \beta^2 \quad (\beta \leq 1),$$

а при $A \geq b$

$$f_2(\beta) = \frac{1}{8} \beta^2 \arcsin \frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{8} - \frac{7}{12\beta^2} + \frac{1}{3\beta^4} \right) \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (\beta \geq 1).$$

Таким образом, мы имеем возможность и в этой задаче осуществить графическое построение (рис. 8.4, а), дающее искомую зависимость частоты автоколебаний Ω_1 от коэффициента формы нелинейности γ (рис. 8.20, в).

Кроме этого, можно вычислить также относительную амплитуду третьей гармоники по формуле

$$\delta_3 = \frac{k \gamma f_2(\beta)}{3\Omega_1 \sqrt{(1 - 9T_1 T_2 \Omega_1^2)^2 + 9(T_1 + T_2)^2 \Omega_1^2}}, \quad (8.147)$$

а затем, если нужно, и уточненное значение относительной амплитуды первой гармоники $\beta_1 = \frac{A_1}{b}$ в зависимости от коэффициента формы нелинейности γ (рис. 8.20, в). Вторая из формул (8.143) для фазы третьей гармоники сохраняет тот же вид и для данного примера.

§ 8.6. Определение высших гармоник несимметричных автоколебаний при внешнем воздействии

При вычислении высших гармоник симметричных автоколебаний в § 8.1 были использованы выражения полного решения в виде рядов Тейлора и Фурье, составленные в § 2.2. Не имея в предыдущих главах аналогичного материала для несимметричных колебаний, здесь необходимо начать с составления указанных выражений [255].

Будем исходить из уравнения нелинейной системы

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t), \quad (8.148)$$

где $f(t)$ — медленно меняющееся во времени внешнее воздействие. Для упрощения общих формул здесь взята нелинейная функция $F(x)$ вместо прежней $F(x, px)$. Однако предполагается, что функция $F(x)$ может быть не только однозначной, но и петлевой, в том числе и несимметричной.

В случае постоянного внешнего воздействия (в статической системе) или в случае постоянной скорости изменения внешнего воздействия (в астатической системе) уравнение (8.148) будет иметь вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = M^0, \quad (8.149)$$

где M^0 — заданная постоянная, определяемая, как и в главе V, формулами (5.21) и (5.22).

Периодическое решение будем искать в виде

$$x = x^0 + x_1 + \sum_{k=2}^n x_k, \quad (8.150)$$

$$x_1 = A \sin \Omega t, \quad x_k = \delta_k A \sin(k\Omega t + \varphi_k), \quad (8.151)$$

где x^0 , x_1 , x_k — соответствующие гармоники периодического решения $x(t)$, разложенного в ряд Фурье; n — произвольное положительное целое число, причем гармоники с $k > n$ считаются несущественными. Через δ_k обозначены относительные амплитуды высших гармоник x_k (по отношению к первой).

Разложим нелинейную функцию $F(x)$, используя (8.150), в ряд Тейлора

$$F(x) = F(x^0 + x_1) + \frac{dF}{dx}(x^0 + x_1) \sum_{k=2}^n x_k + \dots, \quad (8.152)$$

а затем в ряд Фурье

$$F(x) = F^0 + F_1 + \sum_{k=2}^n F_k + \sum_{k=0}^n E_k \quad (8.153)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) d\psi, \\ F_1 &= q(x^0, A) A \sin \Omega t + q'(x^0, A) A \cos \Omega t, \\ q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (8.154)$$

$$\left. \begin{aligned} F_k &= r_k(x^0, A) A \sin k\Omega t + s_k(x^0, A) A \cos k\Omega t \quad (k=2, 3, \dots, n), \\ r_k &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \Omega t) \sin k\psi d\psi, \\ s_k &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi) \cos k\psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (8.155)$$

$$\left. \begin{aligned} E^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{dF}{dx} (x^0 + A \sin \psi) \sum_{k=2}^n x_k + \dots \right] d\psi, \\ E_k &= G_k A \sin k\Omega t + H_k A \cos k\Omega t, \\ G_k &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left[\frac{dF}{dx} (x^0 + A \sin \psi) \sum_{k=2}^n x_k + \dots \right] \sin k\psi d\psi, \\ H_k &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left[\frac{dF}{dx} (x^0 + A \sin \psi) \sum_{k=2}^n x_k + \dots \right] \cos k\psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (8.156)$$

Каждая гармоника нелинейной функции $F(x)$ разбита на два слагаемых F_k и E_k , причем, согласно (8.153), F_k определяется через нулевую x^0 и первую x_1 гармоники искомого решения, что составляет обычно главную часть решения, а E_k определяется через высшие x_k гармоники искомого решения. Поэтому составляющие высших гармоник F_k нелинейной функции $F(x)$ нельзя считать малыми (когда речь

идет о произвольной нелинейности) независимо от величины высших гармоник x_k искомого решения. Что же касается других составляющих высших гармоник E_k нелинейной функции $F(x)$, то для малых высших гармоник x_k искомого решения они тоже будут малыми, если производная $\frac{dF}{dx}$ конечна или представляет собой дельта-функцию (например, для релейных характеристик), а добавочные члены, входящие в E_k и обозначенные многоточием, будут при этом малыми высшего порядка, если высшие производные от F по x конечны (для произвольных нелинейностей) или являются дельта-функциями (для кусочно-линейных характеристик). Будем полагать, что форма $F(x)$ удовлетворяет указанным условиям; это практически не накладывает на нее больших ограничений, но существенно для дальнейшего.

Подставив (8.150) и (8.153) в заданное нелинейное уравнение (8.149), получим ряд уравнений, нелинейно связанных друг с другом:

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0(x^0, A) + R(0)E^0 = M^0, \quad (8.157)$$

$$Q(p)x_1 + R(p)\left[q(x^0, A) + \frac{q_1(x^0, A)}{\Omega}p\right]x_1 + R(p)E_1 = 0, \quad (8.158)$$

$$Q(p)x_k + R(p)F_k + R(p)E_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (8.159)$$

Как видим, уравнения (8.159) связывают между собой величины F_k и x_k . Отсюда следует, что при немалых высших гармониках F_k могут иметь место малые высшие гармоники x_k решения только в случае, если

$$\frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \ll \left| \frac{R(j\Omega)}{Q(j\Omega)} \right| \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (8.160)$$

При этом предполагается, что $\left| \frac{R(jk\Omega)}{Q(jk\Omega)} \right| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, для чего достаточно, чтобы степень $R(p)$ была ниже $Q(p)$. Кроме того, будем считать, как и прежде, что $Q(p)$ не имеет чисто мнимых корней и корней с положительной вещественной частью.

Следовательно, условие фильтра (8.160) при соответствующей структуре многочленов $Q(p)$ и $R(p)$ обеспечивает малость высших гармоник искомого решения при произвольной форме нелинейности (т. е. при немалых F_k), удовлетворяющей лишь указанным выше требованиям относительно ее производных.

В таком случае, как уже известно, все величины E_k ($k = 0, 1, \dots, n$) будут иметь тот же порядок малости, что и высшие гармоники реше-

ния $\sum_{k=2}^n x_k$. В составе последней величины, согласно (8.151), все δ_k

будут играть роль малого параметра. Тогда, согласно (8.157) и (8.158),

можно определить нулевую и первую гармоники решения приближенно из уравнений

$$\left. \begin{aligned} Q(0)x^0 + R(0)F^0(x^0, A) &= M^0, \\ Q(p)x_1 + R(p)\left[q(x^0, A) + \frac{q'(x^0, A)}{\Omega}p\right]x_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.161)$$

Это представляет собой результат гармонической линеаризации, рассмотренной в главе V.

После подстановки во второе уравнение (8.161) $p = j\Omega$ и выделения вещественной и мнимой частей получим вместо (8.161) три алгебраических уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Q(0)x^0 + R(0)F^0(x^0, A) &= M^0, \\ X_Q(\Omega) + X_R(\Omega)q(x^0, A) - Y_R(\Omega)q'(x^0, A) &= 0, \\ Y_Q(\Omega) + Y_R(\Omega)q(x^0, A) + X_R(\Omega)q'(x^0, A) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.162)$$

из которых определяются три неизвестные x^0, A, Ω . Здесь через X_Q, Y_Q, X_R, Y_R обозначены вещественные и мнимые части многочленов $Q(j\Omega)$ и $R(j\Omega)$.

Этим приближением можно удовлетвориться, если свойство фильтра (8.160) для данной системы хорошо выполняется или в противном случае, если сами F_k малы. Чем хуже выполняется свойство фильтра (8.160) при немалых F_k , тем существеннее становится учет высших гармоник x_k искомого решения.

Используя результат решения уравнений (8.162), т. е. величины x^0, A, Ω в качестве первого приближения, найдем высшие гармоники (δ_k и φ_k), а затем и уточненные значения для нулевой и первой гармоник (x_1^0, A_1 и Ω_1). После этого в случае необходимости можно уточнить также и высшие гармоники (δ'_k и φ'_k).

Решение задачи при этом строится следующим образом. Первое приближение для каждой из высших гармоник определится согласно уравнениям (8.159) и (8.151) в виде

$$Q(p)x_k + \frac{1}{\delta_k}R(p)\left[r_k(x^0, A)\left(\cos \varphi_k - \frac{\sin \varphi_k}{k\Omega}p\right) + \right. \\ \left. + s_k(x^0, A)\left(\sin \varphi_k + \frac{\cos \varphi_k}{k\Omega}p\right)\right]x_k = 0,$$

откуда в результате подстановки $p = jk\Omega$ находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \sqrt{\frac{X_{kR}^2 + Y_{kR}^2}{X_{kQ}^2 + Y_{kQ}^2} [r_k^2(x^0, A) + s_k^2(x^0, A)]}, \\ \varphi_k &= \arctg \frac{Y_{kR}}{X_{kR}} - \arctg \frac{Y_{kQ}}{X_{kQ}} + \arctg \frac{s_k(x^0, A)}{r_k(x^0, A)}, \end{aligned} \right\} \quad (8.163)$$

где $X_{kR}, Y_{kR}, X_{kQ}, Y_{kQ}$ обозначают вещественные и мнимые части многочленов $R(jk\Omega)$ и $Q(jk\Omega)$.

Уточнение для нулевой и первой гармоник после этого согласно (8.157) и (8.158) определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} Q(0) x_1^0 + R(0) F^0(x_1^0, A_1) &= M^0 - R(0) E^0(x^0, A, \delta_k, \varphi_k), \\ Q(p) x_1 + R(p) \left[q(x_1^0, A_1) + \frac{q'(x_1^0, A_1)}{\Omega_1} p \right] x_1 + \\ &+ R(p) E_1(x^0, A, \delta_k, \varphi_k) x_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.164)$$

где

$$E^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dF}{dx} (x^0 + A \sin \psi) \sum_{k=2}^n x_k d\psi, \quad E_1 = \left(G_1 + \frac{H_1}{\Omega} p \right) x_1,$$

$$G_1 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \frac{dF}{dx} (x^0 + A \sin \psi) \sum_{k=2}^n x_k \sin \psi d\psi,$$

$$H_1 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \frac{dF}{dx} (x^0 + A \sin \psi) \sum_{k=2}^n x_k \cos \psi d\psi.$$

Если переписать уравнения (8.164) в виде

$$Q(0) x_1^0 + R(0) F^0(x_1^0, A_1) = M_1^0, \quad (8.165)$$

$$Q_1(p) x_1 + R(p) \left[q(x_1^0, A_1) + \frac{q'(x_1^0, A_1)}{\Omega_1} p \right] x_1 = 0, \quad (8.166)$$

где

$$M_1^0 = M^0 - E^0(x^0, A, \delta_k, \varphi_k),$$

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left[G_1(x^0, A, \delta_k, \varphi_k) + \frac{1}{\Omega} H_1(x^0, A, \delta_k, \varphi_k) p \right],$$

то становится ясным, что уточненное решение по уравнениям (8.165) и (8.166) можно искать точно тем же способом, что и приближенное решение (8.161), исправив только соответствующим образом постоянную M^0 и коэффициенты многочлена $Q(p)$ за счет учета высших гармоник искомого решения.

Уточнение для высших гармоник (δ'_k, φ'_k) может производиться по тем же формулам (8.163), но с подстановкой новых значений Ω_1, A_1 и x_1^0 . Однако может быть произведено при этом и дополнительное уточнение решения за счет учета слагаемого $R(p) E_k$ в уравнении (8.159). Второе уточнение для нулевой и первой гармоник (необходимость в котором возникает очень редко) может производиться затем по уравнениям того же типа (8.165) и (8.166) с подстановкой в них значений x_1^0, A_1, Ω_1 вместо x^0, A, Ω . При необходимости в выражениях E^0, G_1, H_1 могут быть учтены вторые члены ряда Тейлора в зависи-

мости от порядка величины $\sum_{k=2}^n x_k$, т. е. от порядка величин δ_k по сравнению с единицей.

Таким образом, для системы, описываемой уравнением (8.149) с постоянной правой частью, определяются высшие гармоники несимметричных автоколебаний и уточняются нулевая и первая гармоники с определением их зависимости от величины правой части, т. е. от величины внешнего воздействия. Аналогичным путем решается и уравнение (8.148) при наличии медленно меняющегося внешнего воздействия $f(t)$. В этом случае вместо алгебраического уравнения (8.165) будет дифференциальное:

$$Q(p)x_1^0 + R(p)F^0(x_1^0, A_1) = S(p)f(t) - E^0,$$

причем x_1^0, A_1, E^0 будут медленно меняющимися функциями, зависящими от $f(t)$. Способ решения этого уравнения совместно с уравнением (8.166) остается совершенно тем же, что и в главе V, а именно необходимо найти функцию смещения $\Phi(x_1^0)$ и подставить ее вместо $F^0(x_1^0, A_1)$. Тогда из данного уравнения определится $x_1^0(t)$. Возможна также и обычная линеаризация функции смещения $\Phi(x_1^0) = k_{\text{н}}x_1^0$.

Рассмотрим пример определения высших гармоник несимметричных автоколебаний релейной системы при $F(x) = c \operatorname{sign} x$, $R(p) = p + b_1$, $Q(p) = p^3 + a_1p^2 + a_2p$.

Будем учитывать вторую и третью гармоники автоколебаний, отыскивая решение уравнений (8.149) в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x^0 + x_1 + x_2 + x_3, \\ x_1 &= A \sin \Omega t, \quad x_2 = \delta_2 A \sin(2\Omega t + \varphi_2), \\ x_3 &= \delta_3 A \sin(3\Omega t + \varphi_3). \end{aligned} \right\} \quad (8.167)$$

Вычислим необходимые величины:

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c \operatorname{sign}(x^0 + A \sin \psi) d\psi = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A}, \quad (8.168)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} c \operatorname{sign}(x^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} c \operatorname{sign}(x^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.169)$$

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} c \operatorname{sign}(x^0 + A \sin \psi) \sin 2\psi d\psi = 0, \\ s_2 &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} c \operatorname{sign}(x^0 + A \sin \psi) \cos 2\psi d\psi = \frac{4c}{\pi A} \frac{x^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.170)$$

$$\left. \begin{aligned} r_3 &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} c \operatorname{sign}(x^0 + A \sin \psi) \sin 3\psi \, d\psi = \\ &= \frac{4c}{3\pi A} \left[1 - 4 \left(\frac{x^0}{A} \right)^2 \right] \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A} \right)^2}, \\ s_3 &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} c \operatorname{sign}(x^0 + A \sin \psi) \cos 3\psi \, d\psi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.171)$$

$$\begin{aligned} E^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2c\Delta(x^0 + A \sin \psi) [\delta_2 A \sin(2\psi + \varphi_2) + \\ &\quad + \delta_3 A \sin(3\psi + \varphi_3)] \, d\psi = \\ &= -\frac{2c}{\pi} \left\{ 2\delta_2 \frac{x^0}{A} \cos \varphi_2 + \delta_3 \left[1 - 4 \left(\frac{x^0}{A} \right)^2 \right] \sin \varphi_3 \right\}, \end{aligned} \quad (8.172)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} 2c\Delta(x^0 + A \sin \psi) [\delta_2 A \sin(2\psi + \varphi_2) + \\ &\quad + \delta_3 A \sin(3\psi + \varphi_3)] \sin \psi \, d\psi = \\ &= \frac{4c}{\pi A} \frac{x^0}{A} \left\{ 2\delta_2 \frac{x^0}{A} \cos \varphi_2 + \delta_3 \left[1 - 4 \left(\frac{x^0}{A} \right)^2 \right] \sin \varphi_3 \right\}, \end{aligned} \quad (8.173)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} 2c\Delta(x^0 + A \sin \psi) [\delta_2 A \sin(2\psi + \varphi_2) + \\ &\quad + \delta_3 A \sin(3\psi + \varphi_3)] \cos \psi \, d\psi = \\ &= \frac{4c}{\pi A} \left\{ \delta_2 \left[1 - 2 \left(\frac{x^0}{A} \right)^2 \right] \sin \varphi_2 - \delta_3 \frac{x^0}{A} \left[3 - 4 \left(\frac{x^0}{A} \right)^2 \right] \cos \varphi_3 \right\}, \end{aligned} \quad (8.174)$$

где через $\Delta(x^0 + A \sin \psi)$ обозначена дельта-функция. Взятие интегралов с этой функцией было проиллюстрировано ранее (см., например, § 8.3).

Уравнения первого приближения (результат гармонической линеаризации), согласно (8.162), здесь будут:

$$\begin{aligned} \frac{2cb_1}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A} &= M^0, \\ -a_1 \Omega^3 + b_1 \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A} \right)^2} &= 0, \\ -\Omega^3 + a_2 \Omega + \frac{4c\Omega}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A} \right)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^0}{A} &= \sin \frac{\pi M^0}{2cb_1}, & \Omega &= \sqrt{\frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1}}, \\ A &= \frac{4c}{\pi a_2} \left(\frac{b_1}{a_1} - 1 \right) \cos \frac{\pi M^0}{2cb_1}, & x^0 &= \frac{2c}{\pi a_2} \left(\frac{b_1}{a_1} - 1 \right) \sin \frac{\pi M^0}{2cb_1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.175)$$

Это приближенное решение определяет зависимость постоянной составляющей x^0 и амплитуды автоколебаний A от параметров системы и от величины внешнего постоянного воздействия M^0 (пунктирные кривые на рис. 8.21 и 8.22). Частота же автоколебаний Ω оказы-

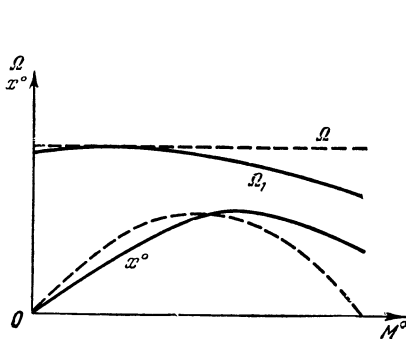


Рис. 8.21.

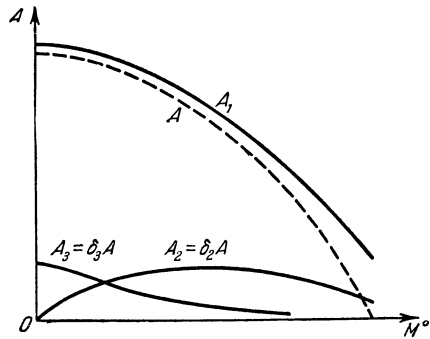


Рис. 8.22.

вается не зависящей от величины M^0 . Однако моделирование данной задачи показывает, что частота автоколебаний Ω тоже зависит от величины постоянного внешнего воздействия M^0 , причем с увеличением M^0 форма автоколебаний не просто получает смещение x^0 , как в приближенном решении, но искажается, становясь несимметричной внутри полупериода. Это говорит о появлении второй гармоники.

Чтобы получить правильную качественную картину явления и правильный количественный результат, решим задачу с учетом второй и третьей гармоник. По формулам (8.163), (8.170) и (8.171) с учетом (8.175) находим относительные амплитуды и фазы второй и третьей гармоник:

$$\delta_2 = \frac{1}{2\Omega} \sqrt{\frac{b_1^2 + 4\Omega^2}{4a_1^2\Omega^2 + (a_2 - 4\Omega^2)^2}} \frac{a_1 a_2}{b_1 - a_1} \sin \frac{\pi M^0}{2cb_1}, \quad (8.176)$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{2\Omega}{b_1} - \arctg \frac{a_2 - 4\Omega^2}{2a_1\Omega} + \frac{\pi}{2}, \quad (8.177)$$

$$\delta_3 = \frac{1}{9\Omega} \sqrt{\frac{b_1^2 + 9\Omega^2}{9a_1^2\Omega^2 + (a_2 - 9\Omega^2)^2}} \frac{a_1 a_2}{b_1 - a_1} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\pi M^0}{2cb_1} \right), \quad (8.178)$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{3\Omega}{b_1} - \arctg \frac{a_2 - 9\Omega^2}{3a_1\Omega}. \quad (8.179)$$

Как видно из (8.176), вторая гармоника автоколебаний не возникает ($\delta_2 = 0$) при отсутствии внешнего воздействия ($M^0 = 0$). При этом колебания симметричны, и имеет место только третья гармоника ($\delta_3 \neq 0$ при $M^0 = 0$). При наличии же постоянного внешнего воздействия M^0 появляется вторая гармоника, амплитуда которой вначале увеличивается с увеличением M^0 (рис. 8.22), искажая форму кривой автоколебаний, как и при моделировании. Амплитуда же третьей гармоники δ_3 вначале уменьшается с увеличением M^0 .

Чтобы найти зависимость частоты автоколебаний от величины внешнего постоянного воздействия, произведем уточнения для нулевой и первой гармоник. Составим уравнения (8.165) и (8.166) для данной задачи с учетом уравнений (8.168) — (8.179). Из (8.165) получим:

$$\frac{x^0}{A} = \sin \left[\frac{\pi M^0}{2cb_1} - f_2(\Omega) \sin^2 \frac{\pi M^0}{2cb_1} \cos \varphi_2(\Omega) - \right. \\ \left. - f_3(\Omega) \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\pi M^0}{2cb_1} \right)^2 \sin \varphi_3(\Omega) \right], \quad (8.180)$$

где Ω , $\varphi_2(\Omega)$ и $\varphi_3(\Omega)$ определяются формулами (8.175), (8.177) и (8.179) через параметры системы, и, кроме того:

$$f_2(\Omega) = \frac{a_1 a_2}{b_1 \Omega (b_1 - a_1)} \sqrt{\frac{b_1^2 + 4\Omega^2}{4a_1^2 \Omega^2 + (a_2 - 4\Omega^2)^2}}, \\ f_3(\Omega) = \frac{a_1 a_2}{9b_1 \Omega (b_1 - a_1)} \sqrt{\frac{b_1^2 + 9\Omega^2}{9a_1^2 \Omega^2 + (a_2 - 9\Omega^2)^2}}.$$

Уточненная зависимость $x^0(M^0)$ показана сплошной линией на рис. 8.21.

Уравнение (8.166) запишем сразу в алгебраическом виде, а именно:

$$-a_1 \Omega_1^2 + b_1 G_1'(x^0, A, \delta_k, \varphi_k) - \\ - \Omega_1^2 \frac{1}{\Omega} H_1'(x^0, A, \delta_k, \varphi_k) + b_1 q(x^0, A_1) = 0, \\ -\Omega_1^3 + a_2 \Omega_1 + \Omega_1 \left[G_1'(x^0, A, \delta_k, \varphi_k) + \right. \\ \left. + \frac{b_1}{\Omega} H_1'(x^0, A, \delta_k, \varphi_k) \right] + \Omega_1 q(x^0, A_1) = 0.$$

Отсюда с учетом (8.173) — (8.179) находим:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{a_2 b_1 + b_1^2 f_4(M^0)}{b_1 - a_1 - f_4(M^0)}}, \quad (8.181)$$

$$q(x^0, A_1) = \frac{[a_2 + f_5(M^0) + b_1 f_4(M^0)][a_1 + f_4(M^0)] - b_1 f_5(M^0)}{b_1 - a_1 - f_4(M^0)}, \quad (8.182)$$

где

$$f_4(M^0) = \frac{a_1 a_2}{2(b_1 - a_1)} \left[f_2(\Omega) \operatorname{tg} \frac{\pi M^0}{2cb_1} \cos \frac{\pi M^0}{cb_1} \sin \varphi_2(\Omega) - \right. \\ \left. - f_3(\Omega) \sec^2 \frac{\pi M^0}{2cb_1} \sin \frac{3\pi M^0}{cb_1} \cos \varphi_3(\Omega) \right],$$

$$f_5(M^0) = \frac{a_1 a_2}{b_1 - a_1} \operatorname{tg} \frac{\pi M^0}{2cb_1} \left[f_2(\Omega) \sin^2 \frac{\pi M^0}{2cb_1} \cos \varphi_2(\Omega) - \right. \\ \left. - f_3(\Omega) \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\pi M^0}{2cb_1} \right)^2 \sin \varphi_3(\Omega) \right].$$

Итак, формула уточненного решения (8.181) дает искомую зависимость частоты автоколебаний Ω_1 не только от параметров системы, но и от величины внешнего постоянного воздействия M^0 (рис. 8.21), в отличие от формулы (8.175) для первого приближения Ω , что является весьма важным результатом для практики.

Из уравнения (8.182) с учетом (8.169) и (8.180) определяется уточненное значение амплитуды первой гармоники автоколебаний A_1 (рис. 8.22). Форма автоколебаний определяется выражением

$$x = x^0 + A_1 [\sin \Omega_1 t + \delta_2 \sin (2\Omega_1 t + \varphi_2) + \delta_3 \sin (3\Omega_1 t + \varphi_3)],$$

где все величины определены выше.

Для простоты и наглядности в данном примере была взята идеальная релейная характеристика. Однако очевидно, что изложенный способ решения задачи применим и к произвольной нелинейности $F(x)$, удовлетворяющей только некоторым условиям относительно ее производных. Ограничения, накладываемые здесь на многочлены $Q(p)$ и $R(p)$, выполняются во многих реальных системах, особенно в системах автоматического управления движением механических объектов.

Г Л А В А IX

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 9.1. Симметричные одночастотные вынужденные колебания

Проблема определения вынужденных колебаний нелинейных систем вообще является весьма сложной и многообразной. Поскольку принцип наложения решений (суперпозиции) здесь несправедлив, то, вообще говоря, нельзя складывать частные решения от различных внешних воздействий, найденных по отдельности, а также складывать свободные и вынужденные колебания. Особое нелинейное сложение решений возможно в случае, если решения разделяются по степени медленности их протекания во времени (т. е. по значениям возможных частот колебаний), аналогично тому, как это делалось уже в главе V. При этом каждое из складываемых решений существенно зависело от другого, а именно амплитуда автоколебаний существенно зависела от величины смещения, характеризующей медленно протекающие процессы. Такого же рода разделение решений для вынужденных колебаний будет рассмотрено ниже в §§ 9.2 и 9.3, где появится возможность рассмотрения также и нелинейных двухчастотных колебаний с большой разностью частот.

Не касаясь сложных форм вынужденных колебаний нелинейных систем (хотя их исследование также имеет большое практическое значение), ограничимся в данном параграфе определением одночастотных вынужденных колебаний, когда колебания системы происходят с частотой внешнего периодического воздействия [270]. Форма колебаний, как и прежде, будет считаться близкой к синусоидальной для переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции. При этом останутся прежними все ограничения, определяющие классы рассматриваемых систем, указанные в главе II. К ним здесь добавятся во многих случаях еще ограничения, накладываемые на амплитуду и частоту внешнего периодического воздействия (зависящие также и от параметров системы), обуславливающие существование одночастотных вынужденных колебаний в нелинейной системе. Будем их кратко на-

зывать *условиями захватывания* (придавая этому термину не специальное, а общее значение в указанном широком смысле). Особое значение эти условия приобретают для автоколебательных систем при частотах, близких к частоте автоколебаний и выше.

В данном параграфе внешнее периодическое воздействие предполагается синусоидальным. Ниже, в § 9.4 будет рассмотрено также несинусоидальное периодическое внешнее воздействие.

Итак, пусть имеется некоторая нелинейная автоматическая система, в любом месте которой приложено внешнее синусоидальное воздействие

$$f(t) = B \sin \Omega_b t. \quad (9.1)$$

Рассмотрим сначала систему первого класса (см. §§ 1.2 и 2.3) основного типа, для которого уравнения динамики приводятся к единому виду (2.71):

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t). \quad (9.2)$$

Выполнение условий для $Q(p)$, $R(p)$ и $F(x, px)$, указанных в начале § 2.3, а также выводимых ниже условий захватывания (где это необходимо), позволяет в первом приближении искать решение для установившихся вынужденных колебаний системы в синусоидальной форме

$$x = A_b \sin (\Omega_b t + \varphi), \quad (9.3)$$

где искомыми неизвестными постоянными будут амплитуда A_b и сдвиг фазы φ , в то время как частота Ω_b здесь уже задана выражением (9.1). В отличие от такой типичной постановки задачи можно будет, конечно, в дальнейшем решать и обратную задачу определения потребной частоты Ω_b или амплитуды B внешнего воздействия по заданной амплитуде вынужденных колебаний A_b и т. п. Но пока при выводе общих формул для определения вынужденных колебаний будем здесь, в отличие от задачи отыскания автоколебаний (§ 2.3), считать неизвестными A_b и φ при заданной частоте Ω_b .

Чтобы иметь возможность применить тот же общий подход к решению задачи, который был принят при отыскании автоколебаний, выразим в уравнении (9.2) переменную f через x . Согласно (9.1)

$$\begin{aligned} f(t) &= B \sin [(\Omega_b t + \varphi) - \varphi] = \\ &= B \cos \varphi \sin (\Omega_b t + \varphi) - B \sin \varphi \cos (\Omega_b t + \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (9.3) для x и его производную

$$px = A_b \Omega_b \cos (\Omega_b t + \varphi),$$

окончательно получаем:

$$f(t) = \frac{B}{A_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_b} p \right) x. \quad (9.4)$$

Подставив это выражение в заданное дифференциальное уравнение системы (9.2), получим:

$$\left[Q(p) - S(p) \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] x + R(p) F(x, px) = 0. \quad (9.5)$$

Таким образом, неоднородное нелинейное уравнение (9.2) при заданном внешнем воздействии (9.1) и предполагаемой форме решения (9.3) сведено к однородному нелинейному уравнению (9.5), содержащему добавочный член в левой части. Уравнение (9.5) аналогично прежнему уравнению (2.71) и отличается от него только заменой операторного многочлена $Q(p)$ на новый операторный многочлен, стоящий в (9.5) в квадратных скобках. Применяя здесь при отыскании синусоидального периодического решения формально тот же метод, что и в главе II, нужно выполнить все указанные в § 2.3 условия, заменив в выражениях для них Q на квадратную скобку, стоящую в (9.5). Следовательно, многочлен

$$Q(p) - S(p) \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \quad (9.6)$$

не должен иметь чисто мнимых корней и корней с положительной вещественной частью; перед началом решения задачи это условие проверяется для самого многочлена $Q(p)$, а после того как решение найдено, — и для многочлена (9.6). Согласно (2.72) должно соблюдаться также обобщенное свойство фильтра:

$$\left| \frac{R(jk\Omega_B) A_B}{Q(jk\Omega_B) A_B - S(jk\Omega_B) B} \right| \ll \left| \frac{R(j\Omega_B) A_B}{Q(j\Omega_B) A_B - S(j\Omega_B) B} \right|, \quad (9.7)$$

которое до начала решения задачи также проверяется в прежнем виде (2.72), а после решения — в виде (9.7).

Заданная нелинейность $F(x, px)$ должна допускать симметричные колебания, т. е. должно выполняться условие (2.74):

$$\int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) d\psi = 0. \quad (9.8)$$

Итак, получив для определения вынужденных колебаний однородное уравнение (9.5), можно, как и в § 2.3, произвести гармоническую линеаризацию нелинейности в виде

$$F(x, px) = qx + \frac{q'}{\Omega_B} px, \quad (9.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

причем, согласно (9.3), в отличие от § 2.3, здесь

$$\psi = \Omega_b t + \varphi, \quad (9.11)$$

что, однако, не влияет на результат вычисления q и q' . Поэтому при определении симметричных однозначных вынужденных колебаний можно целиком пользоваться готовыми выражениями для q и q' , приведенными в главе III, с заменой в них только A , Ω на A_b , Ω_b . Таким образом, для каждой нелинейности в общем случае получаются зависимости

$$q(A_b, \Omega_b), \quad q'(A_b, \Omega_b),$$

а во многих частных случаях (см. главу III)

$$q(A_b), \quad q'(A_b).$$

В результате из (9.5) и (9.9) получаем характеристическое уравнение для первого приближения:

$$Q(p) - S(p) \frac{B}{A_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_b} p \right) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega_b} p \right) = 0. \quad (9.12)$$

Подставляя сюда чисто мнимое значение $p = j\Omega_b$, что соответствует отысканию синусоидального решения (9.3), получаем:

$$Q(j\Omega_b) - S(j\Omega_b) \frac{B}{A_b} (\cos \varphi - j \sin \varphi) + R(j\Omega_b) (q + jq') = 0. \quad (9.13)$$

Замечая, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

из уравнения (9.13) находим:

$$A_b \frac{Q(j\Omega_b) + R(j\Omega_b)(q + jq')}{S(j\Omega_b)} = B e^{-j\varphi}. \quad (9.14)$$

Возможны два метода дальнейшего решения задачи. Эти методы остаются справедливыми и для нелинейных систем с временным запаздыванием τ , когда выражение (9.14) принимает вид

$$A_b \frac{Q(j\Omega_b) + R(j\Omega_b)(q + jq') e^{-j\tau\Omega_b}}{S(j\Omega_b)} = B e^{-j\varphi} \quad (9.15)$$

или другой аналогичный вид, содержащий τ .

Графический метод. Для каждого заданного значения частоты при заданных параметрах системы на комплексной плоскости строится кривая (рис. 9.1):

$$Z(A_b) = A_b \frac{Q(j\Omega_b) + R(j\Omega_b)(q + jq')}{S(j\Omega_b)}. \quad (9.16)$$

Эта кривая соответствует левой части равенства (9.14)¹⁾. Правая же часть (9.14) или (9.15) изобразится в виде окружности радиуса B . Пересечение ее с кривой $Z(A_B)$ дает решение задачи, причем в точке пересечения по дуге окружности определяется фазовый сдвиг φ , а по кривой $Z(A_B)$ — величина амплитуды A_B вынужденных колебаний.

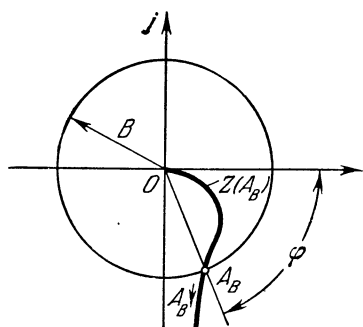


Рис. 9.1.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний A_B от частоты Ω_B (рис. 9.2, б) можно получить, если на рис. 9.1 начертить серию кривых $Z(A_B)$ при разных постоянных значениях Ω_B (рис. 9.2, а). Таким же путем, строя кривые $Z(A_B)$ при разных постоянных значениях какого-нибудь параметра k (рис. 9.2, а), можно определить зависимость A_B от любого параметра системы k (рис. 9.2, в), входящего в выражение (9.16) для $Z(A_B)$.

Для отыскания зависимости A_B от амплитуды внешнего воздействия B нужно нанести серию concentric окружностей радиусов B (рис. 9.3, а). При этом возможны два случая: первый, когда имеется точка пересечения окружности с кривой $Z(A_B)$ при любой величине радиуса B , начиная от нуля, что дает зависимость

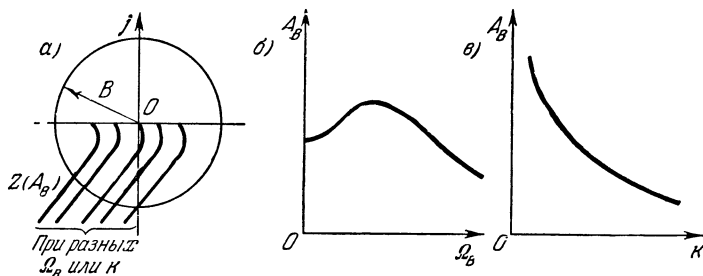


Рис. 9.2.

$A_B(B)$, например, в виде рис. 9.3, б; второй, когда точка пересечения окружности с кривой $Z(A_B)$ существует только при значениях радиуса B , превышающего некоторое пороговое значение $B_{\text{пор}}$ (рис. 9.3, а), что приводит к зависимости $A_B(B)$ типа рис. 9.3, в.

Графическое определение $B_{\text{пор}}$ ясно из чертежа. Можно построить зависимость пороговой амплитуды $B_{\text{пор}}$ внешнего воздействия от частоты Ω_B при заданных параметрах системы (рис. 9.3, г) или от

¹⁾ Аналогично и для выражения (9.15).

любого параметра k при данной частоте $\Omega_{\text{в}}$ (рис. 9.3, δ). Последнюю зависимость можно найти с помощью рис. 9.3, a , построенного для серии кривых $Z(A)_{\text{в}}$, соответствующих различным k .

Рассмотренный второй случай, когда система переходит на одночастотные колебания с частотой $\Omega_{\text{в}}$ только при $B > B_{\text{пор}}$, наблюдается чаще всего в таких нелинейных системах, которые до приложения внешнего периодического воздействия работают в автоколебательном режиме. При этом величина $B_{\text{пор}}$ обращается в нуль в том

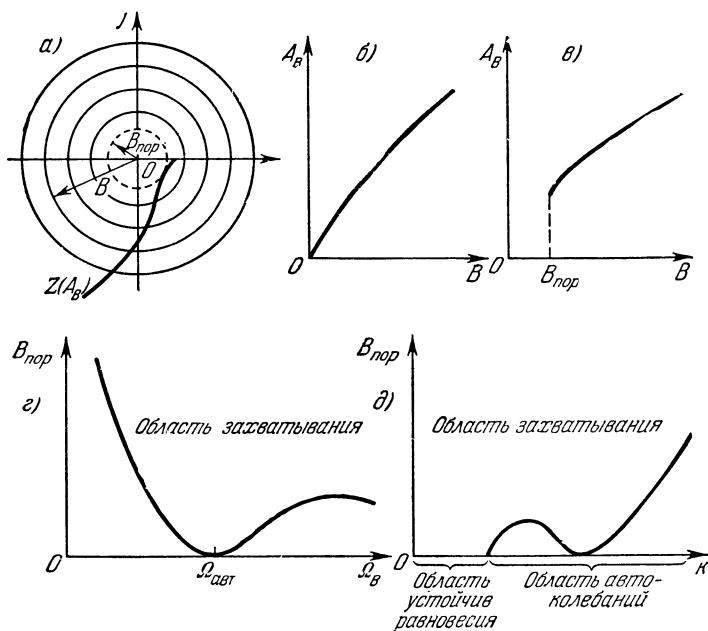


Рис. 9.3.

случае, когда частота $\Omega_{\text{в}}$ совпадает с частотой автоколебаний $\Omega_{\text{авт}}$ данной системы (рис. 9.3, $г$). $B_{\text{пор}}$ равно нулю обычно также в области отсутствия автоколебаний (области устойчивости равновесия системы, рис. 9.3, $б$).

Тогда выше кривых на рис. 9.3, $г$, $д$ будут лежать значения амплитуды B внешнего воздействия, при которых существует одночастотный режим вынужденных колебаний с частотой $\Omega_{\text{в}}$ (область захватывания), а при значениях B , лежащих ниже кривой, будет иметь место более сложное вынужденное движение системы. Это и является определением (пока графическим) условий захватывания, о котором говорилось выше.

В других нелинейных системах может быть $B_{\text{пор}} = 0$, как в случае на рис. 9.3, $б$.

Аналитический метод. Из равенства (9.14) или (9.15) можно получить аналитические выражения для определения амплитуды A_B и сдвига фазы φ одночастотных вынужденных колебаний нелинейной системы. Для этого выделим вещественные и мнимые части числителя и знаменателя и запишем равенства для модулей и аргументов обеих частей уравнения (9.14) или (9.15). В результате получим:

$$A_B^2 \frac{X^2(A_B, \Omega_B) + Y^2(A_B, \Omega_B)}{X_s^2(\Omega_B) + Y_s^2(\Omega_B)} = B^2, \quad (9.17)$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{Y(A_B, \Omega_B)}{X(A_B, \Omega_B)} + \operatorname{arctg} \frac{Y_s(\Omega_B)}{X_s(\Omega_B)}, \quad (9.18)$$

где X и Y — вещественная и мнимая части числителя выражения (9.14) или (9.15), X_s и Y_s — вещественная и мнимая части знаменателя, т. е. $S(j\Omega_B)$. При этом X и Y соответствуют левой части заданного нелинейного уравнения (9.2), т. е. являются теми же самыми выражениями X и Y , которые применялись при исследовании автоколебаний (§ 2.3), а X_s и Y_s являются новыми выражениями, соответствующими правой части заданного нелинейного уравнения (9.2).

Как видим, выражение (9.17) может, вообще говоря, оказаться довольно сложным алгебраическим уравнением относительно A_B . Однако важно то, что это уравнение содержит лишь одну неизвестную A_B , которая, следовательно, так или иначе может быть определена. После этого фазовый сдвиг φ легко вычисляется по формуле (9.18). Напомним, что и при отыскании автоколебаний (глава IV) часто получалось сложное относительно A уравнение, но это не вызывало больших затруднений. Действительно, в большинстве случаев интересуются тем, как будет изменяться амплитуда вынужденных колебаний A_B в зависимости от частоты и амплитуды внешнего воздействия, а также при изменении того или иного параметра системы. Указанные величины могут входить в уравнение (9.17) более простым образом, чем амплитуда A_B . Тогда уравнение (9.17) можно будет разрешить в явном виде относительно любой из этих величин, а затем, задаваясь разными значениями A_B и вычисляя по найденной формуле величину, от которой A_B зависит, можно построить искомые зависимости $A_B(B)$, $A_B(\Omega_B)$ или $A_B(k)$ и т. п.; затем по формуле (9.18) можно также вычислить для каждого случая фазовый сдвиг φ .

Например, возможен следующий простой прием решения уравнения (9.17). Для каждой заданной частоты внешнего воздействия Ω_B будем задаваться разными значениями A_B и вычислять каждый раз величину B . По результатам этих вычислений легко строится график (рис. 9.4), который и представляет собой искомое решение уравнения (9.17).

Что касается аналитического определения условия захватывания, т. е. величины $B_{\text{пор}}$ в зависимости от частоты Ω_B и от параметров системы, то оно определяется как условие существования веществен-

ного положительного решения для A_B в уравнении (9.17). Пример аналитического определения условия захватывания был дан для простейшего случая в § 1.9 (формула (1.181)). В других задачах это условие автоматически выявится при построении графика типа рис. 9.4.

Итак, получены амплитуда A_B и сдвиг фазы φ вынужденных колебаний для переменной x , стоящей под знаком нелинейной функции. После этого можно подсчитать амплитуду и фазу первой гармоники вынужденных колебаний для любой другой переменной исследуемой системы на основании соответствующих уравнений или передаточных функций звеньев, связывающих эту переменную с переменной x .

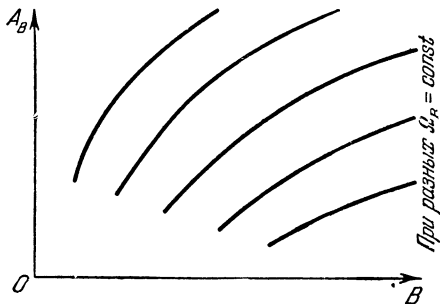


Рис. 9.4.

Аналогично можно рассмотреть и более сложные нелинейные системы всех других классов, описанных в § 1.2.

Иногда необходимо бывает исследовать устойчивость одночастотных вынужденных колебаний, особенно если получаются два решения. Так же как и в § 2.4, обратимся здесь сначала к классическому пути исследования устойчивости — сравнению линеаризованного дифференциального уравнения в малых отклонениях от исследуемого решения (9.3). Введем малое отклонение от исследуемого периодического решения, т. е. переменную

$$\Delta x = x - x^*, \text{ где } x^* = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi).$$

Подставляя это в исходное нелинейное уравнение данной системы (9.2) и разлагая $F(x, px)$ в ряд Тейлора, получим:

$$Q(p)(x^* + \Delta x) + R(p)\left[F(x^*, px^*) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^* \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial px}\right)^* p\Delta x + \dots\right] = S(p)f(t), \quad (9.19)$$

где звездочка означает подстановку $x = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi)$. Но поскольку решение x^* удовлетворяет уравнению (9.2), то

$$Q(p)x^* + R(p)F(x^*, px^*) = S(p)f(t).$$

Вычитая это выражение из (9.19) и отбрасывая малые высшего порядка (обозначенные многоточием), придем окончательно к линейному уравнению в малых отклонениях:

$$Q(p)\Delta x + R(p)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^* \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial px}\right)^* p\Delta x\right] = 0. \quad (9.20)$$

Поскольку исследование этого линейного уравнения с периодическими коэффициентами в подавляющем большинстве случаев затруднительно, можно прибегнуть, как и в § 2.4, к способу осреднения периодических коэффициентов, заменив (9.20) на уравнение с постоянными коэффициентами:

$$[Q(p) + R(p)(\kappa + \kappa'p)] \Delta x = 0, \quad (9.21)$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* d\psi, \quad \kappa' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial px} \right)^* d\psi, \quad \psi = \Omega_B t + \varphi.$$

Затем к уравнению (9.21) можно применить любой из обычных линейных критериев устойчивости (Гурвица, Михайлова, Найквиста). Нужно сказать, что пока еще нет строгого решения вопроса о том, для какого класса систем такой способ осреднения периодических коэффициентов дает правильный ответ. Однако можно ожидать, как и в случае § 2.4, что для рассматриваемых автоматических систем это имеет место.

Так, для примера, рассмотренного в § 1.9, величина осредненного коэффициента κ будет иметь вид, аналогичный (2.113), т. е.

$$\kappa = \frac{2c}{\pi A_B},$$

и, согласно характеристическому уравнению (2.114), условие устойчивости вынужденных колебаний будет

$$\pi A_B (T_1 + T_2) + 2c T_1 k_2 (T_1 k_{0.c} - T_2 k_1) > 0,$$

где A_B — амплитуда вынужденных колебаний, зависящая от B и Ω_B и от параметров системы.

Другие приближенные способы исследования устойчивости вынужденных колебаний нелинейных систем можно найти в работах [274] и [301]. Относительно вынужденных колебаний релейных систем см. [272] и [279].

Следует отметить, что в большинстве практических задач не требуется прибегать к исследованию устойчивости найденных вынужденных колебаний системы.

§ 9.2. Несимметричные вынужденные колебания.

Определение функции смещения

Вынужденные колебания будут несимметричными в следующих случаях:

- 1) при несимметричных нелинейных характеристиках системы;
- 2) при наличии постоянного или медленно меняющегося внешнего воздействия (в статических системах);

3) при наличии постоянной или медленно меняющейся скорости изменения внешнего воздействия (в астатических системах).

Все связанные с этим общие соображения, а также понятие о медленно меняющихся воздействиях остаются теми же самыми, что и в главе V (§ 5.1), только речь будет здесь идти не об автоколебаниях, а о вынужденных колебаниях, накладывающихся на постоянную или медленно меняющуюся во времени составляющую (смещение центра вынужденных колебаний) [293].

В общем случае будем полагать, что к нелинейной системе приложены два внешних воздействия, вследствие чего ее уравнение вместо (9.2) имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S_1(p)f_1(t) + S_2(p)f_2(t), \quad (9.22)$$

причем $f_1(t)$ — медленно меняющееся внешнее воздействие, а $f_2(t)$ — периодическое внешнее воздействие:

$$f_2(t) = B \sin \Omega_b t \quad (9.23)$$

Медленно меняющееся воздействие $f_1(t)$ считается мало изменяющимся за период $T_b = \frac{2\pi}{\Omega_b}$, т. е. предполагается, что возможные частоты изменения $f_1(t)$ значительно ниже частоты Ω_b .

Решение уравнения (9.22) будем искать в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = A_b \sin(\Omega_b t + \varphi), \quad (9.24)$$

где $x^0(t)$ медленно меняющаяся составляющая, а x^* — колебательная составляющая, амплитуда A_b и фаза φ которой в общем случае тоже медленно изменяются во времени.

Тогда гармоническая линеаризация нелинейности $F(x, px)$ может производиться по формуле, аналогичной (5.3):

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\Omega_b} px^*, \quad (9.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) d\psi, \\ q &= \frac{1}{\pi A_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

причем $\psi = \Omega_b t + \varphi$. Из сравнения этих формул с (5.4) видно, что при отыскании вынужденных колебаний можно целиком пользоваться

всеми конкретными выражениями для F^0 , q и q' , выведенными для разных нелинейностей в главе V (§§ 5.6 — 5.9). Таким образом, для каждой конкретной нелинейности имеются готовые выражения:

$$F^0(x^0, A_B, \Omega_B), \quad q(x^0, A_B, \Omega_B), \quad q'(x^0, A_B, \Omega_B), \quad (9.27)$$

причем часто величина Ω_B в них отсутствует. В качестве примера

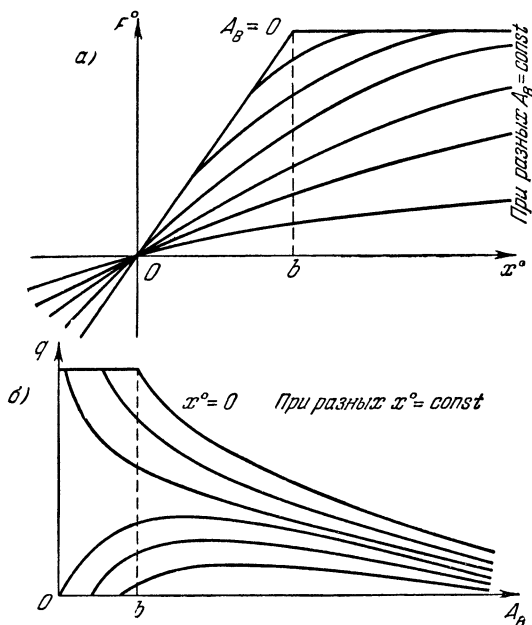


Рис. 9.5.

на рис. 9.5 приведены эти зависимости для нелинейности типа насыщения, построенные на основании формул (5.121) и (5.122).

По аналогии с формулой (9.4) запишем

$$f_2(t) = \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) x^*. \quad (9.28)$$

Подставив выражения для $F(x, px)$, $f_2(t)$ и x в заданное дифференциальное уравнение нелинейной системы (9.22), получим уравнение

$$\begin{aligned} Q(p)(x^0 + x^*) + R(p) \left(F^0 + qx^* + \frac{q'}{\Omega_B} px^* \right) = \\ = S_1(p)f_1(t) + S_2(p) \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) x^*, \end{aligned}$$

которое разбивается нелинейным образом (см. главу V) на два уравнения соответственно для медленно меняющихся и для колебательных составляющих:

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = S_1(p)f_1(t), \quad (9.29)$$

$$\left[Q(p) - S_2(p) \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] x^* + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega_B} p \right) x^* = 0. \quad (9.30)$$

Оба уравнения содержат все три неизвестные: A , φ и x^0 .

Второе из этих уравнений (9.30) совпадает с прежним уравнением (9.5), но только с иными коэффициентами гармонической линеаризации q и q' , зависящими от величины смещения x^0 . Поэтому уравнение (9.30) до конца решается только совместно с уравнением (9.29), хотя, как будет видно из дальнейшего, возможны и более простые случаи. Пока же можно, написав характеристическое уравнение вида (9.12), после подстановки $p = j\Omega_B$ привести уравнение (9.30) к следующему:

$$A_B \frac{Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)(q + jq')}{S_2(j\Omega_B)} = Be^{-j\varphi}, \quad (9.31)$$

в результате решения которого любым из двух методов (графическим или аналитическим), описанных в § 9.1, определяются зависимости амплитуды A_B и сдвига фазы φ от величины смещения x^0 , т. е.

$$A_B(x^0, \Omega_B, B), \quad \varphi(x^0, \Omega_B, B), \quad (9.32)$$

где x^0 остается пока еще неизвестным.

Для применения графического метода § 9.1 к отысканию зависимости $A_B(x^0)$ по уравнению (9.31) нужно на рис. 9.1 построить серию кривых $Z(A_B)$ для разных значений $x^0 = \text{const}$, которое, согласно (9.26), входит в выражения для q и q' . Уравнение аналитического метода (9.17) примет вид

$$A_B^2 = \frac{X_2^2(\Omega_B) + Y_2^2(\Omega_B)}{X^2(\Omega_B, A_B, x^0) + Y^2(\Omega_B, A_B, x^0)} B^2, \quad (9.33)$$

где X_2 , Y_2 и X , Y обозначают вещественные и мнимые части соответственно для выражения $S_2(j\Omega_B)$ и выражения

$$Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)[q(A_B, \Omega_B, x^0) + jq'(A_B, \Omega_B, x^0)].$$

Уравнение (9.33) не решается простыми вычислениями, как (9.17). Однако можно применить следующий графический прием его решения. Разбив (9.33) на два уравнения:

$$A_B^2 = \zeta,$$

$$\frac{X_2^2(\Omega_B) + Y_2^2(\Omega_B)}{X^2(\Omega_B, A_B, x^0) + Y^2(\Omega_B, A_B, x^0)} B^2 = \zeta,$$

построим по первому из них на плоскости (ζ, A_B) кривую 1 (рис. 9.6), а по второму — серию кривых 2 для разных значений $x^0 = \text{const}$ при заданных B и Ω_B . Переноса полученные точки пересечения кривых вправо на плоскость x^0, A_B , получаем сразу искомую зависимость $A_B(x^0)$ для заданного внешнего периодического воздействия, т. е. для заданной пары значений B и Ω_B . Эту зависимость легко получить таким же путем и для любых других заданных B и Ω_B .

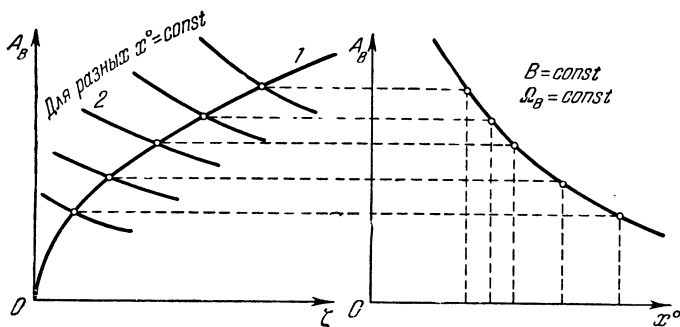


Рис. 9.6.

Подставив теперь значения амплитуды A_B в первое из выражений (9.27), найдем так называемую *функцию смещения* в виде

$$F^0 = \Phi(x^0, \Omega_B, B), \quad (9.34)$$

которая является характеристикой данного нелинейного звена системы по отношению к медленно меняющимся составляющим переменных F и x . Эти медленно меняющиеся составляющие определяются затем путем решения дифференциального уравнения (9.29), в которое надо подставить найденную функцию смещения (9.34).

Независимость очертания функции смещения $\Phi(x^0)$ от характера изменения и места приложения медленно меняющихся внешних воздействий здесь остается в силе, как было и при автоколебаниях (гл. V).

Однако принципиальным отличием функции смещения (9.34), определяющей прохождение медленно меняющихся сигналов через нелинейную систему при наличии вынужденных колебаний, от функции смещения (5.11) при автоколебаниях является существенная зависимость ее от частоты и амплитуды внешнего периодического воздействия (в то время как при автоколебаниях вид функции смещения зависел только от структуры и от соотношения параметров самой системы).

В результате для каждой заданной частоты вынужденных колебаний Ω_B получается серия кривых $F^0 = \Phi(x^0)$ для разных значений амплитуды B внешнего периодического воздействия $f_2(t)$, как показано, например, на рис. 9.7, а и б. При заданных Ω_B и B получается

вполне определенное очертание функции смещения $\Phi(x^0)$, зависящее только от структуры и параметров самой системы, входящих в уравнение (9.31).

Здесь, так же как и в главе V, возможен и *второй метод отыскания функции смещения*. При этом методе попутно определяются также статические и установившиеся ошибки. Метод состоит в следующем.

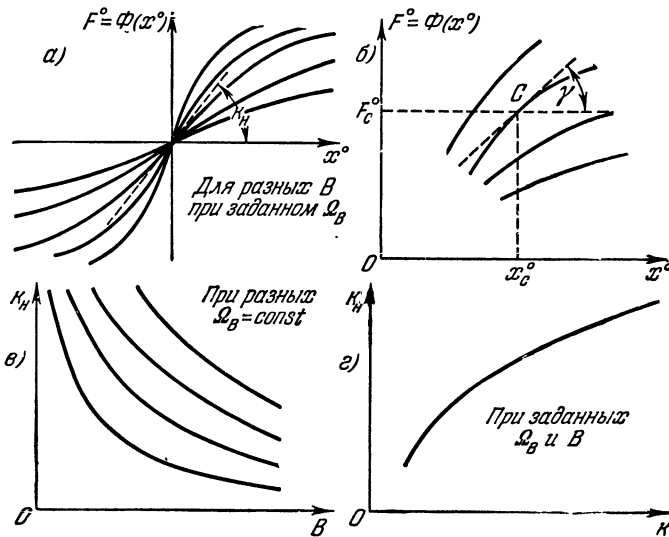


Рис. 9.7.

Поскольку функция смещения $F^0 = \Phi(x^0)$ не зависит от характера изменения и места приложения медленно меняющихся воздействий, то ее можно определять для простейшего случая $f_1 = \text{const} = f_1^0$ (или при астатической системе для $pf_1 = \text{const} = c_1^0$). Тогда уравнение (9.29) принимает вид

$$Q(0)x^0 + R(0)F^0 = M^0, \quad (9.35)$$

где $M^0 = S_1(0)f_1^0$ или для астатических систем $M^0 = \frac{dS_1}{dp}(0)c_1^0$. Используя первое выражение из (9.27), т. е. (при заданной частоте Ω_B)

$$F^0(x^0, A_B), \quad (9.36)$$

из уравнения (9.35) находим:

$$x^0(A_B, M^0). \quad (9.37)$$

Подставив это в выражения для q и q' , определяемые второй и третьей из формул (9.27), получим зависимости

$$q(A_B, M^0) \text{ и } q'(A_B, M^0).$$

Вводя их в уравнение (9.31), эквивалентное (9.30) и решая его любым из двух способов, указанных выше, при заданных B и Ω_v находим амплитуду вынужденных колебаний $A_v(M^0)$. Подставляя $A_v(M^0)$ в (9.36) и (9.37), получаем зависимости

$$F^0(x^0, M^0) \text{ и } x^0(M^0). \quad (9.38)$$

Эти зависимости представляют самостоятельный интерес, так как ими определяется *статическая ошибка* (а для астатической системы *установившаяся ошибка при постоянной скорости*) нелинейной системы по медленно меняющейся составляющей, на которую накладывается еще установившаяся периодическая ошибка вынужденных колебаний с амплитудой $A_v(M^0)$. Все эти ошибки определяются, как видим, в зависимости от величины постоянной правой части M^0 уравнения (9.35), т. е. от величины внешнего воздействия (постоянного и равного f_1^0 или меняющегося с постоянной скоростью c_1^0). Но, кроме того, что очень важно для нелинейных систем, величина статического отклонения $x^0(M^0)$ может существенно зависеть от амплитуды B и частоты Ω_v внешнего периодического воздействия, так как выражения (9.38) выводились с помощью уравнения (9.31), в которое входят B и Ω_v . В свою очередь, амплитуда вынужденных колебаний A_v зависит через M^0 от величины постоянного внешнего воздействия. Это яркий пример неприменимости принципа суперпозиции для нелинейных систем и в то же время иллюстрация достоинства развиваемого здесь метода, который позволяет это уловить, несмотря на приближенность решения задачи.

Далее, исключая из выражений (9.38) величину M^0 , находим *функцию смещения* $F^0 = \Phi(x^0)$ для заданных B и Ω_v (рис. 9.7, а).

Итак, наличие в нелинейной системе вынужденных колебаний с частотой внешнего периодического воздействия тоже приводит к эффекту *вибрационного сглаживания нелинейности* (рис. 9.7, а), как и при автоколебаниях (см. § 5.3). При этом, согласно (9.29), для медленно протекающих процессов в условиях вынужденных вибраций исходное дифференциальное уравнение системы (9.22) заменяется уравнением

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = S_1(p)f_1(t), \quad (9.39)$$

т. е. заданная нелинейность $F(x, px)$ заменяется функцией смещения $\Phi(x^0)$ и отбрасывается внешнее периодическое воздействие $f_2(t)$, по сравнению с которым $f_1(t)$ является медленно меняющимся.

Функция смещения $\Phi(x^0)$ обычно на определенном участке изменения величины x^0 изображается однозначной плавной кривой (рис. 9.7, а и б), в то время как заданная нелинейность $F(x, px)$ или $F(x)$ может быть скачкообразной (релейной), петлевой, с зоной нечувствительности и т. п. Эта сглаженная характеристика $\Phi(x^0)$ нелинейного звена по отношению к медленно меняющимся сигналам позволяет, следовательно, ликвидировать влияние вредных гистерезис-

ных петель, зоны нечувствительности, эффекта сухого трения и пр. (см. рис. 5.8). В некоторых же случаях вибрационное сглаживание может оказаться отрицательным явлением, как было в случае рис. 5.9, где получался эффект снижения коэффициента усиления. Кроме этих явлений, аналогичных вибрационному сглаживанию при автоколебаниях, здесь появляются и принципиально новые явления вследствие зависимости характеристики $\Phi(x^0)$ от B и $\Omega_{\text{в}}$, о которых будет сказано ниже.

Плавность функции смещения $\Phi(x^0)$ (рис. 9.7, *a* и *б*) позволяет произвести обычную линеаризацию, а именно для случая рис. 9.7, *a* на некотором участке вблизи начала координат можно принять

$$F^0 = k_{\text{н}} x^0, \quad (9.40)$$

где

$$k_{\text{н}} = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} \quad (9.41)$$

а для случая рис. 9.7, *б*

$$F^0 = F_C^0 + k_{\text{н}} (x^0 - x_C^0), \quad (9.42)$$

где x_C^0 — номинальное значение переменной x^0 , которое задается условиями конкретной задачи. При этом

$$k_{\text{н}} = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=x_C^0} \quad \text{или} \quad k_{\text{н}} = \operatorname{tg} \gamma,$$

а величина

$$F_C^0 = \Phi(x_C^0)$$

определяется предварительно по формуле (9.34) или по соответствующему графику функции смещения до ее линеаризации.

Тогда все медленно протекающие процессы в данной нелинейной системе можно будет рассчитывать не по уравнению (9.39), а по линейному уравнению

$$[Q(p) + k_{\text{н}} R(p)] x^0 = S_1(p) f(t) \quad (9.43)$$

для случая рис. 9.7, *a* или же по уравнению

$$[Q(p) + k_{\text{н}} R(p)] \Delta x^0 = S_1(p) \Delta f_1(t), \quad (9.44)$$

где

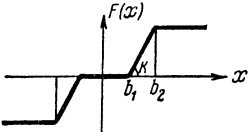
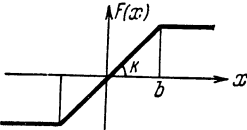
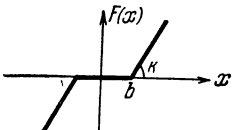
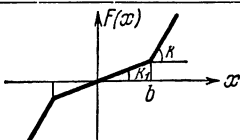
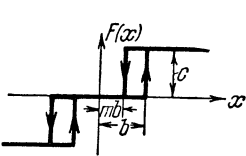
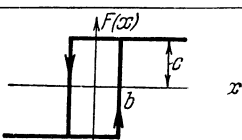
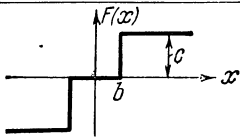
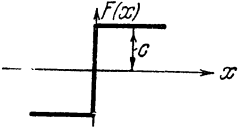
$$\Delta x^0 = x^0 - x_C^0, \quad \Delta f_1 = f_1 - f_{1C}^0,$$

для случая рис. 9.7, *б*, причем величины x_C^0 и f_{1C}^0 связаны соотношением

$$Q(0) x_C^0 + R(0) \Phi(x_C^0) = S_1(0) f_{1C}^0.$$

При этом очень существенно то, что коэффициент усиления $k_{\text{н}}$ (рис. 9.7, *a*) будет зависеть не только от структуры и от параметров самой системы, как было при автоколебаниях, но также и от амплитуды B и частоты $\Omega_{\text{в}}$ внешнего периодического воздействия,

Т а б л и ц а 9.1

№ п/п.	Форма нелинейности	Выражение $k_H(A_B)$
1		$k_H = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{A_B} - \arcsin \frac{b_1}{A_B} \right).$
2		$k_H = \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{A_B}$
3		$k_H = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{A_B}$
4		$k_H = k_2 - \frac{2(k_2 - k_1)}{\pi} \arcsin \frac{b}{A_B}$
5		$k_H = \frac{c}{\pi A_B} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A_B}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mb}{A_B}\right)^2}} \right]$
6		$k_H = \frac{2c}{\pi A_B} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{A_B^2}}}$
7		$k_H = \frac{2c}{\pi A} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{A_B^2}}}$
8		$k_H = \frac{2c}{\pi A_B}$

которые могут меняться в известных пределах независимо от самой системы. Поэтому, с одной стороны, вибрационное сглаживание нелинейных характеристик при помощи вынужденных колебаний обладает значительно большими практическими возможностями, чем при автоколебаниях, и довольно часто применяется в технике, особенно в релейных системах автоматического управления. В других же случаях, как будет показано ниже, вибрационное сглаживание может приводить к вредным последствиям, вплоть до потери устойчивости системы.

С точки зрения упрощения решения задачи важно иметь в виду, что для всех нечетно-симметричных нелинейностей $F(x)$, как однозначных, так и петлевых, вычисление коэффициента k_n при линеаризации функции смещения можно производить, как было показано в § 5.3, не по формуле (9.41), а по более простой формуле

$$k_n = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}, \quad (9.45)$$

т. е. непосредственно по первому из выражений (9.27), не определяя самой функции смещения $\Phi(x^0)$. Выражения $k_n(A_v)$, найденные по формуле (9.45), для некоторых нелинейностей приведены в таблице 9.1. Геометрически величина k_n будет крутизной кривой $F^0(x^0)$ в начале координат, например кривой $F^0(x^0)$ на рис. 9.5, а в начале координат. Чтобы взять при этом определенную кривую из изображенной на рис. 9.5, а серии кривых для различных A_v , нужно предварительно по заданным значениям амплитуды B и частоты Ω_v внешнего периодического воздействия найти величину амплитуды вынужденных колебаний A_v при $x^0=0$. Но эта задача уже была решена в § 9.1, причем результат решения представлен в виде графика рис. 9.4. Следовательно, теперь для подстановки в формулу (9.45) или для рис. 9.5, а нужно взять просто готовые значения A_v из рис. 9.4 для заданных B и Ω_v .

При этом легко могут быть построены зависимости величины k_n не только от B и Ω_v (рис. 9.7, в), но также и от любого параметра системы k (рис. 9.7, г), влияние которого желательно исследовать и от которого зависит амплитуда вынужденных колебаний A_v (рис. 9.2, в), фигурирующая на рис. 9.5, а.

Изложенный в данном параграфе метод можно распространить и на более сложные нелинейные системы других классов, указанные в § 1.2. Учет временного запаздывания τ также не вызывает затруднений.

§ 9.3. Зависимость устойчивости и качества нелинейных систем от внешних вибраций

После определения функции смещения $F^0 = \Phi(x^0)$ открывается возможность исследовать по уравнению (9.39) или по чисто линейным уравнениям (9.43) или (9.44) любые медленно меняющиеся процессы в системе при соответствующем медленном изменении $f_1(t)$ или других воздействий. При этом только надо иметь в виду, что вид

функции смещения $\Phi(x^0)$ и значение заменяющего ее коэффициента k_n в линейном уравнении могут существенно зависеть от амплитуды B и частоты Ω_v внешнего периодического воздействия, а также от структуры и параметров всей системы в целом. Ниже будет показано, что в ряде частных задач некоторые из этих сложных зависимостей можно не учитывать, что упрощает решение задачи.

Раньше в § 5.4 рассматривались устойчивость и качество нелинейной системы с точки зрения медленно меняющейся составляющей. То же самое имеет смысл рассмотреть и в данном случае. Это очень важный для практики вопрос, так как во многих системах автоматического управления именно медленно протекающие процессы составляют основу работы автоматической системы (полезный сигнал управления), а вынужденные вибрации представляют помеху (исключая случай специально создаваемого вибрационного сглаживания нелинейности, который ниже будет рассмотрен отдельно в виде простейшей частной задачи).

Устойчивость системы по медленно меняющейся составляющей можно рассматривать, согласно (9.39), путем исследования нелинейного уравнения

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = 0, \quad (9.46)$$

где $\Phi(x^0)$ — функция смещения, либо, согласно (9.43), путем исследования линейного уравнения

$$[Q(p) + k_n R(p)]x^0 = 0. \quad (9.47)$$

В обоих случаях на устойчивость системы существенно может влиять величина амплитуды B и частоты Ω_v внешнего периодического воздействия, так как от них, как уже известно, зависят вид функции смещения $\Phi(x^0)$ и величина коэффициента k_n . Это является совершенно новым и очень важным специфическим нелинейным фактором, с которым мы не встречались в предыдущих главах. В линейных системах такое явление вообще отсутствует.

В случае использования нелинейного уравнения (9.46) для медленно протекающих процессов граница устойчивости может, в частности, определяться методом § 2.7 как граница возникновения автоколебаний с повторной гармонической линеаризацией¹⁾. При использовании же линейного уравнения (9.47) можно применять обычные критерии устойчивости линейных систем (Гурвица, Михайлова, Найквиста) и обычные логарифмические частотные характеристики.

Следовательно, область устойчивости нелинейной системы может изменяться под действием помех, поступающих в виде прикладываемых извне синусоидальных вибраций, в зависимости от их амплитуды и частоты. Например, может оказаться, что область устойчивости системы по какому-либо параметру k (рис. 9.8, а) сужается, как показано на

¹⁾ Об этом см. подробнее в конце данного параграфа.

рис. 9.8, б, при увеличении амплитуды B внешних помех, имеющих вид вибраций заданной частоты Ω_B . Вследствие этого для каждого значения k при данной частоте внешних вибраций может иметься свое критическое значение их амплитуды B , при котором система становится неустойчивой. Аналогично, меняя частоту вибраций Ω_B , можно определить для заданного значения параметра k зависимость критической амплитуды внешних вибраций от частоты (рис. 9.8, в).

Важно при этом иметь в виду, что при изменении параметров системы меняются и коэффициент k_n , и очертание функции смещения $\Phi(x^0)$. Поэтому, строя области устойчивости системы по какому-нибудь параметру k (рис. 9.8), нужно соответственно все время менять

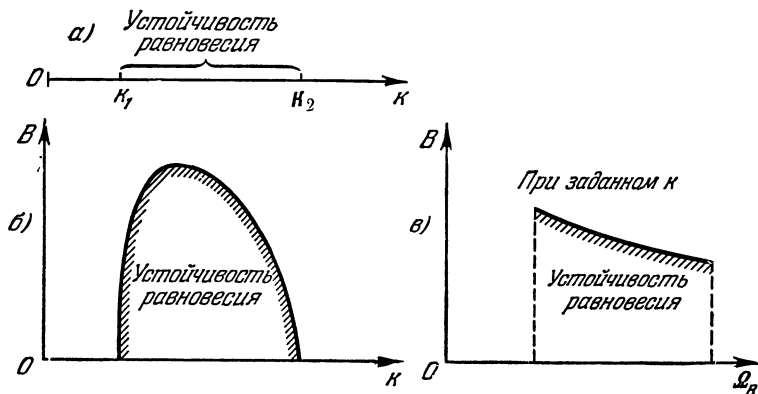


Рис. 9.8.

величину k_n в уравнении (9.47) или $\Phi(x^0)$ в (9.46), т. е. при построении области устойчивости нужно учитывать, что любой параметр системы k может входить не только в состав $R(p)$ и $Q(p)$, но также и в состав величины k_n . Зависимость же величины k_n от любого параметра системы нетрудно найти предварительно согласно § 9.2 (см. например, рис. 9.7, з).

Кроме исследования устойчивости нелинейной системы можно по уравнению (9.46) или (9.47), а также по уравнению (9.39) или (9.43) провести полный анализ всех динамических качеств нелинейной системы, подверженной внешним вибрациям (качество переходных процессов, статические и динамические ошибки), при любых медленно меняющихся по сравнению с вибрациями внешних воздействий $f_1(t)$. Если при этом используются линейные уравнения (9.47) и (9.43), то могут применяться любые методы линейной теории автоматического регулирования как для анализа, так и для синтеза системы. Только при исследовании влияния различных параметров на статические и динамические качества системы нужно всегда помнить, что любой параметр системы может входить не только в состав $Q(p)$ и $R(p)$, но также влиять и на величину k_n (см., например, рис. 9.7, з).

По указанным уравнениям могут определяться и вынужденные колебания системы на низких частотах, если медленно меняющееся воздействие $f_1(t)$ изменяется периодически, т. е. имеется возможность исследования двухчастотных вынужденных колебаний нелинейной системы при большой разнице частот. Можно и здесь (как в § 5.3) проводить разделение общего движения нелинейной системы не только на две, но и на три вида по степени медленности движения времени.

В результате всех перечисленных расчетов будет выявлена специфическая для нелинейных систем зависимость всех статических и динамических качеств и даже ее устойчивости от величины амплитуды B и частоты Ω_v внешнего периодического воздействия (вибраций), что в некоторых случаях на практике может оказаться решающим для качественной работы автоматической системы в целом.

Об исследовании нелинейных уравнений (9.46) и (9.39) методом гармонической линеаризации будет сказано в конце данного параграфа.

Изложенная в §§ 9.2 и 9.3 общая теория поведения нелинейных автоматических систем при наличии внешнего периодического воздействия (вибраций) [293] может значительно упрощаться в различных частных задачах. Приведем здесь видоизменение этой общей теории для следующих трех наиболее типичных частных задач:

- 1) приложение специального внешнего периодического воздействия с целью вибрационного сглаживания нелинейности (с последующей линеаризацией сглаженной характеристики при расчете системы в целом);
- 2) исследование работы нелинейной автоматической системы при высокочастотных внешних вибрационных помехах, когда не все звенья системы пропускают эти вибрации;
- 3) исследование уравнений нелинейной автоматической системы по медленно протекающим процессам при вибрациях с помощью повторной гармонической линеаризации.

Задача 1. Когда в любой автоматической системе прикладывается внешнее периодическое воздействие $f_2(t)$ (рис. 9.9) специально

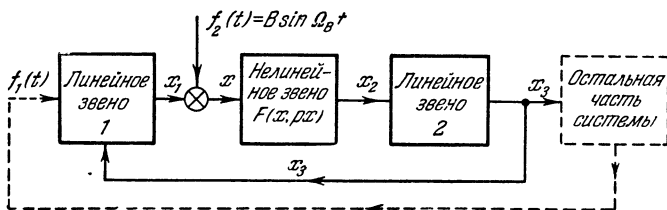


Рис. 9.9.

для того, чтобы произвести вибрационное сглаживание нелинейности, то обязательно ставится условие, чтобы на выходе амплитуда вынужденных колебаний x_3 была бы практически ничтожной. В результате этого переменные x_3 и x_1 (рис. 9.9) практически не будут содержать колебательной составляющей, а будут определяться через медленно

меняющееся воздействие $f_1(t)$ по уравнениям типа (9.39) или (9.43). Поэтому в переменную x на входе нелинейного звена будет включаться лишь одна колебательная составляющая $f_2(t)$ (рис. 9.9), т. е.

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = B \sin \Omega_b t. \quad (9.48)$$

Следовательно, в данной задаче (о вибрационной линеаризации нелинейности при помощи вынужденных колебаний) нет необходимости в решении уравнения (9.30) или (9.31) для определения колебательных составляющих, ибо, согласно (9.24) и (9.41), уже имеется готовое решение:

$$A_b = B, \quad \varphi = 0. \quad (9.49)$$

Поскольку внешнее периодическое воздействие $f_2(t)$ предполагается приложенным к системе непосредственно там же, где и переменная x (рис. 9.9), то в уравнении (9.22), составленном для исследуемой части системы (не включая пунктирной части на рис. 9.9), будет

$$S_2(p) = Q(p). \quad (9.50)$$

На основании (9.49) по первой из формул (9.26) находим:

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + B \sin \psi, B \Omega_b \cos \psi) d\psi,$$

что и дает искомую сглаженную характеристику. При этом можно воспользоваться для всех типовых нелинейностей готовыми формулами из §§ 5.6—5.9 и их графиками типа рис. 9.5, *a*, заменив везде A и A_b на величину B . Как видим, здесь совершенно отпадает описанное в § 9.2 особое определение функции смещения $\Phi(x^0)$.

В результате сглаженная характеристика $F^0(x^0)$ будет иметь крутизну, зависящую в общем случае от амплитуды B и частоты Ω_b внешних вибраций. Если же имеется нелинейность менее общего вида, а именно $F(x)$, то частота Ω_b не войдет в выражение для F^0 , как, например, в случае рис. 9.5, *a*. Однако все же и в этом случае нужно потребовать, чтобы частота содержалась в определенных пределах, позволяющих считать воздействие $f_1(t)$ по сравнению с $f_2(t)$ медленно меняющимся.

Определив таким образом сглаженную характеристику $F^0(x^0)$, можно затем по уравнению типа (9.29) или (9.43) с использованием линеаризации (9.45) исследовать любые медленно протекающие процессы в системе в целом обычными методами теории регулирования. Заметим, что линеаризация по формуле (9.45) в данной задаче справедлива для любых форм нелинейностей, так как здесь частная производная по x^0 совпадает с полной производной.

Что касается уравнения для колебательных составляющих (9.30) или, что то же самое, (9.31), то его нужно использовать в данной

задаче только для определения желательной величины частоты Ω_B внешнего периодического воздействия $f_2(t)$, обеспечивающей возможность получения решения (9.49) для вынужденных колебаний и выполнение сделанного выше предположения о малости вынужденных вибраций на выходе системы x_3 . С этой целью подставим равенства (9.49) и (9.50) в уравнение (9.31). Для удовлетворения последнего уравнения необходимо потребовать, чтобы модуль отношения

$$\left| \frac{R(j\Omega_B)}{Q(j\Omega_B)} \right|$$

был очень мал. Следовательно, частота внешнего периодического воздействия Ω_B должна лежать за пределами полосы пропускания частотной характеристики всей приведенной линейной части рассматриваемого участка системы.

Кроме того, чтобы амплитуда вынужденных вибраций на выходе системы x_3 была ничтожна, нужно взять частоту Ω_B также и за пределами полосы пропускания отдельного блока 2 исследуемой системы (рис. 9.9).

Задача 2. Пусть на какую-нибудь систему автоматического управления (рис. 9.10) воздействует внешняя вибрационная помеха

$$f_2(t) = B \sin \Omega_B t$$

и, кроме того, внешнее управляющее или возмущающее воздействие $f_1(t)$, которое по отношению к помехе является медленно меняющимся. Уравнения динамики системы приводятся к виду (9.22).

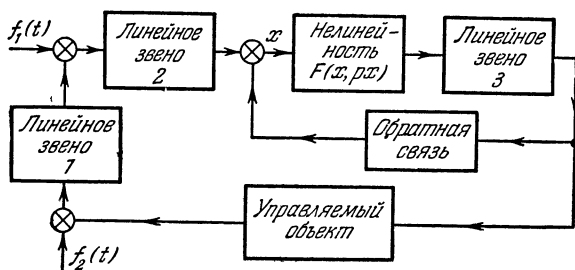


Рис. 9.10.

Решение уравнения (9.22) ищется в виде (9.24), где x^0 — полезный сигнал управления, а x^* — вибрационная помеха на входе нелинейного звена. Разбив уравнение (9.22) на два, а именно на (9.29) и (9.31), необходимо, согласно развитому выше общему методу, определить сначала с помощью (9.31) и (9.27) функцию смещения $F^0 = \Phi(x^0)$, после чего можно решать дифференциальное уравнение (9.29) относительно переменной $x^0(t)$ при заданной функции $f_1(t)$. Однако в данной задаче этот общий метод решения можно упростить. Рассмотрим два случая,

В том случае, когда вся приведенная линейная часть системы (рис. 9.10), определяемая передаточной функцией

$$W_{\lambda}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (9.51)$$

практически не пропускает вибраций с заданной частотой Ω_{ν} , уравнение (9.31) можно записать в виде

$$A_{\nu} = \frac{S_2(j\Omega_{\nu})}{Q(j\Omega_{\nu})} B e^{-j\varphi}.$$

Тогда амплитуда вибраций на входе нелинейного звена будет определяться формулой

$$A_{\nu}^2 = \frac{X_2^2(\Omega_{\nu}) + Y_2^2(\Omega_{\nu})}{X_Q^2(\Omega_{\nu}) + Y_Q^2(\Omega_{\nu})} B^2, \quad (9.52)$$

где через $X_2(\Omega_{\nu})$, $Y_2(\Omega_{\nu})$ и $X_Q(\Omega_{\nu})$, $Y_Q(\Omega_{\nu})$ обозначены вещественные и мнимые части соответственно для выражений $S_2(j\Omega_{\nu})$ и $Q(j\Omega_{\nu})$.

Формула (9.52) дает линейную зависимость $A_{\nu} = (B)$ с разными коэффициентами пропорциональности для разных частот вибраций Ω_{ν} (рис. 9.11, а). В частности, для схемы рис. 9.10 это будет определяться структурой линейных блоков 1 и 2.

По сравнению с общей теорией здесь существенно то, что амплитуда вибраций A_{ν} на входе нелинейного звена в этом случае не зависит от величины полезного сигнала x^0 . Поэтому здесь, как и в задаче 1, отпадает необходимость отыскания функции смещения $\Phi(x^0)$ и характеристика нелинейного звена по полезному сигналу $F^0(x^0)$ будет определяться непосредственно первой формулой (9.27), представленной графически, например, на рис. 9.5, а. Однако здесь нужно подставить в выражение F^0 или взять на графике рис. 9.5, а значение A_{ν} , определяемое по формуле (9.52) или графиком рис. 9.11, а. Поэтому, в отличие от задачи 1, здесь даже для простейших

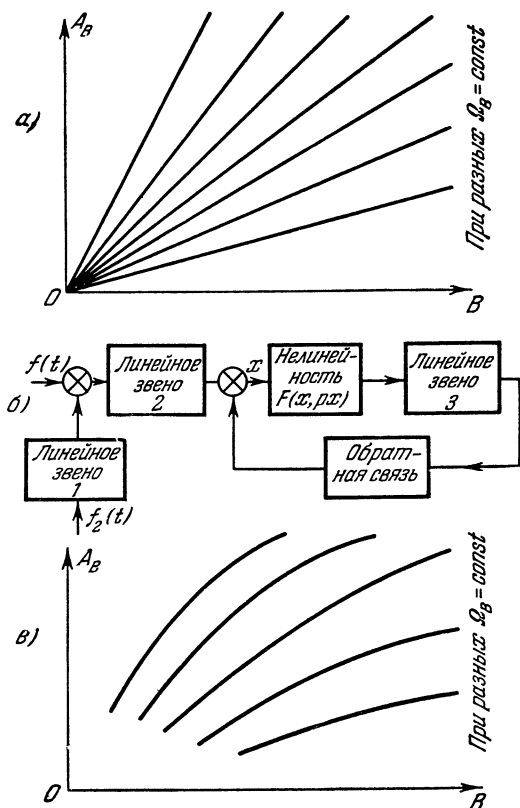


Рис. 9.11.

нелинейностей очертание характеристики нелинейного звена по полезному сигналу $F^0(x^0)$ и ее крутизна

$$k_n = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}$$

будут зависеть не только от амплитуды B , но и от частоты Ω_b вибрационных помех, а также, конечно, и от параметров линейных блоков 1 и 2 (рис. 9.10), входящих в использованную формулу (9.52).

Рассмотрим далее *другой случай*, когда первая гармоника вибраций с заданной частотой Ω_b пропускается линейной частью системы с передаточной функцией (9.51), но все же не пропускается каким-либо одним блоком системы. Пусть, например, в схеме рис. 9.10 вибрации не пропускаются вовсе только управляемым объектом, а по внутренней обратной связи первая гармоника вибраций с частотой Ω_b проходит. Тогда, вообще говоря, уже нельзя не считаться с зависимостью (9.32) амплитуды вибраций A_b переменной x от величины полезного сигнала x^0 . Однако и в этом случае возможно упрощение решения задачи по сравнению с общей теорией, состоящее в том, что при определении функции смещения выбрасывается часть системы, не пропускающая вибраций (рис. 9.11, б).

В этом случае нужно записать уравнение динамики только оставшейся части системы (рис. 9.11, б).

$$Q_c(p)x + R_c(p)F(x, px) = S_{1c}f_1(t) + S_{2c}(p)f_2(t), \quad (9.53)$$

которое будет, конечно, проще общего уравнения (9.22). Отсюда по аналогии с (9.33) получим уравнение для определения амплитуды вибраций на входе нелинейного звена в виде

$$A_b^2 = \frac{X_{2c}^2(\Omega_b) + Y_{2c}^2(\Omega_b)}{X_c^2(A_b, \Omega_b, x^0) + Y_c^2(A_b, \Omega_b, x^0)} B^2,$$

где через X_{2c} , Y_{2c} и X_c , Y_c обозначены вещественные и мнимые части соответственно для $S_{2c}(j\Omega_b)$ и для выражения

$$Q_c(j\Omega_b) + R_c(j\Omega_b)[q(A_b, \Omega_b, x^0) + jq'(A_b, \Omega_b, x^0)].$$

Написанное уравнение позволяет определить зависимость амплитуды вибраций A_b от величины полезного сигнала x^0 на входе нелинейного звена для каждой заданной внешней вибрационной помехи (т. е. для заданных B , Ω_b) графическим приемом, описанным в § 9.2 (рис. 9.6).

Полученная зависимость $A_b(x^0)$ подставляется затем в первую из формул (9.27) для получения функции смещения $F^0 = \Phi(x^0)$, которая в данном случае и будет являться характеристикой нелинейного звена по полезному сигналу. Вид ее будет зависеть от заданных амплитуды B и частоты Ω_b внешних вибраций и от параметров системы, входящих в выделенную часть контура (рис. 9.11, б).

В *обоих рассмотренных случаях*, проведя линеаризацию $F^0 = k_n x^0$ характеристики нелинейного звена $F^0(x^0)$ или $F^0 = \Phi(x^0)$ по полезному сигналу, можно обычными методами теории автоматического регулирования, используя линейные уравнения (9.43), выявить зависимость всех статических и динамических качеств данной нелинейной системы автоматического управления (и ее устойчивости) от амплитуды B и частоты Ω_v вибрационных помех.

Линейная система выходила бы из строя при наличии помех тогда, когда полезный сигнал практически перестал бы различаться на фоне помех. Но пока он нормально различается, все статические и динамические свойства системы по полезному сигналу, если система линейна, остаются неизменными. Вибрационная помеха при этом накладывается как дополнительная ошибка. Совсем иначе дело обстоит в нелинейной системе. Коэффициент усиления k_n полезного сигнала в нелинейном звене, а вместе с ним и все качества и даже устойчивость системы могут настолько существенно зависеть от помехи (от B и Ω_v), что система может выйти из строя по этой причине раньше, чем перестанет различаться полезный сигнал на уровне помех. Это очень важно учитывать на практике (см. пример 2 в § 9.6).

С точки зрения упрощения решения задачи нужно всегда иметь в виду упрощенную формулу линеаризации (9.45), которая позволяет и во втором из рассмотренных случаев обходиться без определения функции смещения. В этом случае нужно подставить в (9.45) значение амплитуды вибраций на входе нелинейного звена A_v , найденное при отсутствии полезного сигнала ($x^0 = 0$) любым из двух методов, изложенных в § 9.1, но для более простого уравнения системы (9.53). Зависимость $A_v(B)$ будет при этом, в отличие от первого случая (рис. 9.11, а), криволинейной (рис. 9.11, в).

Задача 3. В тех случаях, когда почему-либо обычная линеаризация $F^0 = k_n x^0$ характеристики нелинейного звена по полезному сигналу нежелательна (например, вследствие ее существенной нелинейности на рассматриваемом участке), необходимо исследовать нелинейное уравнение (9.39). Для этого можно применить любые нелинейные методы теории автоматического регулирования, в том числе и развиваемый в данной книге приближенный метод гармонической линеаризации. Последним методом здесь могут быть решены для уравнения (9.39) все задачи, рассмотренные в главах II—VII и § 9.1.

Поскольку уравнение (9.39) получилось в результате гармонической линеаризации (9.25) исходного уравнения системы (9.22), то теперь речь идет о *повторной гармонической линеаризации* нового нелинейного уравнения (9.39). Разница между ними заключается в том, что первая гармоническая линеаризация уравнения (9.22) проводилась для высоких частот вибрационной помехи Ω_v . Вторая гармоническая линеаризация уравнения (9.39) проводится для низких частот Ω^0 колебаний полезного сигнала x^0 .

Для возможности применения такой повторной гармонической линеаризации, согласно главе II, вся приведенная линейная часть системы, описываемая передаточной функцией (9.51), не должна пропускать высших гармоник колебаний полезного сигнала, а значит, и вибрационные помехи. Следовательно, здесь будет идти речь о первом случае задачи 2, когда характеристика нелинейного звена по полезному сигналу определяется непосредственно первой формулой (9.27) или графиком типа рис. 9.5, *a*, где A_B для каждой заданной помехи вполне определенно и находится из рис. 9.11, *a*. Поэтому нелинейное дифференциальное уравнение автоматической системы для полезного сигнала при наличии вибрационных помех запишется здесь в виде

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0(x^0) = S_1(p)f_1(t). \quad (9.54)$$

Для исследования устойчивости системы и для отыскания автоколебаний по полезному сигналу при $f_1(t) = 0$, если новая нелинейность $F^0(x^0)$ симметрична, полагаем $x^0 = A^0 \sin \Omega^0 t$ и производим повторную гармоническую линеаризацию уравнения (9.54) в виде

$$[Q(p) + R(p)q^0(A^0)]x^0 = 0, \quad (9.55)$$

где

$$q^0 = \frac{4}{\pi A^0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F^0(A^0 \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad \psi = \Omega^0 t. \quad (9.56)$$

Функция $F^0(x^0)$ определяется описанным выше образом через исходную нелинейность $F(x, px)$. Поскольку в главе V уже имеются готовые выражения $F^0(x^0)$ для типовых нелинейностей, то, используя их, можно по формуле (9.56) составить готовые выражения и для $q^0(A^0)$.

Например, для идеальной релейной характеристики $F(x) = c \operatorname{sign} x$ имеем, согласно (5.101), следующее выражение для F^0 :

$$F^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A_B} \quad \text{при} \quad x^0 \leq A_B.$$

Отсюда по формуле (9.56)

$$q^0 = \frac{8c}{\pi^2 A^0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \left(\frac{A^0}{A_B} \sin \psi \right) \sin \psi d\psi \quad (A^0 \leq A_B).$$

В результате по аналогии с формулой (5.80) окончательно получим:

$$q^0 = \frac{8c}{\pi^2 A^0} \left[\left(\frac{A^0}{A_B} - \frac{A_B}{A^0} \right) K \left(\frac{A^0}{A_B} \right) + \frac{A_B}{A^0} E \left(\frac{A^0}{A_B} \right) \right] \quad (A^0 \leq A_B),$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, значения которых приводятся в математических таблицах. Сокращенная таблица их значений была приведена в конце § 5.3, где в данном случае надо брать

$$\alpha = \arcsin \frac{A^0}{A_b}.$$

Аналогично, можно получить аналитические выражения $q^0(A^0)$ для других типовых нелинейностей. В более сложных случаях можно использовать графический прием, описанный в § 3.8, применяя его к графику соответствующей функции $F^0(x^0)$, полученной по методу главы V (§§ 5.6 — 5.9).

По уравнению (9.55) можно исследовать устойчивость нелинейной системы по полезному сигналу методом, изложенным в § 2.7. Если потребуется, по этому же уравнению можно определить и автоколебания $x^0 = A^0 \sin \Omega^0 t$ системы по полезному сигналу с помощью любого из способов, данных в § 2.3, а также можно решить и все вопросы, изложенные в § 2.9. Следовательно, здесь также получается возможность исследования нелинейных двухчастотных колебаний с большой разницей частот, одна из которых Ω_b соответствует вынужденным вибрациям, а другая Ω^0 — автоколебаниям.

Используя тот же коэффициент $q^0(A^0)$ повторной гармонической линеаризации, можно по уравнению

$$[Q(p) + R(p)q^0(A^0)]x^0 = S_1(p)f_1(t),$$

вытекающему из (9.54), исследовать и нелинейные вынужденные колебания системы по медленно меняющемуся сигналу при $f_1(t) = B^0 \sin \Omega_b^0 t$ методом, изложенным в § 9.1. Это будут нелинейные двухчастотные вынужденные колебания с большой разностью частот Ω_b и Ω^0 .

В этом параграфе везде шла речь об уравнении (9.22) для нелинейной системы первого класса. Однако тот же метод решения описанных здесь задач можно распространить и на другие классы систем с несколькими нелинейностями, подобно тому как это делалось в главе II.

§ 9.4. Вычисление высших гармоник вынужденных колебаний

Вынужденные колебания в режиме захватывания (т. е. с частотой внешнего периодического воздействия) в первом приближении определялись в синусоидальной форме (9.3):

$$x = A_b \sin (\Omega_b t + \varphi). \quad (9.57)$$

Оставляя в силе все прежние условия, наложенные на систему в § 9.1, будем искать теперь вынужденные колебания с учетом

конечного числа высших гармоник в виде¹⁾

$$x = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k, \quad (9.58)$$

где x_1 — уточненная первая гармоника:

$$x_1 = A_1 \sin(\Omega_b t + \varphi_1), \quad (9.59)$$

причем через A_1 и φ_1 обозначены уточненные за счет учета высших гармоник значения амплитуды и сдвига фазы первой гармоники вынужденных колебаний. Через x_k в решении (9.58) обозначены высшие гармоники вынужденных колебаний, которые будем искать в форме

$$x_k = \delta_k A_b \sin(k\Omega_b t + \varphi_k) \quad (k = 2, 3, \dots, n), \quad (9.60)$$

где δ_k — относительная амплитуда k -й гармоники (отношение ее амплитуды к амплитуде первой гармоники A_b , вычисленной в первом приближении). Величина δ_k будет играть роль малого параметра.

Уравнение системы зададим по-прежнему в виде

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (9.61)$$

причем в связи с возможностью учета высших гармоник внешнее периодическое воздействие может быть задано несинусоидальное (треугольное, прямоугольное и т. п.), в разложенном в ряд Фурье виде

$$f(t) = B_1 \sin \Omega_b t + \sum_{k=2}^m B_k \sin(k\Omega_b t + \vartheta_k) \quad (m \leq n, B_k < B_1). \quad (9.62)$$

В разложении сохраняется такое число гармоник m , которое равно или меньше числа учитываемых в решении гармоник n . Предполагается также, что основную роль в составе функции (9.62) играет первая гармоника $B_1 \sin \Omega_b t$.

Как это делалось и при исследовании автоколебаний (§ 2.2), разложим нелинейную функцию $F(x, px)$ в ряд Тейлора с подстановкой (9.58), причем ввиду малости суммы высших гармоник $\sum x_k$ ограничимся первыми членами разложения:

$$\begin{aligned} F(x, px) = & F(x_1, px_1) + \frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \\ & + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k. \end{aligned} \quad (9.63)$$

¹⁾ Как и в § 8.6, здесь можно было бы произвести также и вычисление высших гармоник вынужденных колебаний в присутствии медленно меняющегося сигнала x^e .

Затем разложим это выражение в ряд Фурье. При отыскании уточненного решения для автоколебаний в § 8.1 было показано, что первую гармонику разложения в ряд Фурье следует брать от всего выражения (9.63), а высшие — только от первого члена $F(x_1, px_1)$ в его первом приближении, так как учет высших гармоник при вычислении самих высших гармоник соответствовал бы в решении членам более высокого порядка малости. Итак, результат разложения выражения (9.63) в ряд Фурье по аналогии с (8.15) представляется в виде

$$F(x, px) = \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\Omega_B} p \right) x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\delta_k} \left(q_k + \frac{q'_k}{k\Omega_B} p \right) x_k, \quad (9.64)$$

где при $x_1 = A_1 \sin \psi$, $\psi = \Omega_B t + \varphi_1$ будет

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_B \cos \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} F(A_1 \sin \psi, A_1 \Omega_B \cos \psi) \cos \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (9.65)$$

а, кроме того, при $x_1 = A_B \sin \psi$, $\psi = \Omega_B t + \varphi$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \sin \psi \, d\psi, \\ \Delta q' &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n px_k \right] \cos \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (9.66)$$

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \sin (k\psi - k\varphi + \varphi_k) \, d\psi, \\ q'_k &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \cos (k\psi - k\varphi + \varphi_k) \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (9.67)$$

Основные коэффициенты q и q' (9.65) имеют прежний вид (9.10). Поэтому здесь целиком можно пользоваться материалами главы III,

заменяя в приведенных там формулах A и Ω на A_1 и Ω_B . Новые добавки Δq и $\Delta q'$, вносящие уточнение первой гармоники x_1 за счет высших гармоник $\sum x_k$ искомого периодического решения, а также и коэффициенты q_k и q'_k для высших гармоник, можно преобразовать прежними приемами (см. § 8.1) к более удобному для вычислений виду.

Подставляя в (9.66) x_k из (9.60) и вводя туда величину $\psi = \Omega_B t + \varphi$, применим замену:

$$\begin{aligned}\sin(k\Omega_B t + \varphi_k) &= \sin(k\psi - k\varphi + \varphi_k) = \sin(k\psi + \psi_k) = \\ &= \cos \psi_k \sin k\psi + \sin \psi_k \cos k\psi, \\ \cos(k\Omega_B t + \varphi_k) &= \cos \psi_k \cos k\psi - \sin \psi_k \sin k\psi,\end{aligned}$$

где

$$\psi = \Omega_B t + \varphi, \quad \psi_k = \varphi_k - k\varphi. \quad (9.68)$$

С указанной заменой формулы (9.66) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned}\Delta q &= \sum_{k=2}^n [I_{k1} \delta_k \cos \psi_k + I_{k2} \delta_k \sin \psi_k], \\ \Delta q' &= \sum_{k=2}^n [I_{k3} \delta_k \cos \psi_k + I_{k4} \delta_k \sin \psi_k],\end{aligned} \right\} \quad (9.69)$$

где I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} и I_{k4} вычисляются по формулам (8.13) с заменой в них Ω на Ω_B .

Формулы же (9.67) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}q_k &= r_k \cos \psi_k + s_k \sin \psi_k, \\ q'_k &= s_k \cos \psi_k - r_k \sin \psi_k,\end{aligned} \right\} \quad (9.70)$$

где

$$\left. \begin{aligned}r_k &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \sin k\psi d\psi, \\ s_k &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \cos k\psi d\psi.\end{aligned} \right\} \quad (9.71)$$

Выразим теперь все гармоники внешнего периодического воздействия (9.62) через соответствующие гармоники искомого периодического решения (9.58). Согласно (9.60) имеем:

$$x_k = \delta_k A_B \sin(k\Omega_B t + \varphi_k), \quad p x_k = k \delta_k A_B \Omega_B \cos(k\Omega_B t + \varphi_k).$$

Каждую высшую гармонику внешнего воздействия (9.62) можно представить в виде

$$\begin{aligned} B_k \sin(k\Omega_B t + \vartheta_k) &= B_k \sin(k\Omega_B t + \varphi_k - \varphi_k + \vartheta_k) = \\ &= B_k \cos(\varphi_k - \vartheta_k) \sin(k\Omega_B t + \varphi_k) - B_k \sin(\varphi_k - \vartheta_k) \cos(k\Omega_B t + \varphi_k) = \\ &= \frac{B_k \cos(\varphi_k - \vartheta_k)}{\delta_k A_B} x_k - \frac{B_k \sin(\varphi_k - \vartheta_k)}{k\delta_k A_B \Omega_B} p x_k. \end{aligned}$$

В результате запишем внешнее периодическое воздействие (9.62) в следующей форме:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{B_1}{A_1} \left(\cos \varphi_1 - \frac{\sin \varphi_1}{\Omega_B} p \right) x_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{\delta_k A_B} \left[\cos(\varphi_k - \vartheta_k) - \frac{\sin(\varphi_k - \vartheta_k)}{k\Omega_B} p \right] x_k. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Теперь подставим искомое решение (9.58), а также выражение (9.64) для разложения в ряд нелинейности и формулу для внешнего периодического воздействия (9.72) в заданное нелинейное дифференциальное уравнение автоматической системы (9.61). Оно разобьется на n линейных уравнений: одно уравнение для определения уточненной первой гармоники с учетом высших

$$\begin{aligned} Q(p) x_1 + R(p) \left(q + \Delta q + \frac{q' + \Delta q'}{\Omega_B} p \right) x_1 &= \\ &= S(p) \frac{B_1}{A_1} \left(\cos \varphi_1 - \frac{\sin \varphi_1}{\Omega_B} p \right) x_1 \end{aligned} \quad (9.73)$$

и $n-1$ уравнений для определения высших гармоник

$$\begin{aligned} Q(p) x_k + R(p) \frac{1}{\delta_k} \left(q_k + \frac{q'_k}{k\Omega_B} p \right) x_k &= \\ &= S(p) \frac{B_k}{\delta_k A_B} \left[\cos(\varphi_k - \vartheta_k) - \frac{\sin(\varphi_k - \vartheta_k)}{k\Omega_B} p \right] x_k \quad (k=2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (9.74)$$

В случае, если $m < n$, имеем $B_k = 0$ при $k > m$, т. е. в уравнениях с номерами $k > m$ правые части отсутствуют. Если внешнее воздействие задано в синусоидальной форме, то все уравнения (9.74) не будут иметь правых частей. Если же внешнее периодическое воздействие несинусоидально и $m = n$, то во всех уравнениях (9.74) все члены присутствуют.

Уравнения (9.73) и (9.74) можно рассматривать как однородные дифференциальные уравнения, линейные вдоль периодического решения. Сначала найдем высшие гармоники, считая, что первое приближение для первой гармоники (т. е. значения A_B и φ), согласно § 9.1,

уже известно. Для этого, подставив $p = jk\Omega_B$ в уравнения (9.74), запишем:

$$Q(jk\Omega_B) + R(jk\Omega_B) \frac{1}{\delta_k} (q_k + jq'_k) = \\ = S(jk\Omega_B) \frac{B_k}{\delta_k A_B} [\cos(\varphi_k - \vartheta_k) - j \sin(\varphi_k - \vartheta_k)]. \quad (9.75)$$

Учитывая, что, согласно (9.70) и (9.68):

$$q_k + jq'_k = (r_k + js_k)(\cos \psi_k - j \sin \psi_k) = (r_k + js_k) e^{-j\varphi_k} e^{jk\varphi},$$

а также то, что

$$\cos(\varphi_k - \vartheta_k) - j \sin(\varphi_k - \vartheta_k) = e^{-j\varphi_k} e^{j\vartheta_k},$$

из уравнения (9.75) получаем:

$$\delta_k e^{j\varphi_k} = - \frac{R(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} (r_k + js_k) e^{jk\varphi} + \\ + \frac{S(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} \frac{B_k}{A_B} e^{j\vartheta_k} \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (9.76)$$

Поскольку величины Ω_B , B_k и ϑ_k заданы, если задано внешнее периодическое воздействие (9.62), а величины A_B и φ известны из найденного ранее первого приближения (см. § 9.1), то из формул (9.76) можно определить относительную амплитуду δ_k и сдвиг фазы φ_k каждой из высших гармоник вынужденных колебаний по отдельности, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \left| - \frac{R(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} (r_k + js_k) e^{jk\varphi} + \frac{S(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} \frac{B_k}{A_B} e^{j\vartheta_k} \right|, \\ \varphi_k &= \arg \left[- \frac{R(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} (r_k + js_k) e^{jk\varphi} + \frac{S(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} \frac{B_k}{A_B} e^{j\vartheta_k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.77) \\ (k = 2, 3, \dots, n).$$

В частности, при синусоидальном внешнем воздействии, когда все $B_k = 0$, вместо (9.77) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta_k &= \left| \frac{R(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} \right| \sqrt{r_k^2 + s_k^2}, \\ \varphi_k &= \arg \frac{-R(jk\Omega_B)}{Q(jk\Omega_B)} + \operatorname{arctg} \frac{s_k}{r_k} + k\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (9.78)$$

Таким образом вычислены высшие гармоники вынужденных колебаний. Перейдем к уточнению первой гармоники за счет учета высших гармоник, т. е. к нахождению величин A_1 и φ_1 . Для этого подставим найденные значения δ_k и φ_k в формулы (9.69) и вычислим добавки к коэффициентам гармонической линеаризации Δq и $\Delta q'$.

Для определения уточненной первой гармоники вынужденных колебаний запишем на основании (9.73) характеристическое уравнение

$$Q_1(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega_B} p \right) = S(p) \frac{B_1}{A_1} \left(\cos \varphi_1 - \frac{\sin \varphi_1}{\Omega_B} p \right), \quad (9.79)$$

где

$$Q_1(p) = Q(p) + R(p) \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega_B} p \right) \quad (9.80)$$

— исправленный с помощью добавок к его коэффициентам многочлен $Q(p)$. Вычисленные величины Δq и $\Delta q'$ играют здесь роль постоянных чисел наравне с параметрами системы, через которые вычисляются коэффициенты многочлена $Q(p)$.

Итак, согласно (9.79), определение уточненной первой гармоники вынужденных колебаний производится на основании комплексного уравнения

$$A_1 \frac{Q_1(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)(q + jq')}{S(j\Omega_B)} = B_1 e^{-j\varphi_1}. \quad (9.81)$$

Это уравнение внешне имеет тот же вид, что и прежнее (9.14). Поэтому и решать его можно по-прежнему: либо графически путем определения точки пересечения кривой

$$Z(A_1) = A_1 \frac{Q_1(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)(q + jq')}{S(j\Omega_B)} \quad (9.82)$$

с окружностью радиуса B_1 на комплексной плоскости (рис. 9.12), либо аналитически, сведя его к двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 \frac{X_1^2(A_1, \Omega_B) + Y_1^2(A_1, \Omega_B)}{X_s^2(\Omega_B) + Y_s^2(\Omega_B)} &= B_1^2, \\ \varphi_1 &= -\arctg \frac{Y_1(A_1, \Omega_B)}{X_1(A_1, \Omega_B)} + \arctg \frac{Y_s(\Omega_B)}{X_s(\Omega_B)}, \end{aligned} \right\} \quad (9.83)$$

как это делалось в § 9.1, но с заменой многочлена $Q(p)$ на $Q_1(p)$.

Таким образом будет найдена первая гармоника вынужденных колебаний в уточненном виде (9.59), а следовательно, и все решение для вынужденных колебаний в виде

$$x = A_1 \sin(\Omega_B t + \varphi_1) + \sum_{k=2}^n \delta_k A_B \sin(k\Omega_B t + \varphi_k). \quad (9.84)$$

Если потребуется, можно уточнить теперь и значения относительных амплитуд δ_k и фазовых сдвигов φ_k высших гармоник, вычисляя их по формулам (9.77) или (9.78), но с подстановкой в них и в

(9.71) не первого приближения A_B и φ , как раньше, а полученных здесь уточненных значений A_1 и φ_1 . Обозначим эти уточненные значения δ_k и φ_k через δ'_k и φ'_k . Тогда решение для вынужденных колебаний будет найдено в виде

$$x = A_1 \left[\sin(\Omega_B t + \varphi_1) + \sum_{k=2}^n \delta'_k \sin(k\Omega_B t + \varphi'_k) \right]. \quad (9.85)$$

Вообще здесь возможно и дальнейшее развитие последовательных приближений, которое, однако, едва ли потребуется для практических расчетов.

Рассмотрим особо наиболее распространенный на практике случай, когда в системе имеется одна однозначная нечетно-симметричная нелинейность $F(x)$, для которой наиболее существенной из высших гармоник будет третья. Полагая, что внешнее периодическое воздействие имеет вид

$$f(t) = B_1 \sin \Omega_B t + B_3 \sin(3\Omega_B t + \vartheta_3), \quad (9.86)$$

будем искать вынужденные колебания системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением (9.61), в виде

$$x = A_1 \sin(\Omega_B t + \varphi_1) + \delta_3 A_B \sin(3\Omega_B t + \varphi_3). \quad (9.87)$$

Формулы для вычисления третьей гармоники вынужденных колебаний здесь, согласно (9.77) и (9.71), будут:

$$\left. \begin{aligned} \delta_3 &= \left| -\frac{R(j3\Omega_B)}{Q(j3\Omega_B)} r_3 e^{j3\varphi} + \frac{S(j3\Omega_B)}{Q(j3\Omega_B)} \frac{B_3}{A_B} e^{j\vartheta_3} \right|, \\ \varphi_3 &= \arg \left[-\frac{R(j3\Omega_B)}{Q(j3\Omega_B)} r_3 e^{j3\varphi} + \frac{S(j3\Omega_B)}{Q(j3\Omega_B)} \frac{B_3}{A_B} e^{j\vartheta_3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.88)$$

При синусоидальном внешнем воздействии ($B_3 = 0$) получим:

$$\delta_3 = r_3 \left| \frac{-R(j3\Omega_B)}{Q(j3\Omega_B)} \right|, \quad \varphi_3 = \arg \frac{-R(j3\Omega_B)}{Q(j3\Omega_B)} + 3\varphi, \quad (9.89)$$

где

$$r_3 = \frac{4}{\pi A_B} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(A_B \sin \psi) \sin 3\psi d\psi, \quad (9.90)$$

причем A_B и φ считаются уже известными из первого приближения (§ 9.1).

В уравнении (9.81) для уточненной первой гармоники в данной задаче будет $q' = 0$, т. е.

$$A_1 \frac{Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B) q(A_1)}{S(j\Omega_B)} = B_1 e^{-j\varphi_1}, \quad (9.91)$$

где

$$Q_1(j\Omega_B) = Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)(\Delta q + j\Delta q'). \quad (9.92)$$

При этом формулы для добавков Δq и $\Delta q'$ сильно упростятся по сравнению с общим случаем. Вместо выражений (9.69) теперь получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= h_3 \delta_3 \cos(\varphi_3 - k\varphi), \\ \Delta q' &= 3r_3 \delta_3 \sin(\varphi_3 - k\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (9.93)$$

где

$$h_3 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx} F(A_B \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi d\psi. \quad (9.94)$$

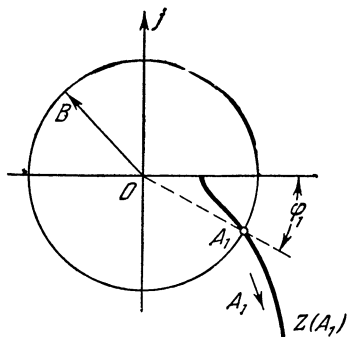


Рис. 9.12.

Для r_3 и h_3 можно воспользоваться готовыми выражениями, приведенными в § 8.3, а для $q(A_1)$ — материалом главы III. В результате уточненное решение (9.87) для вынужденных колебаний будет найдено. При этом можно пользоваться как графическим методом (рис. 9.12), строя кривую

$$Z(A_1) = A_1 \frac{Q_1(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)q(A_1)}{S(j\Omega_B)}, \quad (9.95)$$

так и аналитическим с использованием двух уравнений (9.83), которые в данном случае можно записать более развернуто в виде

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 \frac{[X_{Q_1}(\Omega_B) + X_R(\Omega_B)q(A_1)]^2 + [Y_{Q_1}(\Omega_B) + Y_R(\Omega_B)q(A_1)]^2}{X_S^2(\Omega_B) + Y_S^2(\Omega_B)} &= B_1^2, \\ \varphi &= -\arctg \frac{Y_{Q_1}(\Omega_B) + Y_R(\Omega_B)q(A_1)}{X_{Q_1}(\Omega_B) + X_R(\Omega_B)q(A_1)} + \arctg \frac{Y_S(\Omega_B)}{X_S(\Omega_B)}, \end{aligned} \right\} \quad (9.96)$$

где X_{Q_1} , X_R , Y_{Q_1} , Y_R — вещественные и мнимые части соответственно для выражений $Q_1(j\Omega_B)$ и $R(j\Omega_B)$.

Если потребуется, можно уточнить и третью гармонику, записав решение в виде

$$x = A_1 [\sin(\Omega_B t + \varphi_1) + \delta'_3 \sin(3\Omega_B t + \varphi'_3)], \quad (9.97)$$

где δ'_3 и φ'_3 определяются теми же формулами (9.88) и (9.89), но с подстановкой в них, а также и в (9.90) уточненных значений A_1 и φ_1 вместо A_B и φ .

§ 9.5. Примеры определения симметричных одночастотных вынужденных колебаний

Покажем на примерах применение методов определения вынужденных одночастотных колебаний в нелинейных системах.

Пример 1. Релейная система второго порядка с запаздыванием. Система состоит из линейной части и нелинейного (релейного) звена (рис. 9.13). Пусть на вход системы подается внешнее синусоидальное воздействие

$$f(t) = B \sin \Omega_b t. \quad (9.98)$$

Уравнение линейной части имеет вид

$$(T_1 p + 1) p x_1 = k x_2. \quad (9.99)$$

Уравнение релейного звена есть нелинейная функция

$$x_2 = F_\tau(x) = e^{-\tau p} F(x), \quad (9.100)$$

заданная в виде идеальной релейной характеристики $F(x)$ (рис. 9.14, а), но с временем запаздывания τ выходной величины нелинейного звена.

Вынужденные колебания входной величины нелинейного звена будем искать в виде

$$x = A_b \sin(\Omega_b t + \varphi). \quad (9.101)$$

Полагая, что условие существования одночастотного периодического решения (условие захватывания) выполняется, определим амплитуду A_b и сдвиг по фазе φ вынужденных колебаний.

Подставив (9.100) в (9.99) с учетом того, что

$$x_1 = f(t) - x,$$

получаем уравнение системы

$$(T_1 p + 1) p x + k F_\tau(x) = (T_1 p + 1) p f(t). \quad (9.102)$$

Внешнее синусоидальное воздействие (9.98) представим в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= B \sin[(\Omega_b t + \varphi) - \varphi] = \\ &= B \cos \varphi \sin(\Omega_b t + \varphi) - B \sin \varphi \cos(\Omega_b t + \varphi). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что в соответствии с (9.101)

$$p x = A_b \Omega_b \cos(\Omega_b t + \varphi),$$

окончательно получим:

$$f(t) = \frac{B}{A_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_b} p \right) x. \quad (9.103)$$

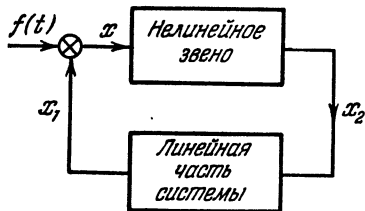


Рис. 9.13.

Подставив (9.103) в (9.102), находим однородное нелинейное уравнение системы для переменной x :

$$(T_1 p + 1) \left[1 - \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] p x + k F_\tau(x) = 0. \quad (9.104)$$

Гармоническая линеаризация идеальной релейной характеристики в соответствии с формулой (3.14) и с учетом временного запаздывания дает

$$F_\tau(x) = \frac{4c}{\pi A_B} e^{-\tau p} x. \quad (9.105)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (9.104), с учетом (9.105) примет вид

$$(T_1 p + 1) \left[1 - \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] p + \frac{4kc}{\pi A_B} e^{-\tau p} = 0. \quad (9.106)$$

Подставляя в (9.106) мнимое значение $p = j\Omega_B$ и учитывая, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

получаем:

$$A_B - \frac{4kce^{-j\tau\Omega_B}}{\pi(T_1\Omega_B^2 - j\Omega_B)} = Be^{-j\varphi}. \quad (9.107)$$

Заделимся численными значениями параметров системы, а также амплитудой и частотой внешнего воздействия: $k = 10 \frac{1}{сек}$, $c = 10$ в, $T_1 = 0,01$ сек, $\tau = 0,01$ сек, $\Omega_B = 10 \frac{1}{сек}$, $B = 20$ в.

Подставив принятые значения параметров в (9.107), получим:

$$A_B - 2,5 - j \cdot 12,3 = 20e^{-j\varphi}. \quad (9.108)$$

Применим графический метод, описанный в § 9.1. Проведем на комплексной плоскости (рис. 9.14, б) окружность радиусом $R = 20$, изображающую правую часть уравнения (9.108) и прямую, соответствующую левой части уравнения (9.108). На прямой нанесем значения амплитуд вынужденных колебаний A_B . Точка пересечения окружности и прямой дает решение для A_B и φ . Заметим, что отсчет положительных значений угла сдвига фаз производится в направлении часовой стрелки, так как правая часть (9.108) представляет собой вектор, совершающий повороты на угол φ в обратном направлении по сравнению с обычным отсчетом положительных углов. Как видно из рис. 9.14, б, в данном случае $A_B = 18,2$ в, $\varphi = 38^\circ$. Из выполненного построения можно заключить, что для принятой частоты $\Omega_B = 10$ 1/сек наименьшая пороговая амплитуда внешнего воздействия $B_{пор} = 12,3$ в, т. е. равна радиусу окружности, касающейся прямой A_B .

При данных значениях параметров имеем одну точку пересечения окружности и прямой с положительными значениями амплитуды, т. е. имеем одно периодическое решение. Однако при других значениях параметров здесь в принципе возможны два периодических решения,

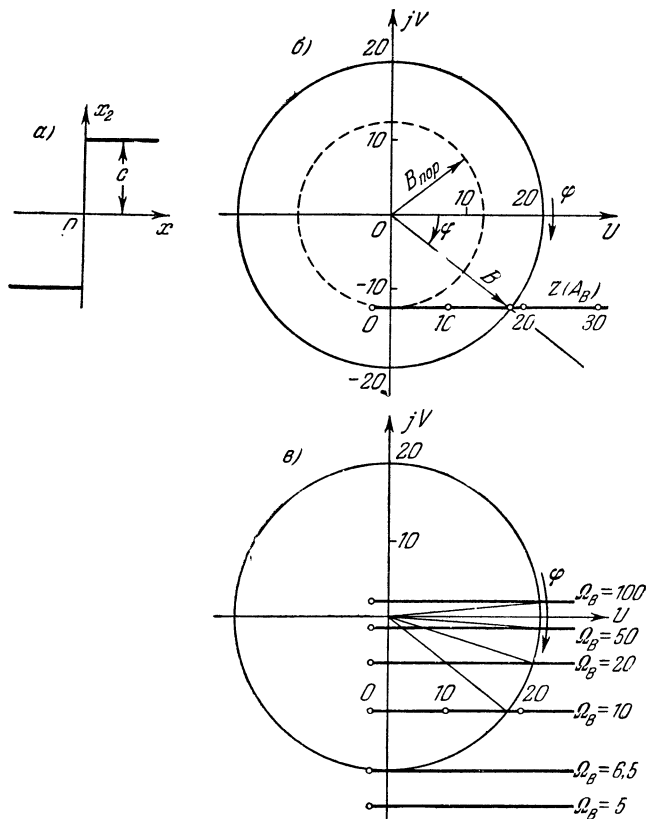


Рис. 9.14.

так как возможны окружности и прямые, имеющие две точки пересечения при $A_B > 0$.

Проводя ряд окружностей для значений амплитуды внешнего воздействия, отличных от $B=20$, можно графическим методом найти зависимости $A_B(B)$ и $\varphi(B)$. Аналогично, проводя ряд прямых при различных постоянных Ω_B , τ или k , можно определить зависимости $A_B(\Omega_B)$, $\varphi(\Omega_B)$, $A_B(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $A_B(k)$ и $\varphi(k)$.

Выполненные построения указанных зависимостей на основе графического решения представлены на рис. 9.15, а, б, в. Вспомогательное построение для определения $A_B(\Omega_B)$ и $\varphi(\Omega_B)$ изображено на рис. 9.14, в.

Покажем в том же примере релейной системы с запаздыванием применение аналитического метода. Для этого по уравнению (9.107) с двумя неизвестными A_B и φ составим два уравнения: первое уравнение из условия равенства модулей комплексных выражений левой

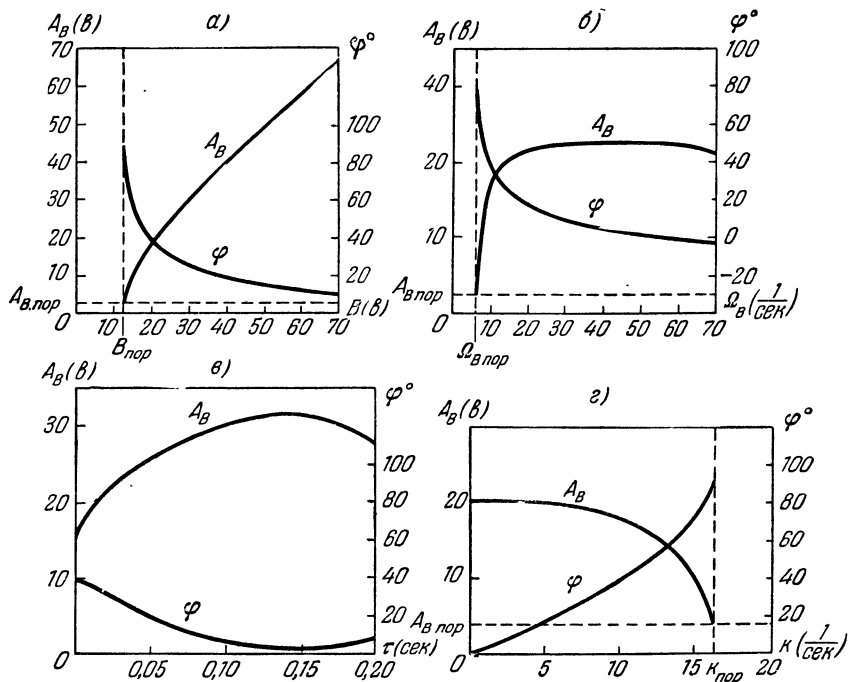


Рис. 9.15.

и правой частей уравнения (9.107), а второе — из условия равенства аргументов.

Подставляя в (9.107) значение

$$e^{-j\tau\Omega_B} = \cos \tau\Omega_B - j \sin \tau\Omega_B$$

и выполняя преобразования, получим:

$$A_B - \frac{4kc}{\pi} \left(\frac{\alpha - j\beta}{\gamma} \right) = B^{-j\varphi}, \quad (9.109)$$

где

$$\alpha = T_1 \Omega_B^2 \cos \tau\Omega_B + \Omega_B \sin \tau\Omega_B,$$

$$\beta = T_1 \Omega_B^2 \sin \tau\Omega_B - \Omega_B \cos \tau\Omega_B,$$

$$\gamma = T_1^2 \Omega_B^4 + \Omega_B^2.$$

По уравнению (9.109) получаем соответствующие уравнения из условия равенства модулей и аргументов:

$$\left(A_b - \frac{4kc\alpha}{\pi\gamma}\right)^2 + \left(\frac{4kc\beta}{\pi\gamma}\right)^2 = B^2, \quad (9.110)$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{4kc\beta}{\pi\gamma A_b - 4kc\alpha}. \quad (9.111)$$

Уравнение (9.110) может быть разрешено относительно амплитуды вынужденных колебаний. В результате решения получаем:

$$A_b = \frac{4kc\alpha}{\pi\gamma} \pm \sqrt{B^2 - \left(\frac{4kc\beta}{\pi\gamma}\right)^2}. \quad (9.112)$$

Как видно из (9.112), вынужденные колебания возможны только при условии

$$B > \frac{4kc\beta}{\pi\gamma},$$

т. е. когда значения амплитуды вещественны.

Выполняя вычисления амплитуды и фазы вынужденных колебаний по формулам (9.112) и (9.111) при принятых значениях параметров системы и амплитуды внешнего воздействия, получаем:

$$A_b = 18,2 \text{ в}, \quad \varphi = 38^\circ.$$

Поскольку в данной системе при некоторых значениях параметров, частоты и амплитуды внешнего воздействия возможны два вынужденных периодических решения, то полученное решение для x следует проверить на устойчивость. Выполним это методом осреднения периодически меняющихся коэффициентов по линеаризованному уравнению в малых отклонениях от периодического решения (см. § 9.1).

Обратимся к исходному уравнению (9.102). Периодическое решение для уравнения (9.102) получено. Введем малое отклонение от исследуемого периодического решения для переменной x :

$$x = x^* + \Delta x, \text{ где } x^* = A_b \sin(\Omega_b t + \varphi).$$

Подставляя значение x в уравнение (9.102) и разлагая функцию $F_\tau(x)$ в ряд Тейлора с пренебрежением членами высшего порядка малости, получаем:

$$(T_1 p + 1)p(x^* + \Delta x) + k \left[F_\tau(x^*) + \left(\frac{\partial F_\tau}{\partial x} \right)^* \Delta x \right] = (T_1 p + 1)p f(t). \quad (9.113)$$

Так как исходное уравнение удовлетворяется значением $x = x^*$ в периодическом решении, то для установившихся колебаний имеем:

$$(T_1 p + 1)p x^* + k F_\tau(x^*) = (T_1 p + 1)p f(t). \quad (9.114)$$

Вычитая из уравнения (9.113) уравнение (9.114) и представляя функцию F_{τ} в виде

$$F_{\tau}(x) = F(x) e^{-\tau p},$$

получим линейное уравнение в малых отклонениях от периодического решения:

$$(T_1 p + 1) p \Delta x + k e^{-\tau p} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* \Delta x = 0. \quad (9.115)$$

Звездочка означает, что после взятия производной следует выполнить подстановку

$$x = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi).$$

Периодически изменяющийся коэффициент $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^*$, входящий в (9.115), заменим его средним значением за период:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* d\psi, \quad \psi = \Omega_B t + \varphi. \quad (9.116)$$

С учетом (9.116) уравнение (9.115) примет вид

$$[(T_1 p + 1) p + \kappa e^{-\tau p}] \Delta x = 0. \quad (9.117)$$

Вычислим значение коэффициента κ . Производная $\frac{\partial F}{\partial x}$, согласно рис. 9.14, есть мгновенный импульс площадью $2c$. Следовательно, подынтегральная функция в (9.116) везде равна нулю, кроме точки $x = 0$. Интеграл (9.116) представим в виде

$$\kappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* d\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{dF}{dx} \right)^* \frac{dx}{\frac{d\psi}{d\psi}}.$$

Так как при $x = A_B \sin \psi$ и $\psi = \Omega_B t + \varphi$,

$$\frac{dx}{d\psi} = A_B \cos \psi = \sqrt{A_B^2 - x^2},$$

то, изменяя пределы интегрирования, имеем:

$$\kappa = \frac{1}{\pi} \int_{-A_B}^{A_B} \left(\frac{dF}{dx} \right)^* \frac{dx}{\sqrt{A_B^2 - x^2}}.$$

При $x=0$ имеем $\sqrt{A_B^2 - x^2} = A_B$, а интеграл от $\frac{dF}{dx}$ по dx есть площадь импульса, равная $2c$. Следовательно, окончательно получаем:

$$x = \frac{2c}{\pi A_B}. \quad (9.118)$$

Подставляя значение x из (9.118) в (9.117), получаем уравнение

$$\left[(T_1 p + 1) p + \frac{2kc}{\pi A_B} e^{-\tau p} \right] \Delta x = 0. \quad (9.119)$$

Характеристический полином для уравнения (9.119) можно записать в виде

$$L(p) = \frac{\pi A_B}{2kc} (T_1 p + 1) p + e^{-\tau p}. \quad (9.120)$$

Аналитическое выражение для кривой Михайлова будет

$$L(j\omega) = \frac{\pi A_B}{2kc} (-T_1 \omega^2 + j\omega) + e^{-j\tau\omega}. \quad (9.121)$$

После подстановки численных значений параметров и значения амплитуды A_B получаем:

$$L(j\omega) = -0,286 \cdot 10^{-2} \omega^2 + j \cdot 0,286 \omega + e^{-j0,01\omega}. \quad (9.122)$$

В соответствии с (9.122) выполним построение годографа вектора $L(j\omega)$. Для этого построим годограф вектора, соответствующего первым двум членам выражения (9.122), и проведем окружность радиусом, равным единице, соответствующую третьему члену. В результате сложения соответствующих векторов для различных частот получаем кривую Михайлова (рис. 9.16). Полученная кривая Михайлова соответствует устойчивой системе второго порядка с запаздыванием, и, следовательно, периодическое решение устойчиво.

Пример 2. Релейная система третьего порядка. Пусть для релейной системы (рис. 9.13) линейная часть описывается уравнением

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x_1 = k x_2, \quad (9.123)$$

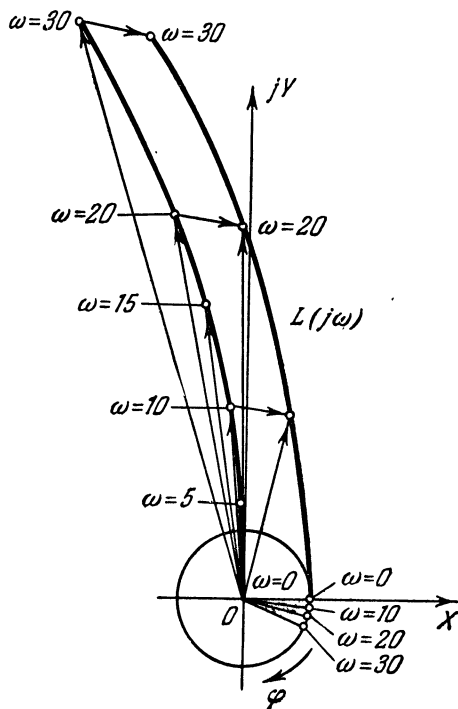


Рис. 9.16.

а релейное звено имеет координатное запаздывание, определяемое характеристикой, показанной на рис. 9.17, а. Внешнее воздействие

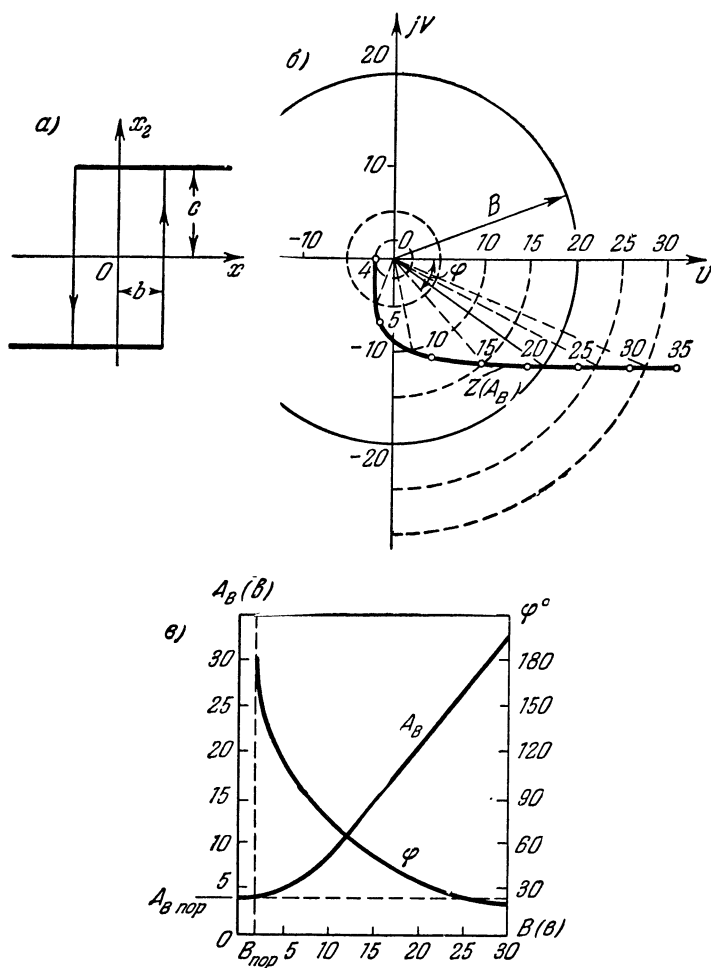


Рис. 9.17.

по-прежнему синусоидальное и приложено на входе нелинейного звена:

$$f(t) = B \sin \Omega_B t.$$

Вынужденные колебания будем искать для переменной x по-прежнему в виде

$$x = A_B \sin (\Omega_B t + \varphi).$$

Для релейного звена рассматриваемого вида гармоническая линейаризация сводится к замене нелинейной функции линейным соотношением

$$x_2 = F(x) = \left[q(A_B) + \frac{q'(A_B)}{\Omega_B} p \right] x,$$

где в соответствии с формулами (3.9) и (3.10) коэффициенты гармонической линейаризации имеют значения:

$$q(A_B) = \frac{4c}{\pi A_B} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_B^2}}, \quad q'(A_B) = -\frac{4cb}{\pi A_B^2} \text{ при } A_B \geq b.$$

Полагая, что условие захватывания выполняется, определим амплитуду A_B и сдвиг по фазе φ вынужденных колебаний для переменной

$$x = f(t) - x_1.$$

Подставив в уравнение линейной части (9.123)

$$x_2 = F(x)$$

и учитывая, что

$$x_1 = f(t) - x,$$

получим уравнение системы

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x + k F(x) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p f(t).$$

Заменяя $f(t)$ ее значением (9.103), имеем:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p \left[1 - \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] x + k F(x) = 0. \quad (9.124)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее (9.124), будет

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p \left[1 - \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] + k \left(q + \frac{q'}{\Omega_B} p \right) = 0, \quad (9.125)$$

где произведена гармоническая линейаризация нелинейности по формуле

$$F(x) = \left[q(A_B) + \frac{q'(A_B)}{\Omega_B} p \right] x.$$

Подставляя в уравнение (9.125) мнимое значение $p = j\Omega_B$ и учитывая, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

получим:

$$A_B \left\{ 1 - \frac{k [q(A_B) + jq'(A_B)]}{(T_1 + T_2) \Omega_B^2 - j(1 - T_1 T_2 \Omega_B^2) \Omega_B} \right\} = B e^{-j\varphi}. \quad (9.126)$$

Зададимся численными значениями параметров системы, а также частотой и амплитудой внешнего воздействия: $k=10 \frac{1}{\text{сек}}$, $c=10 \text{ в}$, $b=4 \text{ в}$, $T_1=0,01 \text{ сек}$, $T_2=0,02 \text{ сек}$, $B=20 \text{ в}$, $\Omega_b=10 \text{ 1/сек}$.

Подставляя численные значения в (9.126) с учетом значений $q(A_b)$ и $q'(A_b)$, получим:

$$A_b = \frac{(3,63 \sqrt{A_b^2 - 16} + 23,7) + j(11,8 \sqrt{A_b^2 - 16} - 0,72)}{A_b} = 20e^{-j\varphi}. \quad (9.127)$$

Применим графический метод для определения A_b и φ . Для этого на комплексной плоскости (рис. 2.17, б) проведем окружность радиусом $R=20$, изображающую правую часть равенства (9.127), и, задаваясь различными значениями A_b , построим кривую, соответствующую левой части равенства (9.127). Точка пересечения окружности $R=B=20$ и кривой $Z(A_b)$ дает решение уравнения (9.127): $A_b=21 \text{ в}$, $\varphi=35^\circ$.

Выполняя подобные решения для различных значений амплитуды вынужденных колебаний, т. е. проводя ряд окружностей различными радиусами $R=B$, получим зависимости $A_b(B)$ и $\varphi(B)$, представленные кривыми на рис. 9.17, в. Подобные зависимости можно получить для частоты внешнего воздействия Ω_b и для любого параметра системы. Для получения этих зависимостей необходимо при постоянных значениях других параметров изменять один из параметров и выполнять построение кривых A_b . При этом можно построить только участки кривых, пересекающихся с окружностью, соответствующей заданному синусоидальному внешнему воздействию.

Исследование устойчивости вынужденных колебаний в данном случае проводить нецелесообразно, так как здесь имеет место единственное периодическое решение.

Пример 3. Система угловой стабилизации. В качестве третьего примера определения вынужденных колебаний рассмотрим систему

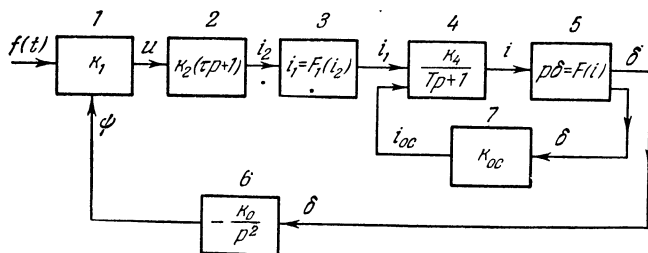


Рис. 9.18.

угловой стабилизации объекта в пространстве, представленную структурной схемой на рис. 9.18. Чувствительным элементом системы является гироскоп 1, с потенциометра которого снимается напряжение u

и через фильтр 2 подается на первый усилитель 3. Полученный ток i_1 подается на вход второго усилителя 4, питающего рулевую машинку 5. Рулевая машинка за счет изменения отклонения

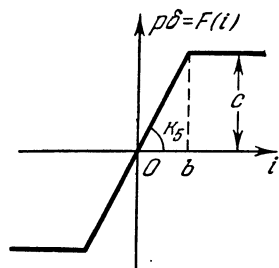


Рис. 9.19.

руля δ воздействует на объект 6. В системе имеется жесткая дополнительная обратная связь 7, охватывающая усилитель и рулевую машинку.

Рассмотрим вначале случай учета одной нелинейности — насыщения в рулевой машинке $p\delta = F(i)$, полагая $F_1(i_2) = k_3 i_2$.

Допустим, что к чувствительному элементу системы (гироскопу) приложено внешнее гармоническое воздействие

$$f(t) = B \sin \Omega_b t. \quad (9.128)$$

Уравнения звеньев в соответствии со структурной схемой будут:

1) гироскопа

$$u = k_1 [f(t) - \psi]; \quad (9.129)$$

2) фильтра

$$i_2 = k_2 (\tau p + 1) u; \quad (9.130)$$

3) первого усилителя

$$i_1 = k_3 i_2; \quad (9.131)$$

4) второго усилителя

$$(Tp + 1)i = k_4 (i_1 - i_{o.c}); \quad (9.132)$$

5) объекта

$$p^2 \psi = -k_0 \delta; \quad (9.133)$$

6) дополнительной обратной связи

$$i_{o.c} = k_{o.c} \delta. \quad (9.134)$$

Нелинейное звено — рулевая машинка — имеет нелинейную статическую характеристику $p\delta = F(i)$ (рис. 9.19).

Будем определять вынужденные колебания для входной величины нелинейного звена в виде

$$i = A_b \sin (\Omega_b t + \varphi). \quad (9.135)$$

Применяя гармоническую линеаризацию для нелинейного звена, получаем:

$$F(i) = q(A_b) i, \quad (9.136)$$

где в соответствии с (3.19) коэффициент гармонической линеаризации имеет значение

$$q(A_b) = \frac{2k_5}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A_b} + \frac{b}{A_b} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_b^2}} \right) \quad \text{при } A_b \geq b,$$

$$q(A_b) = k_5 \quad \text{при } A_b \leq b.$$

Из уравнений линейных звеньев (9.129) — (9.134) и линеаризованного уравнения нелинейного звена (9.136) получим уравнение системы для переменной i :

$$(Tp^4 + p^3 + k_4 k_{0.c} qp^2 + k k_0 \tau qp + k k_0 q) i = k (\tau p + 1) p^3 f(t), \quad (9.137)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_4$.

Для приведения уравнения (9.137) к однородному выразим внешнее воздействие через переменную i . Представляя $f(t)$ в соответствии с (9.128) в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= B \sin [(\Omega_B t + \varphi) - \varphi] = \\ &= B \cos \varphi \sin (\Omega_B t + \varphi) - B \sin \varphi \cos (\Omega_B t + \varphi) \end{aligned}$$

и принимая во внимание, что

$$i = A_B \sin (\Omega_B t + \varphi) \quad \text{и} \quad pi = A_B \Omega_B \cos (\Omega_B t + \varphi),$$

получаем:

$$f(t) = \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) i.$$

Подставляя значение $f(t)$ в (9.137), получим однородное уравнение

$$\begin{aligned} (Tp^4 + p^3 + k_4 k_{0.c} qp^2 + k k_0 \tau qp + k k_0 q) i = \\ = k (\tau p + 1) p^3 \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) i. \end{aligned} \quad (9.138)$$

Для определения вынужденных колебаний подставим в характеристическое уравнение, соответствующее (9.138), $p = j\Omega_B$. В результате, учитывая, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi}$$

получим уравнение

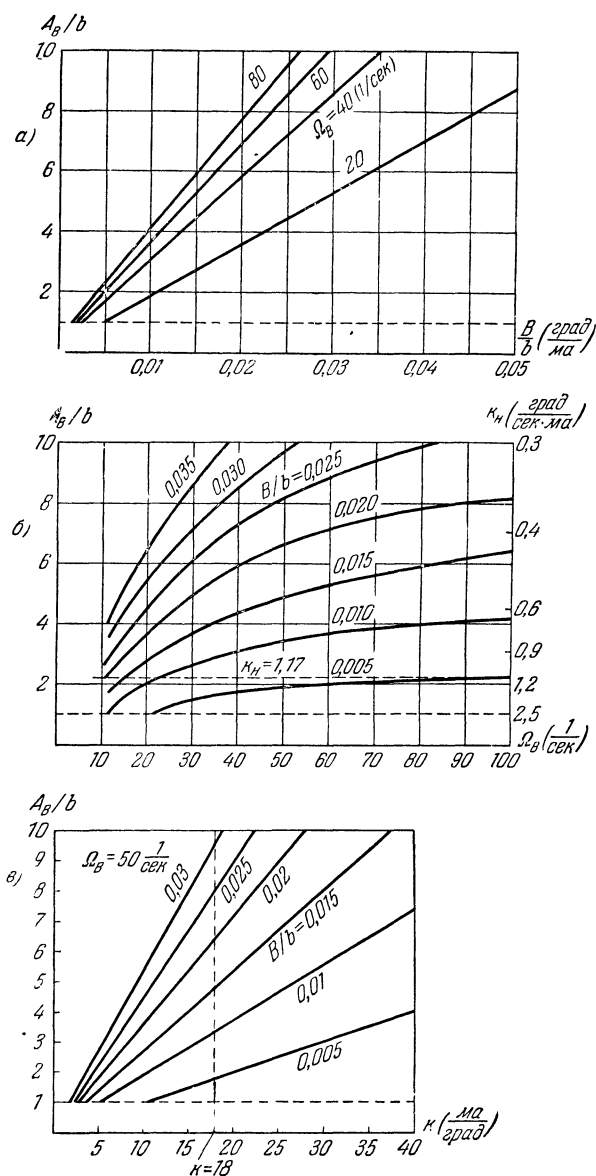
$$\frac{A_B (T\Omega_B^4 - j\Omega_B^3 - k_4 k_{0.c} q\Omega_B^2 + j k k_0 \tau q\Omega_B + k k_0 q)}{-k (\tau j\Omega_B + 1) j\Omega_B^3} = B e^{-j\varphi}.$$

Из условия равенства модулей левой и правой частей этого комплексного выражения получим формулу, связывающую амплитуду вынужденных колебаний A_B с амплитудой внешнего воздействия B , частотой Ω_B и параметрами системы:

$$A_B^2 \frac{[T\Omega_B^4 + (k k_0 - k_4 k_{0.c} \Omega_B^2) q (A_B)]^2 + [k k_0 \tau q (A_B) \Omega_B - \Omega_B^3]^2}{k^2 \Omega_B^6 (\tau^2 \Omega_B^2 + 1)} = B^2; \quad (9.139)$$

отсюда можно получить и соотношение для определения сдвига по фазе φ . Однако часто практически представляет интерес определение только амплитуды вынужденных колебаний.

Для определения зависимостей амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды и частоты внешнего воздействия, а также от



параметров системы примем следующие численные значения параметров:

$$k = k_1 k_2 k_3 k_4 = 18 \text{ ма/град}, \quad k k_0 = 9 \frac{\text{ма}}{\text{сек}^2 \text{ град}}, \quad k_4 k_{0.c} = 1,8 \text{ ма/град}, \\ T = 0,02 \text{ сек}, \quad \tau = 0,5 \text{ сек}, \quad \Omega_B = 12 \div 95 \text{ 1/сек}, \quad k_5 = 4 \frac{\text{град}}{\text{сек} \cdot \text{ма}}.$$

При принятых значениях параметров в формуле (9.139) будем иметь:

$$k k_0 \ll k_4 k_{0.c} \Omega_B^2, \quad k k_0 \tau q \Omega_B \ll \Omega_B^3, \quad 1 \ll \tau^2 \Omega_B^2.$$

Тогда уравнение (9.139) можно приближенно переписать в виде

$$\frac{A_B}{k \tau \Omega_B^2} \sqrt{[T \Omega_B^2 - k_4 k_{0.c} q (A_B)]^2 + \Omega_B^2} = B. \quad (9.140)$$

По формуле (9.140) был выполнен расчет, изменения амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от амплитуды и частоты внешнего воздействия и коэффициента усиления k , представленный графиками на рис. 9.20. Амплитуды отложены в относительных величинах A_B/b , B/b . Нанесенная на рис. 9.20, б шкала для величины k_B будет использована позднее в примере 2 § 9.6 при исследовании динамических свойств системы по полезному сигналу в условиях вибрационных помех.

Для той же системы угловой стабилизации объекта в пространстве (рис. 9.18) рассмотрим определение вынужденных колебаний при учете двух нелинейностей. Пусть, кроме насыщения в рулевой машинке, имеется характеристика с насыщением в первом усилителе.

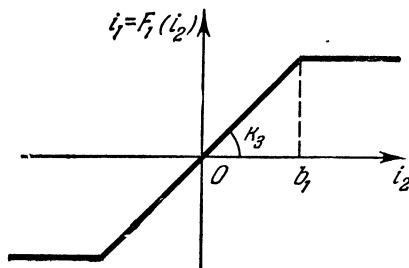


Рис. 9.21.

В этом случае вместо уравнения (9.131) для первого усилителя будем иметь гармонически линеаризованное уравнение

$$i_1 = F_1(i_2) = q_1(A_{1B}) i_2, \quad (9.141)$$

где

$$q_1(A_{1B}) = \frac{2k_3}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_1}{A_{1B}} + \frac{b_1}{A_{1B}} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A_{1B}^2}} \right),$$

A_{1B} — амплитуда вынужденных колебаний для тока i_2 , а k_3 и b_1 определяются нелинейной статической характеристикой первого усилителя (рис. 9.21).

Уравнение системы в соответствии с (9.138) теперь принимает вид

$$(Tp^4 + p^3 + k_2 k_{o.c} q p^2 + k^* k_0 \tau q q_1 p + k^* k_0 q q_1) i = \\ = k^* q_1 (\tau p + 1) p^3 \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) i, \quad (9.142)$$

где $k^* = k_1 k_2 k_4$.

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (9.142), будет

$$\frac{T}{q_1} p^4 + \frac{1}{q_1} p^3 + k_4 k_{o.c} \frac{q}{q_1} p^2 + k^* k_0 \tau q p + k^* k_0 q = \\ = k^* (\tau p + 1) p^3 \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right). \quad (9.143)$$

Подставив в уравнение (9.143) $p = j\Omega_B$, получим:

$$\frac{T}{q_1} \Omega_B^4 - j \frac{1}{q_1} \Omega_B^3 - k_4 k_{o.c} \frac{q}{q_1} \Omega_B^2 + j k^* k_0 \tau q \Omega_B + k^* k_0 q = \\ = \Omega_B^3 (k^* \tau \Omega_B^2 - j k^* \Omega_B) \frac{B}{A_B} e^{-j\varphi}. \quad (9.144)$$

Из условия равенства модулей комплексных величин на основании (9.144) получим:

$$\frac{A_B^2 (T\Omega_B^4 - k_4 k_{o.c} q \Omega_B^2 + k^* k_0 q q_1)^2 \frac{1}{q_1^2} + (k^* k_0 \tau q_1 q \Omega_B - \Omega_B^2)^2 \frac{1}{q_1^2}}{(k^*)^2 \Omega_B^6 (\tau^2 \Omega_B^2 + 1)} = B^2 \quad (9.145)$$

Для принятых ранее значений параметров и $k_3 = q_{1\max} = 50$ получим

$$k^* k_0 q_1 \ll k_4 k_{o.c} \Omega_B^2, \quad k^* k_0 \tau q_1 q \Omega_B \ll \Omega_B^3, \quad 1 \ll \tau^2 \Omega_B^2.$$

Пренебрегая в формуле (9.145) малыми величинами, получим упрощенную формулу для определения амплитуды вынужденных колебаний:

$$\frac{A_B}{k^* q_1 \tau \Omega_B^3} \sqrt{(T\Omega_B^2 - k_4 k_{o.c} q)^2 + \Omega_B^2} = B. \quad (9.146)$$

Так как коэффициенты $q(A_B)$ и $q_1(A_{1B})$ зависят от амплитуд различных переменных, то для перехода к одной амплитуде необходимо воспользоваться передаточной функцией звеньев, разделяющих переменные i_2 и i . На основании указанной передаточной функции

$$W(p) = \frac{i_2}{i} = \frac{-k_2 k_1 (\tau p + 1) k_0}{p^2} q$$

с учетом прежних допущений получим формулу для перехода от амплитуды A_B к амплитуде A_{1B} :

$$A_{1B} = \frac{k_2 k_1 k_0 \tau}{\Omega_B} q A_B. \quad (9.147)$$

На основании формул (9.146) и (9.147) можно выполнить расчеты по определению амплитуды вынужденных колебаний A_B для тока i в зависимости от амплитуды внешнего воздействия B , частоты внешнего воздействия Ω_B и параметров системы, а затем через соответствующую передаточную функцию перейти к амплитуде A_ψ колебаний объекта.

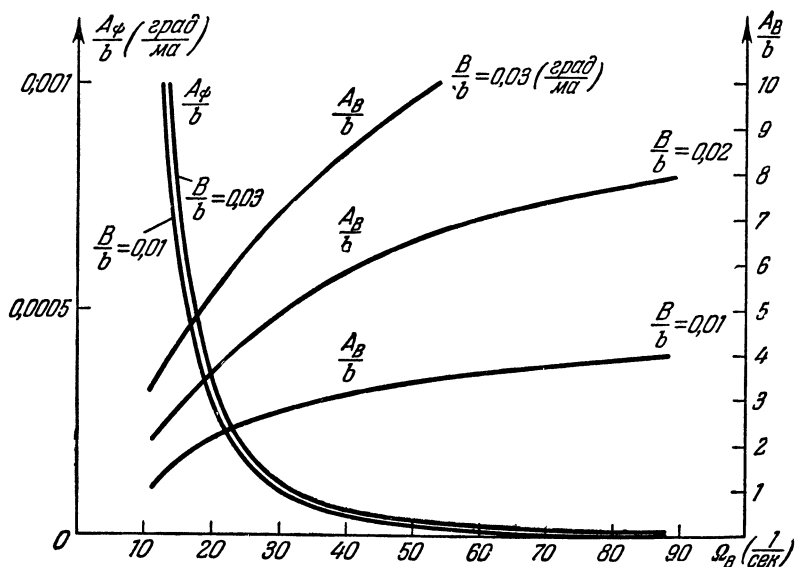


Рис. 9.22.

На рис. 9.22 в виде графиков представлен результат расчета зависимости $A_B(\Omega_B)$ для амплитуды тока i и зависимости $A_\psi(\Omega_B)$ для амплитуды угла ψ колебательного движения объекта при ранее приведенных значениях параметров системы.

Пример 4. Комбинированная система автоматического регулирования. Если динамика обычной нелинейной системы автоматического регулирования, основанной на измерении отклонения регулируемой величины, описывается уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t), \quad (9.148)$$

то динамика комбинированной нелинейной системы автоматического регулирования, в которой дополнительно вводится регулирование по возмущению, будет описываться уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x) = [S(p) - S_1(p)]f(t), \quad (9.149)$$

где $S_1(p)$ есть операторный многочлен, характеризующий дополнительную цепь регулирования по возмущению. Из уравнения (9.149) видно, что за счет выбора многочлена $S_1(p)$, т. е. за счет корректирующего

устройства по возмущению, можно весьма существенно уменьшить влияние возмущающего воздействия на автоматическую систему.

Формула (9.14) позволяет определить амплитуду A_B вынужденных колебаний переменной x при синусоидальном возмущающем воздействии:

$$f(t) = B \sin \Omega_B t. \quad (9.150)$$

Положим, что нелинейность $F(x)$ однозначная и нечетно-симметричная (рис. 9.23). Обозначим амплитуду вынужденных колебаний

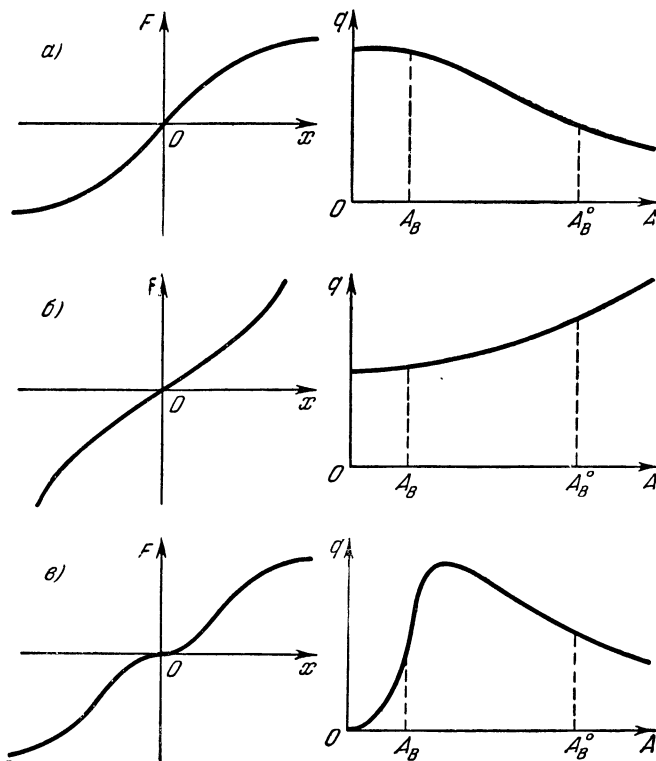


Рис. 9.32.

в обычной системе с уравнением (9.148) через A_B^0 . Согласно (9.14) она определится уравнением

$$A_B^0 |Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B) q(A_B^0)| = B |S(j\Omega_B)|. \quad (9.151)$$

Для комбинированной же системы с уравнением (9.149) амплитуда вынужденных колебаний A_B , согласно (9.14), будет

$$A_B |Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B) q(A_B)| = B |S(j\Omega_B) - S_1(j\Omega_B)|. \quad (9.152)$$

Чтобы определить, во сколько раз уменьшается амплитуда вынужденных колебаний в комбинированной системе по сравнению с обычной, разделим (9.152) на (9.151). В результате получим:

$$\frac{A_B |Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)q(A_B)|}{A_B^0 |Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)q(A_B^0)|} = \left| \frac{S(j\Omega_B) - S_1(j\Omega_B)}{S(j\Omega_B)} \right|. \quad (9.153)$$

Для линейных систем (комбинированных и обычных) будет $q(A_B) = q(A_B^0) = k$, и поэтому уменьшение амплитуды вынужденных колебаний в комбинированной линейной системе по сравнению с обычной линейной определяется отношением

$$\left(\frac{A_B}{A_B^0} \right)_л = \left| \frac{S(j\Omega_B) - S_1(j\Omega_B)}{S(j\Omega_B)} \right|. \quad (9.154)$$

В нелинейной же системе $q(A_B) \neq q(A_B^0)$. Для сравнения эффекта действия добавочного регулирования по возмущению в линейных и нелинейных системах удобнее переписать формулу (9.153) в виде

$$\frac{A_B}{A_B^0} = \left(\frac{A_B}{A_B^0} \right)_л \left| \frac{Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)q(A_B^0)}{Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)q(A_B)} \right|. \quad (9.155)$$

В отличие от линейной системы здесь уменьшение амплитуды вынужденных колебаний зависит не только от частоты колебаний Ω_B и параметров системы, но также и от величины самой амплитуды A_B и от формы нелинейности.

Поскольку $A_B < A_B^0$ (по смыслу задачи), то для нелинейности типа рис. 9.23, а получаем $q(A_B^0) > q(A_B)$, а для нелинейности типа рис. 9.23, б, наоборот, $q(A_B) < q(A_B^0)$. Для нелинейностей же типа рис. 9.23, в может быть справедливым любое из этих двух соотношений. Следовательно, в первом случае (рис. 9.23, а), согласно (9.155), уменьшение амплитуды вынужденных колебаний в комбинированной нелинейной системе будет сильнее, чем в линейной, а во втором случае (рис. 9.23, б) — слабее. В третьем случае (рис. 9.23, в) возможен как тот, так и другой вариант в зависимости от конкретных числовых значений параметров.

Если корректирующее устройство по возмущению удается сделать так, чтобы

$$S_1(j\Omega_B) = S(j\Omega_B), \quad (9.156)$$

то получится возможность полной компенсации внешнего воздействия, т. е. амплитуда вынужденных колебаний сведется к нулю. Для одной какой-нибудь частоты Ω_B (например, наиболее опасной) это почти всегда можно сделать. Тогда на других частотах вынужденные колебания будут существовать, но в определенной полосе частот (около вышеуказанной частоты) они будут очень малы (это называется компенсацией или инвариантностью с точностью до ϵ). Практически выполнения этого условия бывает вполне достаточно.

Если, наконец, удастся построить корректирующее устройство по возмущению так, чтобы

$$S_1(p) = S(p), \quad (9.157)$$

то будет скомпенсировано полностью влияние исследуемого возмущающего воздействия $f(t)$ (останутся только переходные процессы). Это называется полной инвариантностью системы по отношению к данному возмущению. Ошибки останутся только за счет других второстепенных помех, имеющих в системе, но не введенных при расчете в состав уравнений (9.148) и (9.149). Однако эти ошибки выбираются основным замкнутым контуром системы, основанным на изменении отклонения регулируемой величины (независимо от причин его появления).

§ 9.6. Примеры определения несимметричных вынужденных колебаний

В примерах настоящего параграфа будут проиллюстрированы описанные в §§ 9.2 и 9.3 решения задач определения несимметричных вынужденных колебаний при наличии медленно меняющегося внешнего воздействия (пример 1) и влияние амплитуды и частоты внешнего вибрационного воздействия на положение границы устойчивости нелинейной системы по медленно меняющейся составляющей (пример 2).

Пример 1. Пусть имеется замкнутая система, состоящая из линейной части и нелинейного звена (рис. 9.24). На вход нелинейного

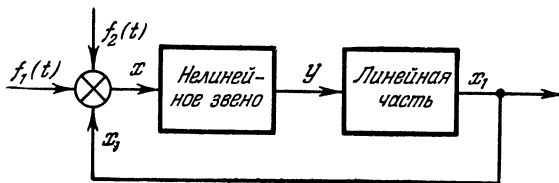


Рис. 9.24.

звена подаются медленно меняющееся внешнее воздействие $f_1(t)$, периодическое воздействие $f_2(t)$ и через обратную связь выходная величина x_1 системы.

Рассмотрим случай, когда линейная часть состоит из инерционного магнитного усилителя и двигателя, а нелинейным звеном является двухпозиционное поляризованное реле, управляющее через усилитель двигателем.

Линейная часть описывается уравнением

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x_1 = k y, \quad (9.158)$$

где T_1 — постоянная времени магнитного усилителя, T_2 — электро-механическая постоянная времени двигателя, k — коэффициент усиления линейной части.

Для нелинейного звена имеем статическую характеристику $y = F(x)$, представленную на рис. 9.25, а.

Кроме того, будем учитывать уравнение сложения воздействий на входе нелинейного звена

$$x = f_1(t) + f_2(t) - x_1. \quad (9.159)$$

Так как на входе нелинейного звена приложены медленно меняющиеся и периодическое воздействия, то решение для переменной x

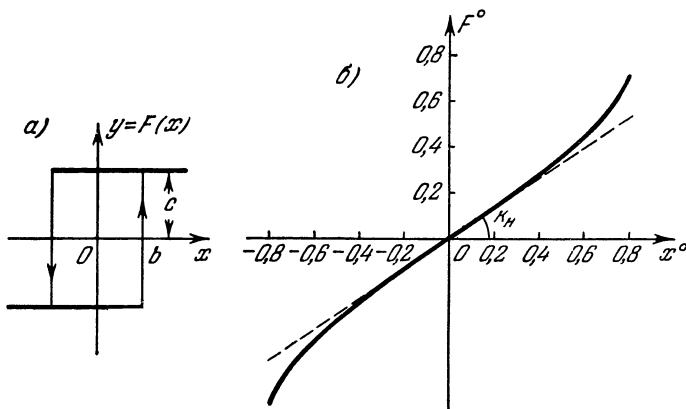


Рис. 9.25.

представляем в виде суммы постоянной составляющей x^0 (смещение центра колебаний) и периодической синусоидальной составляющей x^* , т. е.

$$x = x^0 + x^*, \quad x^* = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi). \quad (9.160)$$

Полагаем также, что внешнее периодическое воздействие синусоидально:

$$f_2(t) = B \sin \Omega_B t,$$

и, так же как и при определении симметричных колебаний, приводим его к виду

$$f_2(t) = \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) x^*. \quad (9.161)$$

Гармоническая линеаризация нелинейной функции $F(x)$ при учете несимметрии колебаний дает

$$y = F(x) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\Omega_B} px^*, \quad (9.162)$$

где в соответствии с (5.95) — (5.97) постоянная составляющая F^0 и коэффициенты q и q' имеют значения:

$$F^0 = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{A_B} - \arcsin \frac{b-x^0}{A_B} \right) \quad \text{при } A_B \geq b + |x^0|,$$

$$q = \frac{2c}{\pi A_B} \left(\sqrt{1 - \frac{(b+x^0)^2}{A_B^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b-x^0)^2}{A_B^2}} \right) \quad \text{при } A_B \geq b + |x^0|,$$

$$q' = -\frac{4cb}{\pi A_B^2} \quad \text{при } A_B \geq b + |x^0|.$$

Объединяя уравнение линейной части (9.158) и линеаризованное уравнение нелинейного звена (9.162), с учетом (9.159) и (9.161) получим линеаризованное уравнение всей системы:

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p] (x^0 + x^*) + k \left(F^0 + q x^* + \frac{q'}{\Omega_B} p x^* \right) =$$

$$= [T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p] \left[f_1(t) + \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) x^* \right]. \quad (9.163)$$

Уравнение (9.163) разбивается на два уравнения, соответственно для медленно меняющихся и для колебательных составляющих:

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p] x^0 + k F^0 =$$

$$= [T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p] f_1(t), \quad (9.164)$$

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p] \left[1 - \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] x^* +$$

$$+ k \left(q + \frac{q'}{\Omega_B} p \right) x^* = 0. \quad (9.165)$$

При подстановке в характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (9.165), $p = j\Omega_B$ и с учетом того, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

получим:

$$A_B \frac{-jT_1 T_2 \Omega_B^3 - (T_1 + T_2) \Omega_B^2 + j\Omega_B + k(q + jq')}{-jT_1 T_2 \Omega_B^3 - (T_1 + T_2) \Omega_B^2 + j\Omega_B} = B e^{-j\varphi}. \quad (9.166)$$

Рассмотрим вначале случай, когда на вход нелинейного звена подаются гармонические колебания с целью вибрационного сглаживания нелинейности, т. е. для обеспечения плавной, поддающейся обычной линеаризации зависимости выходной величины нелинейного звена от медленно меняющейся входной величины. Система в этом случае для медленно меняющихся процессов превращается в линейную. При этом частота и амплитуда внешнего периодического воздействия выбираются такими, чтобы периодическая составляющая выходной величины (или ее скорости) была малой по амплитудному значению, практически близкой к нулю.

На основании вышесказанного при $x_1^* \approx 0$ имеем равенство амплитуд внешнего периодического воздействия $f_2(t)$ и переменной x , т. е.

$$A_B \approx B \quad \text{при} \quad \varphi \approx 0.$$

В соответствии с этим формулу для постоянной составляющей нелинейной функции, входящей в (9.162), можно записать в виде

$$F^0 = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+x^0}{B} - \arcsin \frac{b-x^0}{B} \right) \quad \text{при} \quad B \geq b + |x^0|, \quad (9.167)$$

т. е. в этом случае сразу получается функция $F^0(x^0, B)$, что при заданном значении амплитуды внешнего периодического воздействия B дает сглаженную характеристику $F^0(x^0)$ для медленно меняющейся составляющей. Это позволяет по уравнению (9.164) исследовать медленно протекающие процессы.

Зададимся значениями $B=1$ в, $c=1$ в, $b=0,2$ в. Тогда для рассматриваемого случая получим сглаженную характеристику, представленную на рис. 9.25, б. Как видно, для широкого диапазона изменения x^0 сглаженная характеристика $F^0 = F^0(x^0)$ близка к линейной. Близость сглаженной характеристики к линейной для определенного вида нелинейности определяется формой периодического внешнего воздействия. Как было показано в § 1.9, за счет приложения специальной формы внешнего периодического воздействия можно получить линейную сглаженную характеристику для всего диапазона изменения x^0 .

Уравнение (9.166) в этом случае используется для определения желательной частоты Ω_B внешнего периодического воздействия с тем, чтобы обеспечить условие $A_B \approx B$. Из (9.166) следует, что для выполнения указанного условия требуется, чтобы модуль отношения

$$\frac{k(q + jq')}{-j\Omega_B(T_1T_2\Omega_B^2 - 1) - (T_1 + T_2)\Omega_B^2}$$

был малым по сравнению с единицей. Положим, что требуется выполнение условия

$$\frac{k\sqrt{q^2 + (q')^2}}{\sqrt{(T_1 + T_2)^2\Omega_B^4 + \Omega_B^2(T_1T_2\Omega_B^2 - 1)^2}} < 0,01. \quad (9.168)$$

Зададимся значениями: $T_1=0,02$ сек, $T_2=0,1$ сек, $k=10$ 1/сек. Учитывая ранее принятые значения $c=1$ в, $b=0,2$ в, $B=1$ в, при $x^0=0$ получим по формулам для коэффициентов гармонической линеаризации $q=1,25$, $q'=0,25$. Тогда значение частоты, удовлетворяющей неравенству (9.168), будет $\Omega_B \approx 100$ 1/сек и выше.

Обратимся к уравнению (9.164). На основании полученной сглаженной характеристики (рис. 9.25, б) для значений $|x^0| < 0,5$ в ее

можно принять за линейную и, следовательно, можно считать, что $F^0 = k_n x^0$. Тогда уравнение (9.164) переписывается в виде

$$\begin{aligned} [T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k k_n] x^0 = \\ = [T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p] f_1(t); \end{aligned} \quad (9.169)$$

с учетом того, что $x^0 = f_1(t) - x_1$, уравнение (9.169) можно записать относительно выходной величины системы в виде

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k k_n] x_1 = k k_n f_1(t). \quad (9.170)$$

Таким образом, благодаря вибрационному сглаживанию нелинейности вынужденными колебаниями для медленно меняющегося воздействия нелинейная система превратилась в линейную систему, исследование которой далее следует выполнять методами линейной теории.

В том случае, когда к системе приложено произвольное синусоидальное внешнее воздействие с частотой, при которой нельзя воспользоваться условием малости амплитуды на выходе системы, определение вынужденных колебаний несколько усложняется.

В рассматриваемом примере для определения вынужденных колебаний в этом случае необходимо решить уравнение (9.166) графическим или аналитическим методом относительно A_B и φ . При этом получатся зависимости $A_B(x^0, \Omega_B, B)$ и $\varphi(x^0, \Omega_B, B)$, а при заданных значениях амплитуды B и частоты Ω_B внешнего периодического воздействия — зависимости $A_B(x^0)$ и $\varphi(x^0)$. Подстановка A_B в формулу для постоянной составляющей нелинейной функции дает функцию смещения $F^0 = \Phi(x^0)$.

Пусть при всех ранее принятых значениях параметров рассматриваемой системы внешнее периодическое воздействие при амплитуде $B = 1$ *в* имеет частоту $\Omega_B = 10$ 1/сек вместо $\Omega_B \approx 100$ 1/сек, как это было в случае вибрационного сглаживания. Тогда в соответствии с (9.166) и с учетом значений q и q' получим:

$$A_B + \frac{20}{\pi A_B} \frac{[\sqrt{A_B^2 - (0,2 + x^0)^2} + \sqrt{A_B^2 - (0,2 - x^0)^2} - j \cdot 0,4]}{-12 + j8} = e^{-j\varphi}. \quad (9.171)$$

Решение уравнения (9.171) позволяет определить зависимость $A_B = A_B(x^0)$, например, способом, указанным на рис. 9.6; подстановка последней в формулу для F^0 дает функцию смещения $F^0 = \Phi(x^0)$. Выполнив линеаризацию функции смещения, можно будет исследовать медленно протекающие процессы по уравнению (9.164) как для линейной системы. Зная величины x^0 , соответствующие определенным значениям внешнего воздействия $f_1(t)$, по той же функции смещения можно определить значения соответствующих амплитуд, а по зависимости $\varphi = \varphi(x^0)$ — сдвиг по фазе вынужденных колебаний

для переменной x относительно внешнего периодического воздействия $f_2(t)$.

Пример 2. В качестве второго примера возьмем систему угловой стабилизации объекта в пространстве, рассмотренную в § 9.5 (пример 3). Структурная схема системы представлена на рис. 9.26. Здесь,

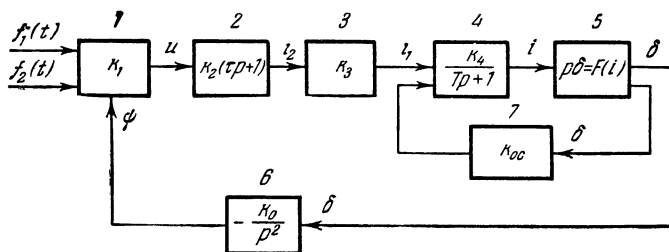


Рис. 9.26.

как и ранее, полагаем, что к чувствительному элементу — гироскопу I — приложено внешнее периодическое воздействие

$$f_2(t) = B \sin \Omega_B t. \quad (9.172)$$

Кроме того, в данном случае к гироскопу приложено медленно меняющееся воздействие $f_1(t)$. Под периодическим воздействием понимается некоторая вибрационная помеха, которая оказывает влияние на воспроизведение системой управляющего воздействия $f_1(t)$. В частности, рассмотрим, каким образом вибрационная помеха изменяет положение границы устойчивости нелинейной системы по медленно меняющемуся полезному сигналу.

Уравнение гироскопа теперь вместо (9.129) запишем в виде

$$u = k_1 [f_1(t) + f_2(t) - \psi]. \quad (9.173)$$

Уравнения других звеньев останутся прежними, т. е. имеют вид (9.130) — (9.134). Нелинейное звено — рулевая машинка — учитывается статической характеристикой (рис. 9.19).

Так как к системе приложено внешнее медленно меняющееся воздействие, то решение для переменной i будем искать в виде

$$i = i^0 + i^*, \quad i^* = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi), \quad (9.174)$$

где i^0 — медленно меняющаяся составляющая (полезный сигнал), i^* — периодическая (вибрационная) составляющая.

Гармоническая линеаризация нелинейной функции $F = p\delta$ (рис. 9.19) дает

$$F = F^0 + qi^*, \quad (9.175)$$

где постоянная составляющая и коэффициент гармонической линейризации, согласно формулам (5.121) и (5.122), имеют выражения:

$$F^0(A_B, i^0) = \frac{k_5 A_B}{\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{(b+i^0)^2}{A_B^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b-i^0)^2}{A_B^2}} \right) + \\ + \frac{k_5 i^0}{\pi} \left(\arcsin \frac{b-i^0}{A_B} + \arcsin \frac{b+i^0}{A_B} \right) + \\ + \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+i^0}{A_B} - \arcsin \frac{b-i^0}{A_B} \right) \quad (9.176)$$

при $A_B \geq b + |i^0|$;

$$q(A_B, i^0) = \frac{k_5}{\pi} \left(\arcsin \frac{b-i^0}{A_B} + \arcsin \frac{b+i^0}{A_B} - \frac{b-i^0}{A_B} \sqrt{1 - \frac{(b-i^0)^2}{A_B^2}} - \right. \\ \left. - \frac{b+i^0}{A_B} \sqrt{1 - \frac{(b+i^0)^2}{A_B^2}} \right) - \frac{2k_5 i^0}{\pi A_B} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-i^0)^2}{A_B^2}} - \sqrt{1 - \frac{(b+i^0)^2}{A_B^2}} \right) + \\ + \frac{2c}{\pi A_B} \left(\sqrt{1 - \frac{(b-i^0)^2}{A_B^2}} + \sqrt{1 - \frac{(b+i^0)^2}{A_B^2}} \right) \quad (9.177)$$

при $A_B \geq b + |i^0|$.

Учитывая уравнение гироскопа (9.173), уравнения других линейных звеньев (9.130) — (9.134) и уравнение нелинейного звена (9.175), получим гармонически линейризованное уравнение исследуемой системы

$$(Tp^4 + p^3)(i^0 + i^*) + (k_4 k_{0.c} p^2 + k k_0 \tau p + k k_0)(F^0 + q i^*) = \\ = k(\tau p + 1)p^3 [f_1(t) + f_2(t)], \quad (9.178)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_4$.

Вибрационную помеху $f_2(t)$ в соответствии с (9.172) представим в виде

$$f_2(t) = B \sin [(\Omega_B t + \varphi) - \varphi] = \\ = B \cos \varphi \sin (\Omega_B t + \varphi) - B \sin \varphi \cos (\Omega_B t + \varphi).$$

Учитывая, что

$$i^* = A_B \sin (\Omega_B t + \varphi) \quad \text{и} \quad p i^* = A_B \Omega_B \cos (\Omega_B t + \varphi),$$

получаем:

$$f_2(t) = \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) i^*. \quad (9.179)$$

Подставляя в уравнение (9.178) полученное значение $f_2(t)$, представим его в виде двух уравнений:

$$(Tp^4 + p^3) i^* + (k_4 k_{0.c} p^2 + k k_0 \tau p + k k_0) q i^* = \\ = k(\tau p + 1)p^3 \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) i^*; \quad (9.180)$$

$$(Tp^4 + p^3) i^0 + (k_4 k_{0.c} p^2 + k k_0 \tau p + k k_0) F^0 = \\ = k(\tau p + 1)p^3 f_1(t). \quad (9.181)$$

Первое из полученных уравнений соответствует вибрационной составляющей, второе — полезному сигналу управления.

Уравнение (9.180) позволяет определить амплитуду вибраций A_B на входе нелинейного звена в зависимости от амплитуды B и частоты Ω_B внешней периодической помехи, приложенной к системе, при заданных параметрах системы.

В характеристическом уравнении, соответствующем дифференциальному уравнению (9.180), сделаем подстановку $p = j\Omega_B$.

В результате указанной подстановки и с учетом того, что

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi},$$

получим:

$$\frac{A_B(T\Omega_B^4 - j\Omega_B^3 - k_4 k_{o.c} q \Omega_B^3 + j k k_0 \tau q \Omega_B + k k_0 q)}{-k(\tau j \Omega_B + 1) j \Omega_B^3} = B e^{-j\varphi}. \quad (9.182)$$

Комплексное соотношение (9.182) аналогично уравнению (9.139) с той лишь разницей, что коэффициент гармонической линейаризации q здесь зависит не только от амплитуды A_B , но и от смещения i^0 входной величины нелинейного звена.

Фазовые соотношения между входным периодическим воздействием $f_2(t)$ и переменной i не представляют практического интереса. Поэтому запишем уравнение, связывающее амплитуды A_B и B , из условия равенства модулей левой и правой частей комплексного выражения (9.182):

$$A_B^2 \frac{[T\Omega_B^4 + (k k_0 - k_4 k_{o.c} \Omega_B^3) q]^2 + [k k_0 \tau q \Omega_B - \Omega_B^3]^2}{k^2 \Omega_B^6 (\tau^2 \Omega_B^2 + 1)} = B^2. \quad (9.183)$$

Для исследуемой системы примем следующие численные значения параметров: $k = 18$ ма/град, $k k_0 = 9$ ма/град · сек², $k_4 k_{o.c} = 1,8$ ма/град, $T = 0,02$ сек, $\tau = 0,5$ сек, $\Omega_B = 12 \div 95$ 1/сек, $k_3 = 4$ град/сек · ма.

При принятых значениях параметров имеем:

$$k k_0 \ll k_4 k_{o.c} \Omega_B^3, \quad k k_0 \tau q \Omega_B \ll \Omega_B^3, \quad 1 \ll \tau^2 \Omega_B^2.$$

Тогда пренебрегая соответствующими членами, уравнение (9.183) запишем в виде

$$\frac{A_B}{k \tau \Omega_B^2} \sqrt{(T\Omega_B^4 - k_4 k_{o.c} q)^2 + \Omega_B^2} = B. \quad (9.184)$$

По формуле (9.184) выполняем построение зависимостей $A_B = A_B(B)$ для различных постоянных значений частоты $\Omega_B = \text{const}$. При этом, как показал расчет, значение i_0 , входящее в выражение для коэффициента q , практически не вносит заметного изменения в положение построенных кривых, и поэтому можно использовать графики, построенные при исследовании той же системы для случая $i^0 = 0$ в примере 3 § 9.5 (рис. 9.20, а).

Таковыми же остаются и графики зависимости изменения амплитуды вынужденных вибраций $\frac{A_B}{B}$ на входе нелинейного звена от частоты периодического воздействия Ω_B , приложенного к системе, при постоянных значениях амплитуды внешней помехи $\frac{B}{b} = \text{const}$ (рис. 9.20, б).

Для исследования устойчивости системы по полезному сигналу управления обратимся к уравнению (9.181). Данное уравнение можно привести к одной переменной i^0 , если построить функцию смещения $F^0(i^0)$. В рассматриваемом случае это будет семейство кривых при

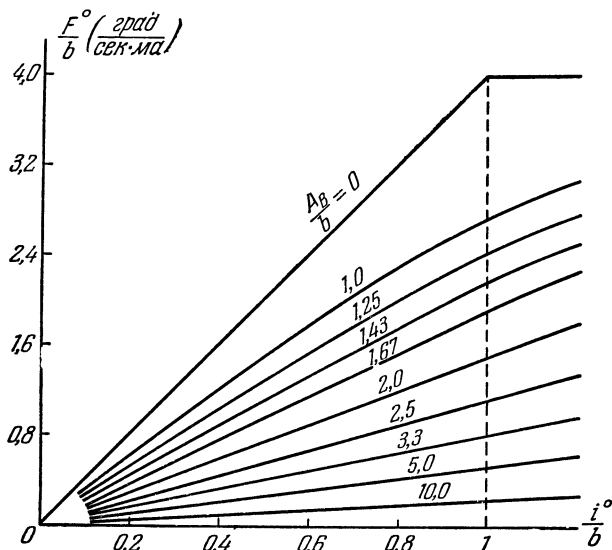


Рис. 9.27.

различных постоянных значениях амплитуды A_B вибраций на входе нелинейного звена. Функции смещения, построенные при $\frac{A_B}{b} = \text{const}$, согласно формуле (9.176), изображены на рис. 9.27.

Как видно, функции смещения близки к линейным. В соответствии с графиком на рис. 9.20, а амплитуда A_B может быть пересчитана в амплитуду помехи B на входе системы при заданной частоте Ω_B . По графику на рис. 9.20, б может быть определено соответствующее значение частоты помехи Ω_B при заданной амплитуде помехи B . Из графика на рис. 9.27 видно, что увеличение амплитуды помехи при заданной частоте приводит к уменьшению коэффициента усиления нелинейного звена по полезному сигналу. Максимальное значение коэффициента усиления имеет место при отсутствии вибрационной помехи, т. е. $k_{\text{дmax}} = k_B$.

На участке изменения полезного сигнала $0 < i^0 < b$ функцию смещения представим в линеаризованном виде

$$\frac{F^0}{b} = k_n \left(\frac{A_B}{B} \right) \frac{i^0}{b}, \quad (9.185)$$

где k_n — коэффициент усиления полезного сигнала нелинейного звена (тангенс угла наклона функции смещения), зависящий от амплитуды вибраций A_B . Но так как A_B зависит от B и Ω_B , то формулу (9.185) можно записать в виде

$$\frac{F^0}{b} = k_n \left(\frac{B}{b}, \Omega_B \right) \frac{i^0}{b}. \quad (9.186)$$

Для того чтобы определить зависимость k_n от $\frac{B}{b}$ и Ω_B , на основании функций смещения (рис. 9.27) построим кривую $k_n = f\left(\frac{A_B}{b}\right)$ (рис. 9.28). Полученная кривая позволяет нанести соответствующий

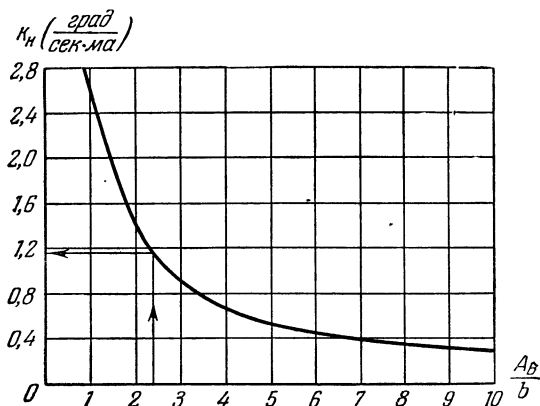


Рис. 9.28.

масштаб для k_n на графиках рис. 9.20, б и, таким образом, с помощью тех же кривых $\frac{A_B}{b} = f(\Omega_B)$ найти функцию $k_n = k_n\left(\frac{B}{b}, \Omega_B\right)$. На основании полученной зависимости можно определить теперь влияние амплитуды и частоты вибрационной помехи на устойчивость нелинейной системы по полезному сигналу.

Действительно, используя (9.186), можно величину F^0 , входящую в уравнение (9.181), представить в виде $F^0 = k_n \left(\frac{B}{b}, \Omega_B \right) i^0$ и, таким образом, уравнение (9.181) записать в виде

$$[Tp^4 + p^3 + k_n(k_4 k_{0.c} p^2 + k k_0 \tau p + k k_0)] i^0 = k(\tau p + 1) p^3 f_1(t). \quad (9.187)$$

Полученное уравнение линейное, и исследование устойчивости системы по полезному сигналу можно выполнить с помощью критерия

устойчивости Гурвица. Характеристическое уравнение, соответствующее (9.187), будет

$$Tp^4 + p^3 + k_n(k_4k_{0.c}p^2 + kk_0\tau p + kk_0) = 0. \quad (9.188)$$

Приравнивая предпоследний определитель Гурвица нулю, получим уравнение, определяющее границу устойчивости:

$$k_n\tau(k_4k_{0.c} - Tkk_0\tau) = 1. \quad (9.189)$$

Таким образом, значение коэффициента усиления, соответствующего границе устойчивости, определится соотношением

$$k_{н.гр} = \frac{1}{\tau(k_4k_{0.c} - Tkk_0\tau)}, \quad (9.190)$$

что при подстановке принятых значений параметров для исследуемой системы дает $k_{н.гр} = 1,17 \text{ град/сек} \cdot \text{ма}$.

Проводя на рис. 9.20, б линию, соответствующую $k_{н.гр} = 1,17$, по точкам пересечения указанной линии с кривыми $\frac{A_B}{b} = f(\Omega_B)$ получаем

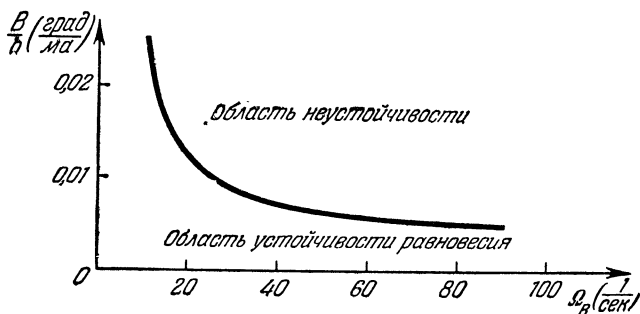


Рис. 9.29.

соответствующие границе устойчивости значения $\frac{A_B}{b}$ и Ω_B . Используя кривые на рис. 9.20, а, величины $\frac{A_B}{b}$ пересчитываем в значения $\frac{B}{b}$. В результате строим (рис. 9.29) границу устойчивости на плоскости с координатами Ω_B (частота) и B (амплитуда вибрационной помехи).

При больших значениях полезного сигнала управления i^0 , когда графики функции смещения нельзя принять за прямые, последние можно подвергнуть повторной гармонической линеаризации (см. задачу 3 в § 9.3). В этом случае система и по полезному сигналу будет вести себя как существенно нелинейная, но с характеристикой нелинейного звена, деформированной под действием вибрационной помехи.

§ 9.7. Пример учета высших гармоник вынужденных колебаний

Рассмотрим [292] релейную систему автоматического регулирования третьего порядка с релейной характеристикой общего вида и с постоянным по времени запаздыванием τ (рис. 9.30, а).

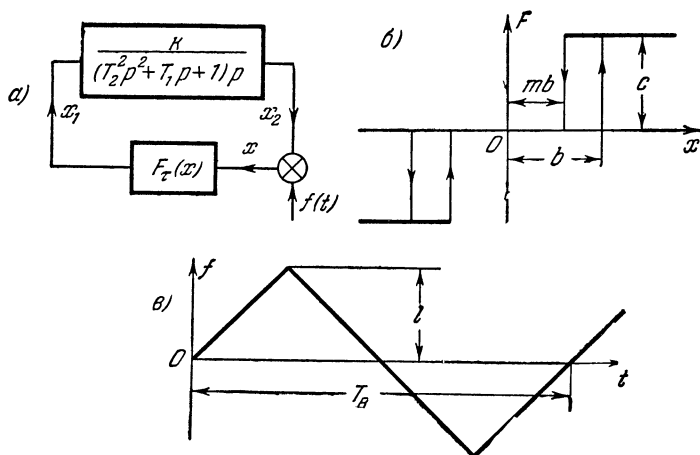


Рис. 9.30.

В соответствии с заданной схемой системы запишем ее уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) p x_2 &= k x_1, \\ x_1 &= F_\tau(x) = e^{-\tau p} F(x), \quad x = f(t) - x_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.191)$$

Нелинейность $F(x)$ показана на рис. 9.30, б. Приведя уравнения (9.191) к виду (9.2), получим:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) p x + k e^{-\tau p} F(x) = (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) p f(t). \quad (9.192)$$

Пусть внешнее воздействие $f(t)$ имеет форму пилы (рис. 9.30, в), которая представляется в виде ряда Фурье

$$f(t) = \frac{8l}{\pi^2} \left(\sin \Omega_3 t - \frac{1}{9} \sin 3\Omega_3 t + \dots \right). \quad (9.193)$$

Согласно (9.62) имеем:

$$B_1 = \frac{8l}{\pi^2}, \quad B_3 = -\frac{8l}{9\pi^2}, \quad \dots, \quad \Omega_3 = \frac{2\pi}{T_3}. \quad (9.194)$$

Ограничимся в дальнейшем учетом третьей гармоники. Найдем сначала первое приближение только по первой гармонике, отыскивая

решение в виде

$$x_B = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi).$$

Уравнение первого приближения для вынужденных колебаний, согласно (9.14) и (9.192), будет

$$A_B \left\{ 1 - \frac{ke^{-j\tau\Omega_B} [q(A_B) + jq'(A_B)]}{j\Omega_B (1 - T_2^2\Omega_B^2) - T_1\Omega_B^2} \right\} = B_1 e^{-j\varphi}, \quad (9.195)$$

где, согласно рис. 9.30, b и формулам (3.5) и (3.6):

$$q = \frac{2c}{\pi A_B} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{A_B^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A_B^2}} \right), \quad q' = -\frac{2cb}{\pi A_B^2} (1 - m). \quad (9.196)$$

Отсюда графическим (рис. 9.1) или аналитическим (формулы (9.17) и (9.18)) способом определяются амплитуда A_B и фаза φ первого приближения.

Найдем амплитуду и фазу третьей гармоники. Для этого, согласно (9.77), следует предварительно найти коэффициенты r_3 и s_3 по формулам (9.71). Однако для заданной нелинейности (рис. 9.30, б) они уже были вычислены в § 8.3. Воспользуемся поэтому готовыми формулами (8.106):

$$\left. \begin{aligned} r_3 &= \frac{2c}{3\pi A_B} \left[\left(1 - 4 \frac{b^2}{A_B^2} \right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_B^2}} + \left(1 - 4 \frac{m^2 b^2}{A_B^2} \right) \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{A_B^2}} \right], \\ s_3 &= -\frac{2cb}{\pi A_B^2} \left[1 - \frac{4b^2}{3A_B^2} - m \left(1 - \frac{4m^2 b^2}{3A_B^2} \right) \right] (A_B \geq b). \end{aligned} \right\} \quad (9.197)$$

Значения r_3 и s_3 легко получить в числовом виде, так как все входящие сюда величины уже известны.

Относительная амплитуда δ_3 и фаза φ_3 третьей гармоники вынужденных колебаний (с учетом третьей гармоники внешнего воздействия), согласно (9.77), (9.192) и (9.194), будут

$$\left. \begin{aligned} \delta_3 &= \left| \frac{ke^{-j3\tau\Omega_B} (r_3 + js_3)}{j \cdot 3\Omega_B (1 - 9T_2^2\Omega_B^2) - 9T_1\Omega_B^2} e^{j3\varphi} + \frac{8l}{9\pi^2 A_B} \right|, \\ \varphi_3 &= \arg \left[\frac{ke^{-j3\tau\Omega_B} (r_3 + js_3)}{j \cdot 3\Omega_B (1 - 9T_2^2\Omega_B^2) - 9T_1\Omega_B^2} e^{j3\varphi} + \frac{8l}{9\pi^2 A_B} \right] - \pi. \end{aligned} \right\} \quad (9.198)$$

Значения δ_3 и φ_3 легко вычисляются, если параметры системы заданы.

В результате известны первая и третья гармоники вынужденных колебаний, т. е.

$$x = A_B [\sin(\Omega_B t + \varphi) + \delta_3 \sin(3\Omega_B t + \varphi_3)]. \quad (9.199)$$

Однако первая гармоника здесь была найдена независимо от наличия третьей и с учетом только первой гармоники внешнего воздей-

ствия (т. е. с заменой пилообразного воздействия на синусоидальное), в то время как при определении третьей гармоники уже учитывалась пилообразная форма воздействия.

Следовательно, теперь осталось уточнить первую гармонику в выражении (9.199), т. е. вместо A_b и φ найти новые уточненные значения A_1 и φ_1 с учетом наличия третьей гармоники как в самом решении, так и во внешнем пилообразном воздействии. Для этого нужно, как видно из (9.80), вычислить добавки к коэффициентам гармонической линеаризации Δq и $\Delta q'$ по формулам (9.69), а именно:

$$\Delta q = I_{31}\delta_3 \cos \psi_3 + I_{32}\delta_3 \sin \psi_3, \quad \Delta q' = I_{33}\delta_3 \cos \psi_3 + I_{34}\delta_3 \sin \psi_3, \quad (9.200)$$

где

$$\psi_3 = \varphi_3 - 3\varphi.$$

Величины I_{31} , I_{32} , I_{33} , I_{34} для данной нелинейности (рис. 9.30, б) уже были найдены в § 8.3. Они выражаются, согласно (8.108), следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{31} &= \frac{2cb^2}{\pi A_b^4} \left(\frac{3A_b^2 - 4b^2}{\sqrt{A_b^2 - b^2}} + m^2 \frac{3A_b^2 - 4m^2b^2}{\sqrt{A_b^2 - m^2b^2}} \right), \\ I_{32} &= \frac{2cb}{\pi A_b^2} \left[\left(1 - 4 \frac{b^2}{A_b^2} \right) - m \left(1 - 4 \frac{m^2b^2}{A_b^2} \right) \right], \\ I_{33} &= \frac{2cb}{\pi A_b^2} \left[\left(3 - 4 \frac{b^2}{A_b^2} \right) - m \left(3 - 4 \frac{m^2b^2}{A_b^2} \right) \right], \\ I_{34} &= \frac{2c}{\pi A_b} \left[\left(1 - 4 \frac{b^2}{A_b^2} \right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_b^2}} + \left(1 - 4 \frac{m^2b^2}{A_b^2} \right) \sqrt{1 - \frac{m^2b^2}{A_b^2}} \right]. \end{aligned}$$

Все входящие сюда величины уже известны. Поэтому добавки Δq и $\Delta q'$ легко вычисляются по формулам (9.200) в числовом виде.

Вычислив их, согласно (9.80) и (9.192), находим:

$$Q_1(p) = (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)p + ke^{-\tau p} \left(\Delta q + \frac{\Delta q'}{\Omega_B} p \right). \quad (9.201)$$

В результате на основании (9.81) получаем уравнение для определения уточненных значений амплитуды A_1 и фазы φ_1 первой гармоники вынужденных колебаний в виде

$$A_1 \left\{ 1 + D - \frac{ke^{-j\tau\Omega_B} [q(A_1) + jq'(A_1)]}{j\Omega_B(1 - T_2^2\Omega_B^2) - T_1\Omega_B^2} \right\} = B_1 e^{-j\varphi_1}, \quad (9.202)$$

где

$$D = \frac{ke^{-j\tau\Omega_B} (\Delta q + j\Delta q')}{j\Omega_B(1 - T_2^2\Omega_B^2) - T_1\Omega_B^2},$$

$$q = \frac{2c}{\pi A_1} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{A_1^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2b^2}{A_1^2}} \right), \quad q' = -\frac{2cb}{\pi A_1^2} (1 - m).$$

Как видим, уравнение (9.192) относительно уточненных значений A_1 и φ_1 имеет в общем тот же вид, что и прежнее уравнение (9.195) относительно значений первого приближения A_b и φ . Поэтому, решая его теперь тем же методом, каким решалось прежнее уравнение (9.195), найдем уточненные значения A_1 и φ_1 .

Разница между новым уравнением (9.202) и прежним (9.195) состоит в том, что здесь вместо вещественной единицы стоит комплексная величина $1 + D$, которая и вносит искомое уточнение первой гармоники вынужденных колебаний за счет учета третьей гармоники внешнего воздействия и самого решения.

В результате вместо (9.199) получим более точное решение для вынужденных колебаний в виде

$$x = A_1 \sin(\Omega_b t + \varphi_1) + \delta_3 A_b \sin(3\Omega_b t + \varphi_3). \quad (9.203)$$

В случае необходимости можно уточнить и величины δ_3 и φ_3 для третьей гармоники, вычислив их теперь по формулам (9.198) и (9.197) с заменой в них старых значений A_b и φ на новые значения A_1 и φ_1 , что дает новое уточненное решение

$$x = A_1 [\sin(\Omega_b t + \varphi_1) + \delta'_3 \sin(3\Omega_b t + \varphi'_3)].$$

Практически же в большинстве случаев будет вполне достаточным предыдущее решение (9.203).

ГЛАВА X

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 10.1. Колебательные системы при медленно меняющихся случайных воздействиях

Во многих случаях анализа и синтеза систем автоматического управления и регулирования приходится сталкиваться с необходимостью исследования случайных процессов, когда к системе приложены внешние воздействия случайного характера, как помехи, так и полезные управляющие воздействия. В данной главе будут даны некоторые приближенные способы исследования случайных процессов в нелинейных автоматических системах, близкие к методам, излагавшимся в предыдущих главах, и в то же время наиболее эффективные с точки зрения проведения инженерного расчета.

Настоящий параграф посвящается двум видам нелинейных систем при медленно меняющихся случайных воздействиях:

- 1) системы, работающие в автоколебательном режиме;
- 2) системы, работающие в режиме вынужденных колебаний.

Начнем с нелинейных систем, работающих в автоколебательном режиме. Их исследование базируется на материале главы V, где речь шла о прохождении медленно меняющихся сигналов через автоколебательные системы [311]. Только теперь эти сигналы будут случайными функциями времени.

Пусть нелинейная автоматическая система описывается уравнением, удовлетворяющим всем условиям § 2.3:

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (10.1)$$

где в левой части фигурируют прежние обозначения, относящиеся к системам первого класса (см. § 1.2), а в правой части находится внешнее воздействие $f(t)$, представляющее собой случайную функцию времени. Будем считать при этом, что здесь имеет место стационарный случайный процесс, причем изменения $f(t)$ в пределах периода автоколебаний незначительны, т. е. соблюдаются условия медленной изменчивости внешнего воздействия, указанные в § 5.1, с вероятностью, близкой к единице. Другими словами, предполагается, что

спектр частот случайного воздействия $f(t)$ лежит значительно ниже частоты автоколебаний.

Поэтому решение, как и в главе V, будем искать в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где } x^* = A \sin \Omega t, \quad (10.2)$$

причем как сама медленно меняющаяся составляющая $x^0(t)$, так и амплитуда колебательной составляющей A являются случайными величинами, зависящими от характера изменения случайного внешнего воздействия $f(t)$.

Здесь важно отметить следующее. Если, например, случайная величина $f(t)$ имеет нормальный закон распределения, то при прохождении через нелинейность $F(x, px)$ появятся искажения этого закона в виде дополнительных составляющих, которые и будут иметь место в действительности у переменной F . Однако при прохождении через линейную часть $\frac{R(p)}{Q(p)}$, обладающую свойством фильтра (§ 2.3), эти дополнительные составляющие будут подавляться (подобно подавлению высших гармоник, см. § 2.2), так что закон распределения для случайной переменной x снова станет близок к нормальному. Это весьма важное качество рассматриваемых в данной книге нелинейных автоматических систем будет использовано для упрощения исследования в дальнейшем.

Итак, на тех же основаниях, что и в главе V, произведем гармоническую линеаризацию нелинейности по формуле

$$F(x, px) = F^0 + qx^* + \frac{q'}{\Omega} px^*, \quad (10.3)$$

где

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) d\psi, \quad (10.4)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A \sin \psi, A \Omega \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Выражения F^0 , q и q' для конкретных нелинейностей берутся в готовом виде из §§ 5.6 — 5.9.

Подставив (10.4) в заданное уравнение системы (10.1), разобьем его на два уравнения:

$$Q(p) x^0 + R(p) F^0 = S(p) f(t), \quad (10.6)$$

$$Q(p) x^* + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega} p \right) x^* = 0 \quad (10.7)$$

соответственно для медленно меняющихся и для колебательных составляющих. Необходимо только заметить, что эти уравнения не решаются отдельно друг от друга и являются взаимосвязанными, так как величины F^0 , q и q' , как видно из (10.4) и (10.5), зависят в общем случае от всех трех неизвестных x^0 , A , Ω или во всяком случае от первых двух из них.

По уравнению (10.7) определяются зависимости амплитуды A и частоты Ω от медленно меняющейся случайной составляющей x^0 (пока еще неизвестной), которая входит в выражения коэффициентов гармонической линейаризации q и q' . Так определяются зависимости

$$A(x^0) \text{ и } \Omega(x^0), \quad (10.8)$$

для чего используется любой из способов § 2.3. На примерах это было проиллюстрировано в главе VI.

Найденные зависимости (10.8) подставляются в получаемое из (10.4) выражение

$$F^0(x^0, A, \Omega), \quad (10.9)$$

в результате чего находится функция смещения ¹⁾

$$F^0 = \Phi(x^0), \quad (10.10)$$

которая, вообще говоря, является тоже нелинейной, но существенно отличается от заданной нелинейности $F(x, px)$ тем, что представляет собой обычно сглаженную кривую (рис. 10.1). Эта сглаженная характеристика во многих случаях хорошо поддается обычному способу линейаризации, т. е. замене ее на прямую, касательную в начале координат (рис. 10.1), а именно:

$$F^0 = k_n x^0, \quad \text{где} \\ k_n = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \operatorname{tg} \beta. \quad (10.11)$$

В случае нечетно-симметричных нелинейностей, как было показано в главе V, можно считать, что

$$k_n = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}, \quad (10.12)$$

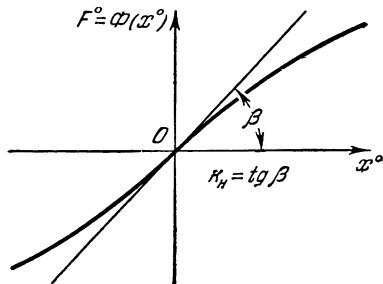


Рис. 10.1.

т. е. использовать непосредственно функцию (10.9), не приводя ее к виду (10.10).

В результате такого обычного способа линейаризации сглаженной при помощи автоколебаний нелинейной характеристики (10.10)

¹⁾ Сглаженная при помощи автоколебаний нелинейная характеристика для медленно меняющихся составляющих процесса.

вместо (10.6) получается чисто линейное дифференциальное уравнение для медленно меняющейся составляющей:

$$[Q(p) + k_R R(p)] x^0 = S(p) f(t), \quad (10.13)$$

где $f(t)$ — стационарная случайная функция времени.

Заметим, что ниже в § 10.4 будет рассмотрен и такой случай, когда обычная линеаризация (10.11) либо невозможна, либо нежелательна.

Итак, для определения составляющей $x^0(t)$ нужно решать линейное уравнение (10.13) со стационарной случайной функцией $f(t)$ в правой части.

Будем считать, что задана спектральная плотность $s_f(\omega)$ внешнего воздействия $f(t)$, а математическое ожидание его равно нулю.

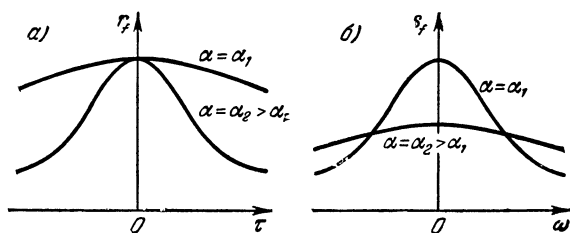


Рис. 10.2.

Если же будет задана не спектральная плотность, а корреляционная функция $r_f(\tau)$, то всегда можно определить

$$s_f(\omega) = 2 \int_0^{\infty} r(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (10.14)$$

Например, часто применяется выражение корреляционной функции внешнего воздействия в виде (рис. 10.2, а)

$$r_f(\tau) = e^{-\alpha |\tau|}, \quad (10.15)$$

для которой по формуле (10.14) имеем (рис. 10.2, б):

$$s_f(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (10.16)$$

Имея определенную спектральную плотность $s_f(\omega)$ внешнего воздействия $f(t)$, можно по известной формуле на основании уравнения (10.13) вычислить спектральную плотность медленно меняющейся случайной составляющей x^0 в виде

$$s_{x^0}(\omega) = \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega) + k_R R(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega), \quad (10.17)$$

а зная это, можно также известным путем найти дисперсию (или среднее значение квадрата) медленно меняющейся составляющей

$$\sigma_{x^0}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s_{x^0}(\omega) d\omega, \quad (10.18)$$

причем квадратный корень из нее, т. е. σ_{x^0} , будет представлять собой среднеквадратическое значение медленно меняющейся составляющей $x^0(t)$. Если эта последняя по своему смыслу является ошибкой системы, то в виде σ_{x^0} будет получена таким образом среднеквадратическая ошибка данной системы по медленно меняющейся составляющей.

Обычно в реальных задачах спектральная плотность (10.17) переменной x^0 представляет собой отношение многочленов вида

$$s_{x^0}(\omega) = h \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2}, \quad (10.19)$$

где h — постоянный множитель.

При этом многочлен $H(j\omega)$ при замене $j\omega = p$ удовлетворяет критерию устойчивости¹⁾, а многочлен $G(\omega)$ имеет степень ниже $2n$, если n — степень $H(j\omega)$.

Поскольку знаменатель (10.19) является четной функцией, то все члены числителя с нечетными степенями ω дают при интегрировании (10.18) нуль. Следовательно, в многочлене $G(\omega)$ надо рассматривать только четные степени ω , а все нечетные степени можно отбросить.

Итак,

$$\sigma_{x^0}^2 = h \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega, \quad (10.20)$$

где многочлены под интегралом имеют вид

$$\left. \begin{aligned} H(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n, \\ G(\omega) &= b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \dots + b_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

Интегралы

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega$$

¹⁾ Это объясняется тем, что в состав многочлена $H(j\omega)$, как видно из формулы (10.17), обязательно входит знаменатель передаточной функции замкнутой системы, т. е. левая часть характеристического уравнения данной системы, с заменой $p = j\omega$.

заранее уже вычислены для всех степеней n до седьмой включительно (см., например, приложение в книге [322]). Приведем готовые формулы:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{b_0}{2a_0a_1}, \quad I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1}, \quad I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)}, \\ I_4 &= \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3 - a_1a_2)}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)}, \\ I_5 &= \frac{N_5}{2a_0\Delta_5}, \\ N_5 &= b_0(-a_0a_4a_5 + a_1a_1^2 + a_1^2a_5 - a_2a_3a_4) + \\ &\quad + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) + a_0b_2(a_0a_5 - a_1a_4) + \\ &\quad + a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) + \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3), \\ \Delta_5 &= a_0^2a_5^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + a_1^2a_4^2 + \\ &\quad + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

В итоге получаем следующую формулу для практических расчетов:

$$\sigma_{x^0}^2 = hI_n. \quad (10.23)$$

Существует и другой способ (приближенный) для вычисления интеграла от спектральной плотности, основанный на использовании ее изображения в логарифмических координатах с заменой кривых ломаными линиями (аналогично логарифмическим частотным характеристикам).

После того как таким образом будет вычислена дисперсия $\sigma_{x^0}^2$, а значит, и среднеквадратическое значение σ_{x^0} медленно меняющейся случайной составляющей $x^0(t)$ искомого решения (10.2), можно будет определить и вероятностные характеристики амплитуды A автоколебательной составляющей, которая, согласно (10.8), уже была выражена через медленно меняющуюся составляющую x_0 . Такими характеристиками будут математическое ожидание, т. е. среднее значение амплитуды \tilde{A} , и дисперсия σ_A^2 , или среднеквадратическое отклонение величины амплитуды σ_A , характеризующее собой рассеяние значений амплитуды около ее среднего значения \tilde{A} . По известным формулам находим:

$$\tilde{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x^0) w(x^0) dx^0, \quad (10.24)$$

$$\sigma_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(x^0) - \tilde{A}]^2 w(x^0) dx^0, \quad (10.25)$$

где $w(x^0)$ — дифференциальный закон распределения случайной величины x^0 . Принимая его нормальным и учитывая, что математическое ожидание величины x^0 равно нулю¹⁾, получаем (рис. 10.3):

$$w(x^0) = \frac{1}{\sigma_{x^0} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^0}{\sigma_{x^0}} \right)^2}. \quad (10.26)$$

Заметим, что пределы интегрирования в формулах (10.24) и (10.25) фактически не будут бесконечными, так как пределы изменения величины x^0 в выражении $A(x^0)$, при которых имеют место автоколебательный процесс и сглаженная характеристика, ограничены.

Пример применения изложенного здесь метода исследования рассмотрен ниже в § 10.5.

Тот же метод решения задачи можно распространить и на другие системы других классов (§ 1.2), в том числе и на системы с несколькими нелинейностями, подобно тому как это делалось при изучении других явлений в предыдущих главах.

Обратимся теперь к *нелинейным системам, работающим в режиме вынужденных колебаний*. Их исследование будет базироваться на материале § 9.2. Пусть к системе в разных местах приложены два внешних воздействия, причем уравнение системы имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S_1(p)f_1(t) + S_2(p)f_2(t), \quad (10.27)$$

где $f_1(t)$ — медленно меняющееся внешнее воздействие, представляющее собой стационарный случайный процесс, а $f_2(t)$ — неслучайное периодическое внешнее воздействие:

$$f_2(t) = B \sin \Omega_b t, \quad (10.28)$$

причем B и Ω_b — заданные числа. Такое периодическое воздействие может, например, употребляться в реальных системах для вибрационного сглаживания нелинейностей. Другим примером могут служить вибрационные помехи, происходящие, например, от вибраций корпуса управляемого объекта или по другим причинам. Нелинейные системы при наличии случайных помех будут рассмотрены ниже в § 10.3.

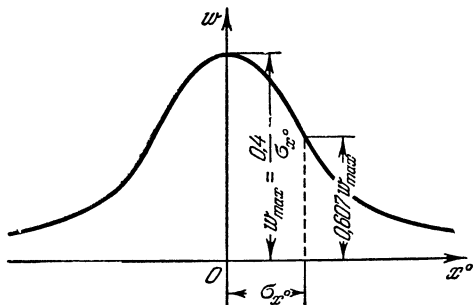


Рис. 10.3.

¹⁾ Задачу можно, конечно, решить и в том случае, когда математические ожидания величин f и x^0 не равны нулю.

Полагая, что имеют место одночастотные вынужденные колебания (режим захватывания), ищем решение в виде

$$x = x^0 + x^*, \quad \text{где } x^* = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi), \quad (10.29)$$

причем $x^0(t)$ — медленно меняющаяся случайная составляющая. Амплитуда A_B и фаза φ колебательной составляющей, зависящие от x^0 , будут также случайными величинами.

Произведя гармоническую линеаризацию нелинейностей по формулам (9.25) и (9.26) и используя выражение (9.28), разобьем заданное уравнение системы (10.27) на два:

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0 = S_1(p)f_1(t), \quad (10.30)$$

$$\left[Q(p) - S_2(p) \frac{B}{A_B} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_B} p \right) \right] x^* + \\ + R(p) \left(q + \frac{q'}{\Omega_B} p \right) x^* = 0. \quad (10.31)$$

Второе из этих уравнений, так же как и в § 9.2, представляется в виде

$$A_B \frac{Q(j\Omega_B) + R(j\Omega_B)(q + jq')}{S_2(j\Omega_B)} = B e^{-j\varphi}. \quad (10.32)$$

Отсюда любым из двух способов, описанных в § 9.1, определяются зависимости амплитуды A_B и фазы φ вынужденных колебаний от случайной медленно меняющейся составляющей x^0 (пока еще неизвестной, входящей в состав коэффициентов q и q') и от заданных чисел B и Ω_B , а именно:

$$A_B(x^0, \Omega_B, B), \quad \varphi(x^0, \Omega_B, B). \quad (10.33)$$

Обратимся теперь к первому из выражений (9.26), которое имеет вид

$$F^0(x^0, A_B, \Omega_B), \quad (10.34)$$

и подставим в него выражение для амплитуды (10.33). Тогда получим функцию смещения¹⁾:

$$F^0 = \Phi(x^0, \Omega_B, B). \quad (10.35)$$

Далее применяем обычную линеаризацию (если она невозможна или нежелательна, надо обращаться к способам, изложенным в § 10.4) этой функции смещения (рис. 10.1) в виде (10.11) или (10.12), где F^0 суть выражения (10.35) и (10.34). Существенная особенность здесь состоит в том, что согласно (10.11) и (10.35) коэффициент k_n будет зависеть от амплитуды B и частоты Ω_B внешнего вибрационного воздействия:

$$k_n(B, \Omega_B), \quad (10.36)$$

¹⁾ Сглаженная при помощи вынужденных колебаний нелинейная характеристика для медленно меняющейся составляющей процесса (рис. 10.1).

в то время как при автоколебаниях он зависел только от параметров самой системы.

В случае полезных применений принудительных вибраций это дает в руки инженера большие возможности при проектировании системы, а в случае наличия вибрационных помех это может привести к вредному влиянию вибрации на устойчивость всей системы, как было проиллюстрировано в § 9.6.

Итак, на основании (10.30) можно записать теперь чисто линейное уравнение для определения медленно меняющейся случайной составляющей

$$[Q(p) + k_n R(p)] x^0 = S_1(p) f_1(t). \quad (10.37)$$

Дальнейшее решение задачи идет в точности по тем же формулам, которые следовали за уравнением (10.13) до формулы (10.26) включительно. Только в формулах (10.24) и (10.25) нужно заменить A на A_n , определяемое первым из выражений (10.33). При этом, в отличие от прежнего, все результаты решения будут зависеть не только от параметров системы и спектральной плотности случайного воздействия $f_1(t)$, но также и от заданных величин амплитуды B и частоты Ω_n внешнего периодического воздействия $f_2(t)$.

§ 10.2. Статистическая линеаризация нелинейностей

Простота решения задачи в предыдущем параграфе была обусловлена тем, что исследовались медленно меняющиеся случайные процессы в системе, нелинейные характеристики которой были сглажены при помощи автоколебаний или вынужденных колебаний, а затем подвергнуты обычной линеаризации. Поэтому можно было целиком применить линейную теорию случайных процессов. Нелинейная же часть решения задачи совпадала с таковой в главе V и в § 9.2, причем заключалась она в отыскании самой сглаженной характеристики (функции смещения) и зависимости амплитуды и частоты колебательной составляющей от величины медленно меняющейся составляющей.

Теперь обратимся к решению других задач, когда автоколебания или вынужденные колебания отсутствуют, либо когда они есть, но функцию смещения невозможно или нежелательно подвергать обычной линеаризации, либо, наконец, когда в системе имеют место высокочастотные случайные помехи.

Во многих таких случаях, рассматривая нелинейные автоматические системы тех же классов, что и во всех предыдущих главах, но уже при случайных воздействиях, удобно бывает применять так называемую статистическую линеаризацию нелинейностей, разработанную И. Е. Казаковым [309]. Сущность ее заключается в следующем.

Как и в предыдущем параграфе, для оценки динамической точности автоматических систем при случайных воздействиях будем определять два первых вероятностных момента случайных процессов:

математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднеквадратическое отклонение). Последнее, как было видно, эквивалентно определению спектральной плотности или корреляционной функции.

Если нелинейная система описывается дифференциальным уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (10.38)$$

то схематически можно себе представить прохождение сигналов так, как показано на рис. 10.4. Проходя через линейную часть, случайный

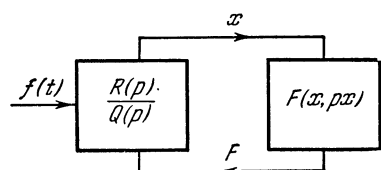


Рис. 10.4.

процесс $f(t)$, заданный двумя первыми вероятностными моментами, преобразуется в переменную x , которую также можно определить двумя первыми моментами. Однако определение дальнейшего преобразования случайного процесса $x(t)$ в нелинейном звене $F(x, px)$ существенно связано с высшими вероятностными моментами

(подобно тому как в § 2.2 приходилось иметь дело с высшими гармониками). Ввиду замкнутости контура системы это обстоятельство накладывает отпечаток и на все процессы в данной системе. Поэтому точное решение задачи в большинстве случаев оказывается недоступным.

Достаточно хорошее для целей инженерных расчетов первое приближение применительно к рассматриваемым классам систем при тех же ограничениях, что и раньше (см. §§ 2.2 и 2.3), дает пренебрежение высшими моментами, т. е. замена нелинейного звена эквивалентным линейным, которое одинаково с данным нелинейным преобразует два первых вероятностных момента: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию (или среднеквадратическое отклонение). Это и называется статистической линеаризацией нелинейности.

Эта операция по общей идее (но не по конкретному содержанию) аналогична тому, как в главе V (см. также формулу (10.3)) нелинейное звено при помощи гармонической линеаризации заменялось эквивалентным линейным, которое одинаково с данным нелинейным преобразует постоянную (или медленно меняющуюся) составляющую и первую гармонику колебательной составляющей, т. е. принимались во внимание два первых члена ряда Фурье и отбрасывались все высшие гармоники.

Итак, представим переменную x под знаком нелинейности $F(x, px)$ в виде

$$x = \tilde{x} + x^{c.l.}, \quad (10.39)$$

где \tilde{x} — математическое ожидание (среднее значение), которое является обычной (регулярной) функцией времени, и $x^{c.l.}$ — случайная составляющая с нулевым математическим ожиданием (центрированная слу-

чайная функция времени). Это представление аналогично тому, которое давалось в главе V при гармонической линеаризации (см. также формулу (10.2)), но оно имеет совсем другой, вероятностный, смысл. Далее, и переменную $F(x, px)$ тоже представим в виде

$$F(x, px) = \tilde{F} + q^{c.l} x^{c.l}, \quad (10.40)$$

где \tilde{F} — математическое ожидание (среднее значение) нелинейной функции F , которое является регулярной составляющей, $q^{c.l}$ — эквивалентный коэффициент усиления случайной составляющей (центрированной). Это выражение по форме тоже аналогично тому, которое

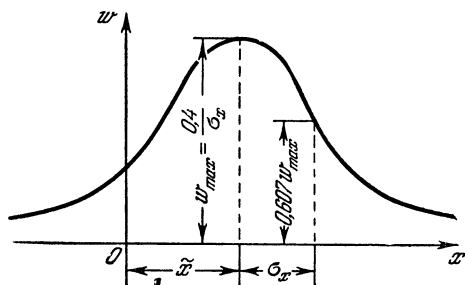


Рис. 10.5.

применялось в главе V (см. формулу (10.3)), но с иным конкретным содержанием.

Величина регулярной составляющей \tilde{F} определяется, следовательно, по известной формуле для математического ожидания. В случае однозначной нелинейной функции $F(x)$ это будет

$$\tilde{F} = M[F(\tilde{x} + x^{c.l})] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{c.l}) w(x) dx, \quad (10.41)$$

где M — обозначение операции взятия математического ожидания, $w(x)$ — дифференциальный закон распределения случайной составляющей, например нормальный закон (рис. 10.5):

$$w = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \tilde{x}}{\sigma_x} \right)^2}. \quad (10.42)$$

Для нелинейности общего вида $F(x, px)$ имеем более сложное выражение

$$\tilde{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{c.l}, p\tilde{x} + px^{c.l}) w(x, px) dx dpx, \quad (10.43)$$

которое для петлевых нелинейностей $F(x)$ при симметричном законе распределения (в том числе и нормальном) упрощается. Например,

для нелинейности, показанной на рис. 10.6, будет

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \int_{-\infty}^{-b_1} F(\tilde{x} + x^{c.l}) \omega(x) dx + \\ & + \int_{-b_1}^{b_2} \frac{1}{2} [F_1(\tilde{x} + x^{c.l}) + F_2(\tilde{x} + x^{c.l})] \omega(x) dx + \\ & + \int_{b_2}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{c.l}) \omega(x) dx. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Величина эквивалентного коэффициента усиления $q^{c.l}$ случайной составляющей в формуле (10.40) рекомендуется [309] определять одним из следующих двух способов.

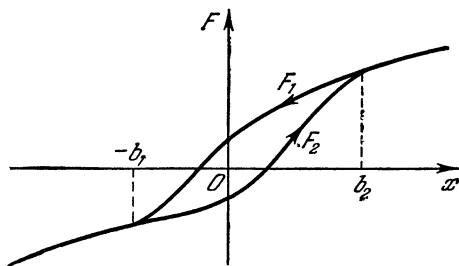


Рис. 10.6.

Первый способ исходит непосредственно из величин среднеквадратических отклонений σ_x и σ_F переменной x и нелинейной функции F , а именно:

$$q^{c.l} = \frac{\sigma_F}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{M[(F^{c.l})^2]}{M[(x^{c.l})^2]}}, \quad (10.45)$$

что в случае однозначной нелинейности $F(x)$ дает

$$q^{c.l} = \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\tilde{x} + x^{c.l}) \omega(x) dx - \tilde{F}^2}, \quad (10.46)$$

а для общего случая $F(x, px)$ и в случае петлевой нелинейности $F(x)$ получаются более сложные выражения, которые можно составить для $q^{c.l}$, обобщив (10.46) по тому же образцу, как обобщены выражения (10.43) и (10.44) по сравнению с (10.41).

Второй способ заключается в определении коэффициента $q^{c.l}$ из условия минимума математического ожидания квадрата разности истинной нелинейной функции $F(x, px)$ и ее заменяющей (10.40),

т. е. минимума среднеквадратического отклонения. Записав это условие

$$M\{[F(x, px) - \tilde{F} - q^{c\lambda} x^{c\lambda}]^2\} = \min,$$

получим:

$$q^{c\lambda} = \frac{M[F^{c\lambda} x^{c\lambda}]}{M[(x^{c\lambda})^2]} = \frac{r_{Fx}}{\sigma_x^2}, \quad (10.47)$$

где r_{Fx} — взаимная корреляционная функция переменных F и x . Отсюда в случае однозначной нелинейности $F(x)$ имеем:

$$q^{c\lambda} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tilde{x} + x^{c\lambda}) x w(x) dx. \quad (10.48)$$

Аналогично предыдущему легко составить также выражение коэффициента $q^{c\lambda}$ для общего случая $F(x, px)$ и для петлевой нелинейности $F(x)$.

Второй способ определения коэффициента $q^{c\lambda}$ приводит к более простым расчетным формулам. С этой точки зрения его использование предпочтительнее. По точности же оба способа примерно равноценны и соответствуют общей степени приближенности всего метода в целом. Замечено, что во многих случаях, когда первый из них дает завышенные значения корреляционной функции нелинейного процесса $F(t)$ по сравнению с точными, второй дает заниженные значения. Поэтому часто может получиться более хорошее приближение, если в качестве величины $q^{c\lambda}$ взять среднее арифметическое из двух: (10.45) и (10.47).

Важно иметь в виду, что величины \tilde{F} и $q^{c\lambda}$ взаимосвязаны тем, что каждая из них зависит от обеих рассматриваемых характеристик случайного процесса: \tilde{x} и σ_x (входящей в закон распределения w). Сам факт наличия этих зависимостей и их взаимосвязь и позволяют нам, несмотря на линеаризацию задачи, уловить существенно нелинейные особенности случайных процессов, подобно тому как в прежних главах зависимость величин F^0 , q и q' от всех трех неизвестных x^0 , A и Ω (или, по крайней мере, от первых двух из них) и взаимосвязь этих величин позволяли исследовать существенно нелинейные особенности регулярных процессов во времени методом гармонической линеаризации.

Приведем выражения величин \tilde{F} и $q^{c\lambda}$ и их графики для некоторых типовых нелинейностей, составленные по формулам (10.41), (10.46) и (10.48) И. Е. Казаковым [317] при условии нормального закона распределения (10.42) случайной переменной x (при других законах распределения величины \tilde{F} и $q^{c\lambda}$ имели бы другие выражения).

1. Идеальная релейная характеристика (рис. 10.7, а). Из формулы (10.41) находим:

$$\tilde{F} = c\Phi(u), \quad u = \frac{\tilde{x}}{\sigma_x \sqrt{2}}, \quad (10.49)$$

где обозначено

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy \quad (10.50)$$

(числовые значения этого интеграла вероятностей имеются в книге [322], а также в некоторых сборниках математических таблиц). Зависимость (10.49) величины $\frac{\tilde{F}}{c}$ от отношения $\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}$ показана графически на рис. 10.7, б.

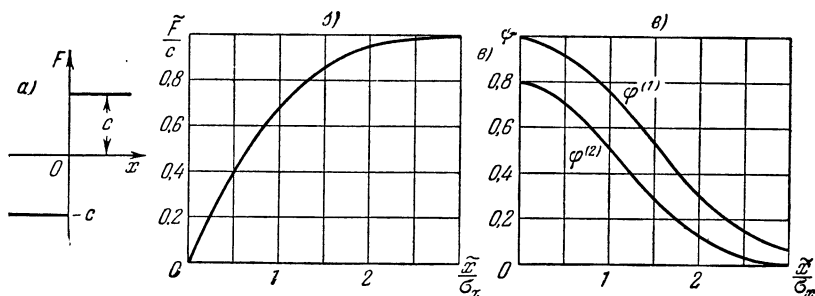


Рис. 10.7.

По формулам (10.46) и (10.48) находим соответственно

$$q^{c.л} = \frac{c}{\sigma_x} \varphi^{(1)}(\tilde{x}, \sigma_x) \quad \text{и} \quad q^{c.л} = \frac{c}{\sigma_x} \varphi^{(2)}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (10.51)$$

где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \Phi^2(u)}, \quad \varphi^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}. \quad (10.52)$$

Зависимости $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ от $\frac{\tilde{x}}{\sigma_x}$ показаны на рис. 10.7, в.

2. Однозначная релейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 10.8, а). По формуле (10.41) с обозначением (10.50) находим:

$$\tilde{F} = \frac{c}{2} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2)], \quad (10.53)$$

где

$$u_1 = \frac{1 + \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{1 - \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{\tilde{x}}{b}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}. \quad (10.54)$$

Функция $\frac{\tilde{F}}{c}$ изображена графически на рис. 10.8, б в зависимости от \tilde{x}_1 при разных значениях σ_1 .

По формулам (10.46) и (10.48) получаем выражения типа (10.51), где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c}\right)^2} - \frac{1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)], \quad (10.55)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2}), \quad (10.56)$$

что изображено графически на рис. 10.8, в и г.

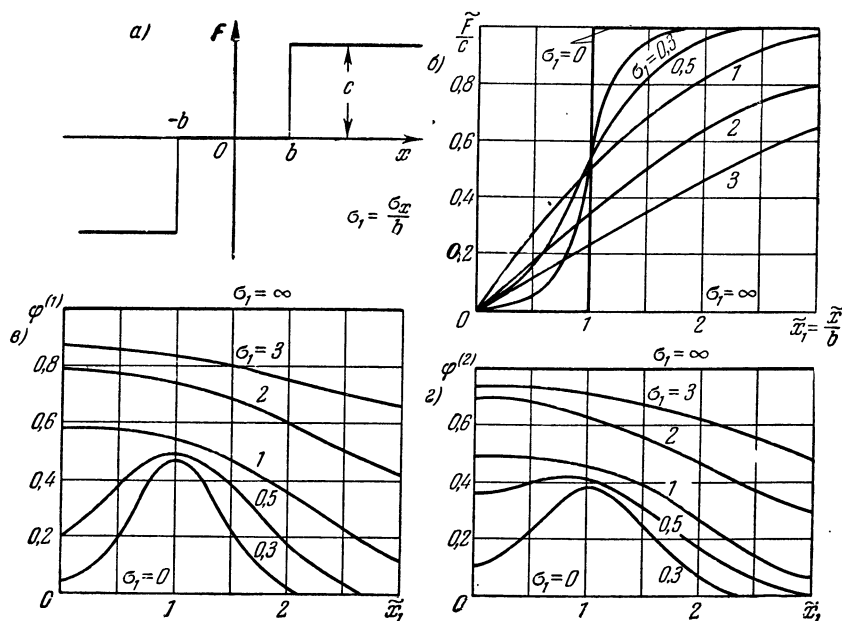


Рис. 10.8.

3. Петлевая релейная характеристика общего вида (рис. 10.9, а).
По формулам (10.44) находим:

$$\tilde{F} = \frac{c}{4} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2) + \Phi(u_3) - \Phi(u_4)], \quad (10.57)$$

где, кроме (10.54) и (10.50), введены еще обозначения:

$$u_3 = \frac{m + \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}, \quad u_4 = \frac{m - \tilde{x}_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}. \quad (10.58)$$

Зависимость $\frac{\tilde{F}}{c}$ для случая $m = 0,5$ показана на рис. 10.9, б.

Далее получаем выражения типа (10.51), где

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c}\right)^2 - \frac{1}{4} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2) + \Phi(u_3) + \Phi(u_4)]}, \quad (10.59)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2} + e^{-u_3^2} + e^{-u_4^2}). \quad (10.60)$$

Эти функции для случая $m=0,5$ изображены на рис. 10.9, в и г.

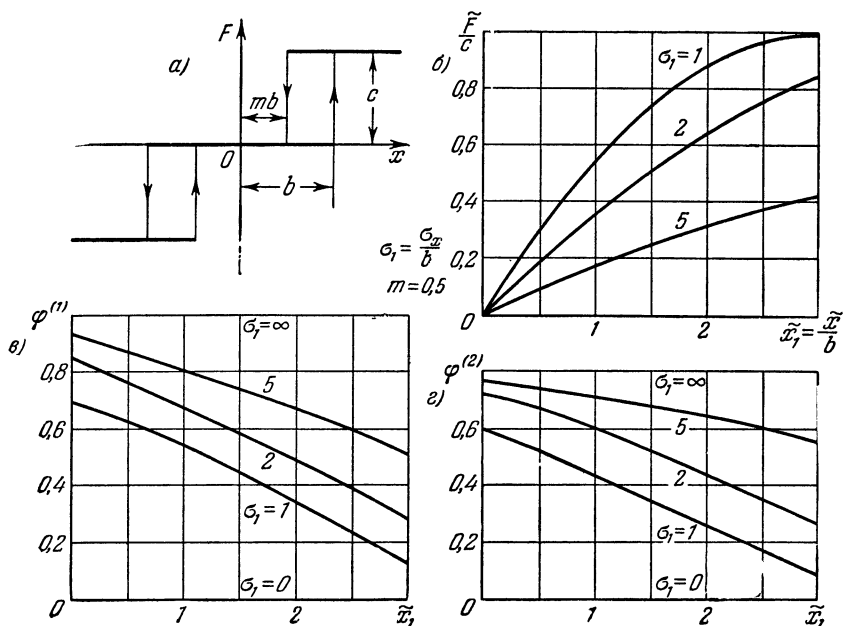


Рис. 10.9.

4. Характеристика типа насыщения (рис. 10.10, а). По формуле (10.41) с обозначениями (10.50) и (10.54) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{F}}{c} = & \frac{\tilde{x}_1 + 1}{2} \Phi(u_1) + \frac{\tilde{x}_1 - 1}{2} \Phi(u_2) + \\ & + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} - e^{-u_2^2}), \end{aligned} \quad (10.61)$$

что показано в зависимости от \tilde{x}_1 при разных σ_1 на рис. 10.10, б.

По формулам же (10.46) и (10.48) находим выражение (10.51), где

$$\varphi^{(1)} = \left\{ 1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c} \right)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{x}_1^2 + \sigma_1^2 + 1) [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)] - \right. \\ \left. - \sigma_1^2 (u_2 e^{-u_1^2} + u_1 e^{-u_2^2}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10.62)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{\sigma_1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)], \quad (10.63)$$

что изображено на рис. 10.10, *в* и *г*.

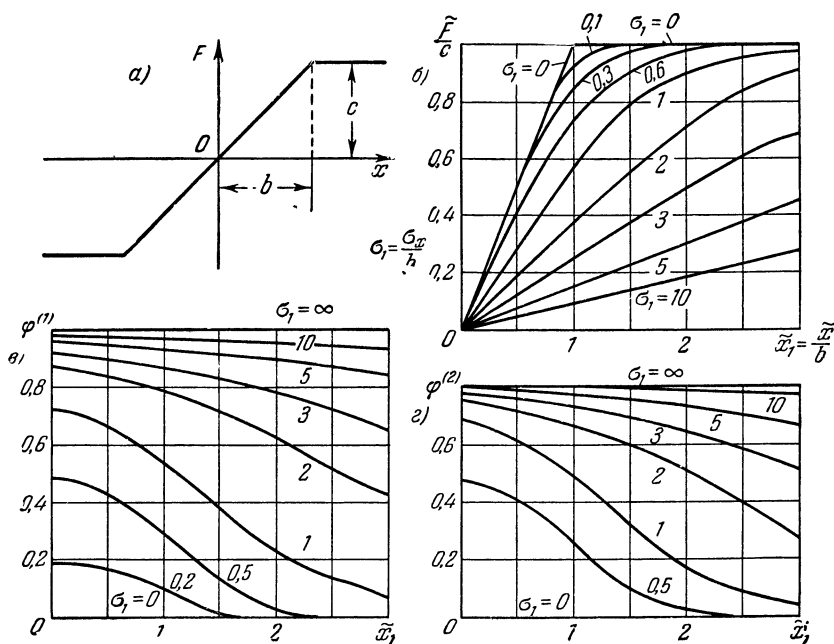


Рис. 10.10.

5. Характеристика с зоной нечувствительности и насыщением (рис. 10.11, *а*). Здесь в обозначениях (10.50) и (10.54) получаем:

$$\frac{\tilde{F}}{c} = \frac{\tilde{x}_1}{2(1-m)} [\Phi(u_2) - \Phi(u_1) + \Phi(u_4) - \Phi(u_3)] + \\ + \frac{1}{2} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2)] + \frac{\sigma_1}{(1-m)\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} - e^{-u_2^2} + e^{-u_3^2} - e^{-u_4^2}), \quad (10.64)$$

а в выражениях (10.51) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & \left\{ 1 - \left(\frac{\tilde{F}}{c} \right)^2 - \frac{1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)] + \right. \\ & + \frac{\tilde{x}_1^2 - \sigma_1^2}{2(1-m^2)} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2) - \Phi(u_3) - \Phi(u_4)] - \\ & \left. - \frac{\sigma_1^2}{(1-m^2)\sqrt{\pi}} (u_2 e^{-u_1^2} + u_1 e^{-u_2^2} - u_4 e^{-u_3^2} - u_3 e^{-u_4^2}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} = & \frac{\sigma_1}{2(1-m)} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2) - \Phi(u_3) - \Phi(u_4)] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2}) - \frac{1}{(1-m)\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2} - m e^{-u_3^2} - m e^{-u_4^2}). \end{aligned} \quad (10.66)$$

6. Характеристика с зоной нечувствительности (рис. 10.11, б).
Для этой характеристики

$$\tilde{F} = kb \left\{ \tilde{x}_1 + \frac{1 - \tilde{x}_1}{2} [\Phi(u_1) - \Phi(u_2)] - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} - e^{-u_2^2}) \right\}, \quad (10.67)$$

а по формулам (10.46) и (10.48) получаем соответственно

$$q^{cl} = \frac{kb}{\sigma_x} \varphi^{(1)}(\tilde{x}, \sigma_x) \quad \text{и} \quad q^{cl} = \frac{kb}{\sigma_x} \varphi^{(2)}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (10.68)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & \left\{ \sigma_1^2 - 1 - \left(\frac{\tilde{F}}{kb} \right)^2 + \tilde{x}_1^2 - \sigma_1^2 \left[\left(\frac{1}{2} + u_1^2 \right) \Phi(u_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{2} + u_2^2 \right) \Phi(u_2) \right] + \frac{u_1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_1^2} + \frac{u_2}{\sqrt{\pi}} e^{-u_2^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (10.69)$$

$$\varphi^{(2)} = \sigma_1 - \frac{\sigma_1}{2} [\Phi(u_1) + \Phi(u_2)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-u_1^2} + e^{-u_2^2}). \quad (10.70)$$

7. Квадратичная характеристика (рис. 10.11, в):

$$F = kx^2 \operatorname{sign} x = k|x|x. \quad (10.71)$$

Для этой характеристики по формуле (10.41) находим:

$$\tilde{F} = k\sigma_x^2 \left[(1 + 2u^2) \Phi(u) + \frac{2u}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} \right], \quad (10.72)$$

где

$$u = \frac{\tilde{x}}{\sigma_x \sqrt{2}}, \quad (10.73)$$

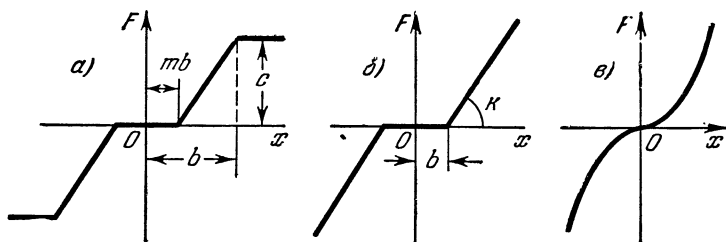


Рис. 10.11.

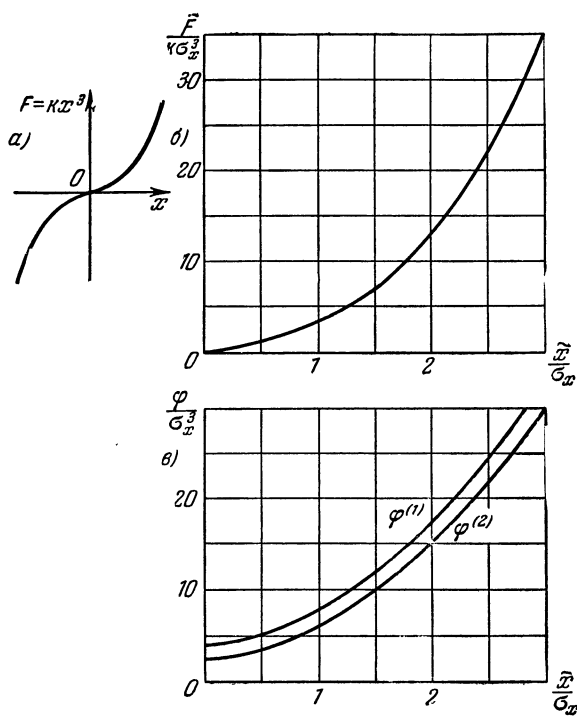


Рис. 10.12.

а по формулам (10.46) и (10.48) получаем соответственно

$$q^{c.l.} = \frac{k}{\sigma_x} \varphi^{(1)}(\tilde{x}, \sigma_x) \quad \text{и} \quad q^{c.l.} = \frac{k}{\sigma_x} \varphi^{(2)}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (10.74)$$

где

$$\varphi^{(1)} = \sigma_x^3 \sqrt{4u^4 + 12u^2 + 3 - \left(\frac{\tilde{F}}{k\sigma_x^3}\right)^2}, \quad (10.75)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{\sigma_x^3}{\sqrt{2}} \left[u \Phi(u) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} (1 - 3u^2) e^{-u^2} \right]. \quad (10.76)$$

8. Кубическая характеристика (рис. 10.12, а):

$$F = kx^3. \quad (10.77)$$

Здесь с учетом обозначения (10.73) имеем:

$$\tilde{F} = k\sigma_x^3 (3 + 2u^2) u \sqrt{2}, \quad (10.78)$$

а также выражение вида (10.74), где

$$\varphi^{(1)} = \sigma_x^3 \sqrt{15 + 72u^2 + 36u^4}, \quad (10.79)$$

$$\varphi^{(2)} = 3\sigma_x^3 (1 + 2u^2), \quad (10.80)$$

что изображено графически на рис. 10.12, б и в.

Применение описанной здесь статистической линеаризации к исследованию случайных процессов излагается в следующих параграфах.

§ 10.3. Высокочастотные случайные процессы

В данном параграфе рассматриваются такие задачи, в которых регулярная составляющая процесса \tilde{x} (математическое ожидание) постоянна или медленно меняется во времени по сравнению с основными частотами спектра случайной составляющей $x^{c.l.}$. Сначала обратимся к нелинейным системам первого класса¹⁾ (см. § 1.2), динамика которых описывается уравнениями вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (10.81)$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие, представляющее собой случайный процесс, причем

$$f(t) = \tilde{f} + f^{c.l.}(t). \quad (10.82)$$

Здесь \tilde{f} — заданное математическое ожидание (регулярная составляющая), а $f^{c.l.}$ — центрированная случайная составляющая.

¹⁾ Все общие решения задачи, рассмотренные в §§ 10.3 и 10.4 применительно к нелинейным системам первого класса (10.81), обобщаются и на другие классы (см. § 1.2) с несколькими нелинейностями, подобно тому как это делалось в предыдущих главах.

Пусть параметры системы таковы, что автоколебания отсутствуют и система устойчива относительно равновесного состояния. Применив статистическую линеаризацию (10.40) и подставив полученное выражение в заданное уравнение (10.81), разобьем последнее на два уравнения:

$$Q(p)\tilde{x} + R(p)\tilde{F} = S(p)\tilde{f}, \quad (10.83)$$

$$[Q(p) + R(p)q^{cl}]x^{cl} = S(p)f^{cl}, \quad (10.84)$$

соответственно для регулярных (математических ожиданий) и случайных (центрированных) составляющих. При этом

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x)$$

определяются для каждой заданной нелинейности, как указано в § 10.2.

Рассмотрим несколько принципиально различных задач в общем виде (конкретные примеры будут даны в §§ 10.6 и 10.7).

Первая задача. Если имеет место стационарный процесс, то величины \tilde{f} , \tilde{x} , σ_x являются постоянными (имеет место некоторый установившийся режим) и уравнение (10.83) принимает алгебраический вид

$$Q(0)\tilde{x} + R(0)\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x) = S(0)\tilde{f}. \quad (10.85)$$

Здесь фигурируют две неизвестные \tilde{x} и σ_x . Поэтому в принципе отсюда можно лишь выразить величину \tilde{x} как функцию σ_x :

$$\tilde{x}(\sigma_x). \quad (10.86)$$

Далее по линейной теории случайных процессов, коротко описанной в § 10.1 (см. формулы, начиная с (10.14) по (10.23), с заменой x^0 на x^{cl}), производится исследование уравнения (10.84). В этом уравнении величина f^{cl} задана спектральной плотностью $s_f(\omega)$ или корреляционной функцией $r_f(\tau)$, причем формулы (10.17) и (10.18) дают

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega) + q^{cl}R(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (10.87)$$

где в выражении

$$q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x) \quad (10.88)$$

необходимо \tilde{x} заменить найденной выше функцией (10.86). Тогда в уравнении (10.87) останется одна неизвестная величина σ_x . Учитывая формулы (10.23) и (10.22), уравнение (10.87) можно записать в виде

$$\sigma_x^2 = hI_n(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (10.89)$$

где h — постоянный множитель, выносимый за знак интеграла.

Таким образом, путем решения уравнения (10.89) с подстановкой (10.86) будет найдено среднеквадратическое отклонение σ_x , а затем по формуле (10.86) будет вычислено и математическое ожидание \tilde{x} , т. е. полностью определится искомое решение¹⁾ уравнения (10.81) приближенно в виде

$$x = \tilde{x} + x^{сл} \quad (10.90)$$

для случая установившегося режима при стационарном случайном процессе.

Однако зависимость $\tilde{x}(\sigma_x)$ далеко не всегда можно выразить из уравнения (10.85) в явном виде ввиду сложности выражения $\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x)$. Поэтому в большинстве случаев придется решать совместно два уравнения (10.85) и (10.89) либо численно, путем последовательных приближений, либо графически.

Можно применять, например, следующий графический прием [322]. Представим уравнение (10.85) в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \tilde{x}, \\ \eta &= \frac{S(0)}{Q(0)} \tilde{f} + \frac{R(0)}{Q(0)} \tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x). \end{aligned} \right\} \quad (10.91)$$

Первое из них дает прямую 1 (рис. 10.13, а), а второе — серию кривых 2 для различных постоянных значений σ_x . Перенеся все точки пересечения этих кривых с прямой 1 на плоскость координат \tilde{x}, σ_x (рис. 10.13, б), получим зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$ в виде кривой 3, так как каждой точке пересечения на верхнем графике соответствовало определенное значение σ_x . После этого построим

на рис. 10.13, б еще одну зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$ в виде кривой 4 по формуле (10.89), подставляя в правую часть этой формулы значения σ_x , взятые для каждого \tilde{x} из кривой 3. Очевидно, что координаты точки пересечения с кривых 3 и 4 представляют собой искомый результат совместного решения уравнений (10.85) и (10.89).

¹⁾ Во всех задачах далее будем искать приближенное решение только для переменной x , стоящей под знаком нелинейности. Когда оно найдено, всегда можно через соответствующие передаточные функции найти приближенное решение и для других переменных, как показано будет в примере 1 § 10.7.

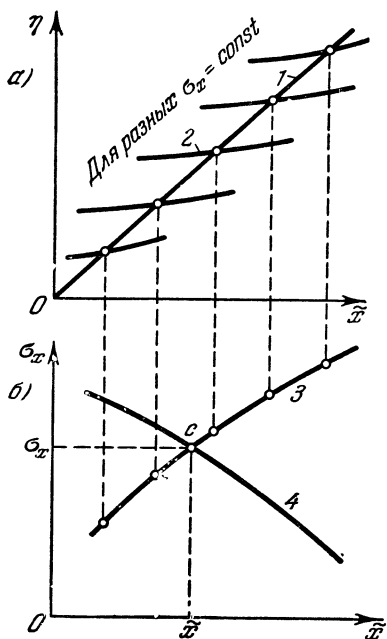


Рис. 10.13.

Вторая задача. Перейдем теперь к решению другой задачи, когда исследуется *неустановившийся* процесс [336].

Часто в автоматических системах управления разложению искомого решения (10.90) на \tilde{x} и x^{cl} соответствует разложение его на *полезный регулярный сигнал* \tilde{x} и *случайную помеху* x^{cl} . Когда полезный сигнал управления \tilde{x} изменяется во времени, процесс уже не будет стационарным. Однако, если помехи (флуктуации) характеризуются спектром значительно более высоких частот, чем полезный сигнал, можно считать последний медленно меняющимся. Тогда можно исследовать случайный процесс в первом приближении как стационарный, применяя формулу (10.89). Но при этом для определения регулярной составляющей \tilde{x} нельзя пользоваться алгебраическим уравнением (10.85), а надо обращаться к дифференциальному уравнению (10.83).

В этом случае описанное выше графическое решение не годится и следует поступать иначе. Сначала надо из уравнения (10.89) определить зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$. Для этого по аналогии с графическим решением (9.33) разобьем уравнение (10.89) на два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \zeta, \\ hI_n(\tilde{x}, \sigma_x) &= \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (10.92)$$

Первое из них дает параболу 1 (рис. 10.14), а второе — серию кривых 2 при разных постоянных значениях \tilde{x} . Перенеся ординаты их

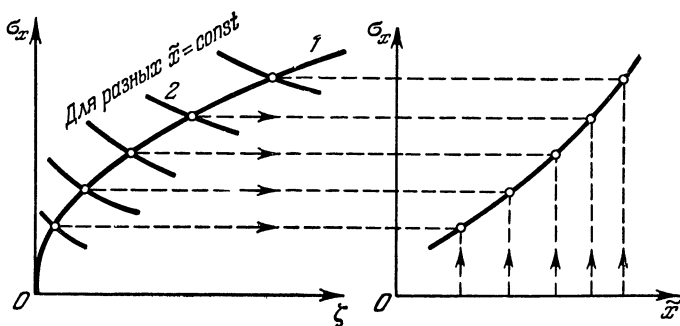


Рис. 10.14.

точек пересечения на плоскость \tilde{x}, σ_x и отложив для каждой из них соответствующие кривым 2 абсциссы \tilde{x} , получим в виде кривой 3 (рис. 10.14) искомую зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$.

Подставив полученную зависимость $\sigma_x(\tilde{x})$ в выбранное для заданной нелинейности из § 10.2 выражение

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (10.93)$$

исключим из него величину σ_x и получим функцию от одной переменной:

$$\tilde{F} = \Phi(\tilde{x}), \quad (10.94)$$

которую, как и в главе V и § 9.2, можно назвать функцией смещения¹⁾, так как здесь математические ожидания \tilde{x} и \tilde{F} представляют собой смещения центра случайных составляющих.

Когда функция смещения (10.94) найдена, ее можно подставить в уравнение (10.83):

$$Q(p)\tilde{x} + R(p)\Phi(\tilde{x}) = S(p)\tilde{f}(t) \quad (10.95)$$

и отсюда по заданной функции $\tilde{f}(t)$ найти путем решения дифференциального уравнения регулярную составляющую процесса $\tilde{x}(t)$.

В большинстве задач функция смещения (10.94) будет иметь вид плав-

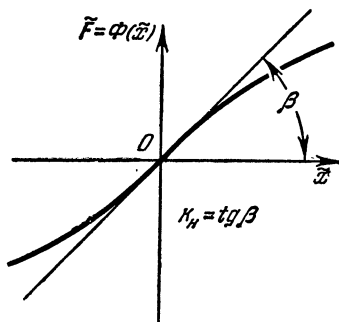


Рис. 10.15.

ной кривой (рис. 10.15), которую в некоторых пределах можно подвергнуть обычной линейзации

$$\tilde{F} = k_n \tilde{x}, \quad k_n = \left(\frac{d\Phi}{d\tilde{x}} \right)_{\tilde{x}=0} = \operatorname{tg} \beta. \quad (10.96)$$

В случае, если система такова, что линейная часть с передаточной функцией

$$\frac{R(p)}{Q(p)}$$

не пропускает спектр частот, соответствующий флуктуациям $f^{cl}(t)$ и определяемый спектральной плотностью $s_f(\omega)$, отыскание величины σ_x значительно упрощается, а именно из (10.87) следует:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (10.97)$$

т. е. σ_x не будет зависеть от формы нелинейности и от величины \tilde{x} .

В этом случае вместо дифференцирования функции смещения (10.94) можно определить k_n непосредственно²⁾ из (10.93):

$$\tilde{F} = k_n \tilde{x}, \quad k_n = \left(\frac{d\tilde{F}}{d\tilde{x}} \right)_{\tilde{x}=0}. \quad (10.98)$$

¹⁾ По аналогии с (10.10) и (10.35) это будет сглаженная при помощи случайных флуктуаций нелинейная характеристика для медленно меняющейся составляющей процесса.

²⁾ Графически это будет тангенс угла наклона кривых на рис. 10.7, б — 10.12, б для соответствующих нелинейностей.

Здесь k_n получается как функция от σ_x :

$$k_n = k_n(\sigma_x). \quad (10.99)$$

После этого надо подставить величину σ_x , найденную из формулы (10.97), или просто взять из рис. 10.7, б — 10.12, б кривую, соответствующую найденному значению σ_x . При этом вычисление интеграла (10.97) производится по готовым формулам (10.22) и (10.23).

В результате подстановки (10.96) или (10.98) уравнение для определения регулярной составляющей (10.95) станет линейным:

$$[Q(p) + k_n R(p)] \tilde{x} = S(p) \tilde{f}(t) \quad (10.100)$$

и решается как таковое на основании обычного характеристического уравнения

$$Q(p) + k_n R(p) = 0. \quad (10.101)$$

Важно отметить, однако, следующее. Согласно формулам (10.87) и (10.97) величина σ_x зависит от спектральной плотности помехи $s_f(\omega)$. Поэтому и определяемая через величину σ_x форма функции смещения (10.94) и крутизна ее k_n (рис. 10.15) тоже зависят не только от параметров самой системы, но также и от спектральной плотности помехи $s_f(\omega)$. Но если k_n зависит от $s_f(\omega)$, то, согласно (10.100) и (10.101), все статические и динамические качества и даже *устойчивость системы по полезному сигналу будут зависеть не только от параметров самой системы, но и от параметров спектральной плотности внешней случайной помехи*. Следовательно, устойчивая при отсутствии помех нелинейная система может при определенном уровне помех потерять свои качества, т. е. выйти из строя как система автоматического управления не по причине того, что система перестает фильтровать полезный сигнал, как бывает обычно, а потому, что основной контур регулирования меняет свои динамические качества с изменением k_n или даже становится неустойчивым.

Возможны случаи, когда это специфическое для нелинейных систем явление будет наступать раньше, чем система, рассчитанная как линейная, перестанет фильтровать полезный сигнал. С этой точки зрения учет фактически имеющихся в системе автоматического управления нелинейностей при наличии высокочастотных (по сравнению с полезным сигналом) помех является чрезвычайно важным для практики. Это столь же важно, как и учет влияния вибрационных синусоидальных помех, рассмотренный выше в §§ 9.2 и 9.6. Результаты решения обеих этих задач аналогичны (см. ниже пример в § 10.6).

Очевидно, что описанное специфическое для нелинейных систем влияние помех в некоторых случаях может и улучшать динамические качества системы.

Привлекательной стороной изложенного метода является то, что исследование качеств переходных процессов, всех частотных характеристик и других качеств системы управления по полезному

(регулярному) сигналу производится любыми методами обычной линейной теории автоматического регулирования по уравнению (10.100). Несмотря на эту линеаризацию решения задачи, хорошо выявляются все важные для практики специфические нелинейные явления благодаря описанному методу определения коэффициента k_n , учитывающему несправедливость принципа суперпозиции для нелинейных систем.

Важно иметь в виду еще следующее. Исследуя методами линейной теории регулирования по уравнению (10.100) изменение статических и динамических качеств системы по полезному сигналу с изменением структуры и параметров этой системы, надо обязательно учитывать при этом и изменение самого коэффициента k_n , вытекающее из выражений (10.99) и (10.97) или (10.87).

Третья задача. В случае, если обычную линеаризацию функции смещения (10.96) или (10.98) проводить нежелательно или невозможно (по причине большой ее кривизны), то нужно решать непосредственно нелинейное уравнение (10.95) при заданном $\tilde{f}(t)$ любыми известными методами решения обыкновенных нелинейных уравнений. При этом устойчивость данной нелинейной системы можно определить, в частности, методом гармонической линеаризации, описанным в § 2.7, произведя предварительно гармоническую линеаризацию функции смещения, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{x}) &= q^{ct}(A, \sigma_x) \tilde{x}, \\ q^{ct}(A, \sigma_x) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(A \sin \psi, \sigma_x) \sin \psi \, d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (10.102)$$

причем $\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x)$ берется, согласно (10.93), в готовом виде для каждой нелинейности из § 10.2 с последующей заменой $\tilde{x} = A \sin \psi$, где A обозначает амплитуду автоколебаний медленно меняющейся составляющей \tilde{x} , которые возникают в системе на границе области устойчивости и вне ее. Если нужно, то дальше можно исследовать и автоколебания в этой нелинейной системе по медленно меняющейся регулярной составляющей \tilde{x} , определив их амплитуду A и частоту Ω в зависимости от параметров системы любыми способами, описанными в § 2.3, согласно (10.95) и (10.102), по гармонически линеаризованному уравнению:

$$[Q(p) + q^{ct}(A, \sigma_x) R(p)] \tilde{x} = 0. \quad (10.103)$$

При этом величина σ_x , входящая в формулы (10.102) и (10.103), определяется упрощенным способом по уравнению (10.97), так как очевидно, что в случае возникновения автоколебаний (по медленно меняющейся составляющей \tilde{x}) высокочастотные флуктуации вследствие наличия свойства фильтра в системе (необходимого для определения автоколебаний в виде $\tilde{x} = A \sin \psi$) не будут пропускаться линейной частью, определяемой передаточной функцией $R(p)/Q(p)$.

Отсюда видно, что поскольку σ_x находится через $s_f(\omega)$, то амплитуда и частота автоколебаний, определяемые из уравнения (10.103), а также и сами условия их возникновения в нелинейной системе будут существенно зависеть от спектральной плотности внешних флуктуаций (случайных помех).

Приведем, далее, готовые выражения коэффициента гармонической линеаризации $q^{ct}(A, \sigma_x)$, вычисленные по формуле (10.100) для некоторых типовых нелинейностей $F(x)$, фигурирующих в исходном уравнении системы (10.81). Заметим, что более подробную запись операции (10.100), учитывая (10.41), можно представить через исходную нелинейность $F(x)$ в виде

$$q^{ct}(A, \sigma_x) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} M[F(A \sin \psi + x^{cl})] \sin \psi d\psi$$

при нормальном законе распределения x^{cl} (10.42) и при условии медленности изменения $A \sin \psi$ по сравнению со спектром частот случайных флуктуаций x^{cl} .

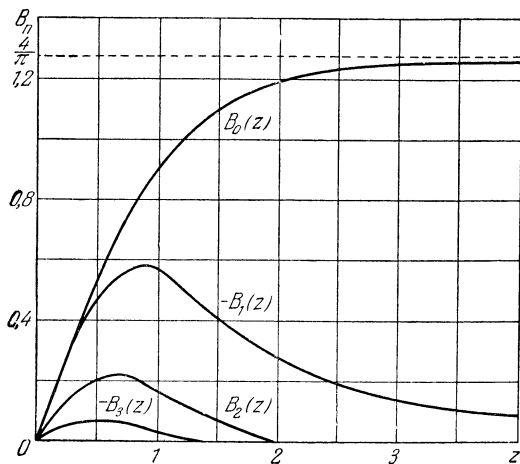


Рис. 10.16.

Результаты вычисления коэффициента $q^{ct}(A, \sigma_x)$, проделанного А. А. Первозванским [331], следующие:

1. Идеальная релейная характеристика (рис. 10.7, а)

$$q^{ct}(A, \sigma_x) = \frac{c}{A} B_0(z), \quad (10.104)$$

где $B_0(z)$ представлена графически на рис. 10.16 (аналитическое выражение дается ниже), причем

$$z = \frac{A}{\sigma_x \sqrt{2}}. \quad (10.105)$$

2. Однозначная релейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 10.8, а)

$$q^{CT}(A, \sigma_x) = \frac{c}{A} \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{2n} B_n(z), \quad (10.106)$$

где

$$b_1 = \frac{b}{\sigma_x \sqrt{2}}, \quad (10.107)$$

а функции $B_n(z)$ даны также на рис. 10.16 (достаточно взять конечную сумму до $n=3$). Графики рис. 10.16 построены по формуле

$$B_n(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+n} [2(i+n)]!}{(2n)! (i!)^2 (i+n)! (i+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2i+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

3. Петлевая релейная характеристика общего вида (рис. 10.9, а)

$$q^{CT}(A, \sigma_x) = \frac{c}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+m^{2n}}{2} b_1^{2n} B_n(z). \quad (10.108)$$

4. Характеристика типа насыщения (рис. 10.10, а)

$$q^{CT}(A, \sigma_x) = \frac{c}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_1^{2n}}{2n+1} B_n(z). \quad (10.109)$$

5. Характеристика с зоной нечувствительности (рис. 10.11, б)

$$q^{CT}(A, \sigma_x) = k - \frac{kb}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_1^{2n}}{2n+1} B_n(z) \quad (10.110)$$

(практически во всех случаях достаточно суммировать только до $n=3$).

6. Квадратичная характеристика (рис. 10.11, в)

$$\left. \begin{aligned} F &= kx^2 \operatorname{sign} x = k |x| x, \\ q^{CT}(A, \sigma_x) &= kAD(z), \end{aligned} \right\} \quad (10.111)$$

где $D(z)$ представлена графически на рис. 10.17. Она построена по формуле

$$D(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} (2i)!}{(i!)^3 (2i-1)(i+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2i-1}.$$

7. Степенные характеристики нечетных степеней (рис. 10.11, г)

$$F = kx^3, \quad q^{CT}(A, \sigma_x) = \frac{3k}{4} (A^2 + 4\sigma_x^2); \quad (10.112)$$

$$F = kx^5, \quad q^{CT}(A, \sigma_x) = \frac{15k}{2} \left(\frac{1}{12} A^4 + A^2 \sigma_x^2 + 2\sigma_x^4 \right); \quad (10.113)$$

наконец, в общем виде

$$F = kx^{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$q^{\text{ст}}(A, \sigma_x) = \frac{k(2n+1)!}{2^n} \sum_{i=0}^n \frac{2^i A^{2(n-i)} \sigma_x^{2i}}{i! (n-i)! (n-i+1)!}. \quad (10.114)$$

Итак, после описанного определения коэффициента гармонической линеаризации нелинейности при наличии высокочастотных внешних флуктуаций (случайных помех) можно найти по уравнению (10.103) методами главы II (проиллюстрированными на примерах в главе IV)

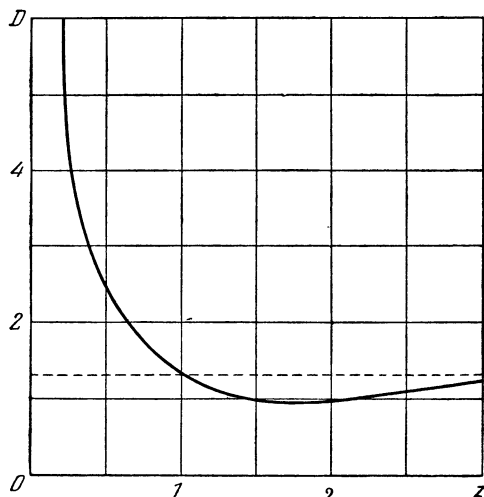


Рис. 10.17.

границу устойчивости и параметры автоколебаний нелинейной автоматической системы теперь в зависимости не только от структуры и параметров системы, но и от спектральной плотности высокочастотных флуктуаций, действующих на систему.

Можно также по уравнению (10.103) исследовать затем и качество переходных процессов в такой системе методами главы VII, а приемами, изложенными в § 9.1, можно определить и одночастотные вынужденные колебания, согласно (10.95) и (10.102), по уравнению

$$[Q(p) + q^{\text{ст}}(A, \sigma_x) R(p)] \tilde{x} = S(p) \tilde{f}(t),$$

если регулярная составляющая внешнего воздействия $\tilde{f}(t)$ изменяется по закону

$$\tilde{f}(t) = B \sin \Omega_p t$$

с частотой Ω_b , лежащей значительно ниже спектра частот случайных флуктуаций $f^{cl}(t)$. При этом выражение $q^{cl}(A_b, \sigma_x)$, где A_b — искома амплитуда вынужденных колебаний, для каждой нелинейности берется из написанных выше формул $q^{cl}(A, \sigma_x)$.

§ 10.4. Низкочастотные случайные процессы

Здесь рассмотрим еще три принципиально различные задачи в общем виде. Примерами они иллюстрируются в §§ 10.5 и 10.7.

Четвертая задача. Вернемся к задаче, рассмотренной в § 10.1. Пусть через автоколебательную нелинейную систему, работающую в режиме вынужденных вибраций, проходят медленно меняющиеся случайные сигналы. Спектр частот случайного сигнала здесь, в отличие от третьей задачи, лежит значительно ниже частот автоколебаний или вынужденных вибраций. Решение $x(t)$ разбивается на две составляющие: медленно меняющуюся x^0 и колебательную x^* .

Начало решения задачи, т. е. формулы (10.1)–(10.10) или (10.27)–(10.35) соответственно, оставим совершенно таким же, как в § 10.1. Далее, там проводилась обычная линеаризация функции смещения и решалась обычная задача о прохождении случайных сигналов через чисто линейную замкнутую автоматическую систему. Теперь же рассмотрим случай, когда обычная линеаризация функции смещения нежелательна или невозможна (по причине ее сильной кривизны).

В этом случае будем проводить статистическую линеаризацию функции смещения, так как здесь нужно искать не регулярную, как в третьей задаче, а случайную медленно меняющуюся составляющую $x^0(t)$.

В § 10.1 были указаны два способа вычисления эквивалентного коэффициента усиления q^{cl} случайной составляющей. Воспользуемся вторым из них, как более простым. Тогда результат статистической линеаризации функции смещения (10.10) или (10.35) будет

$$F^0 = q^{cl}(\sigma_{x^0}) x^0, \quad (10.115)$$

где, согласно (10.48), учитывая, что математическое ожидание x^0 равно нулю, имеем:

$$q^{cl} = \frac{1}{\sigma_{x^0}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x^0) x^0 \omega(x^0) dx^0, \quad (10.116)$$

причем закон распределения ω случайной величины x^0 будем считать нормальным. Пример с конкретной нелинейностью будет дан в § 10.5.

С подстановкой (10.115) статистически линеаризованное уравнение (10.6) для медленно меняющейся случайной составляющей $x^0(t)$ при случайном внешнем воздействии $f(t)$ примет вид

$$[Q(p) + q^{cl}(\sigma_{x^0}) R(p)] x^0 = S(p) f(t). \quad (10.117)$$

После этого применяем формулы линейной теории случайных процессов типа (10.17) и (10.18) для определения дисперсии $\sigma_{x^0}^2$, что дает

$$\sigma_{x^0}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega) + q^{cl}(\sigma_{x^0})R(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (10.118)$$

где $s_f(\omega)$ — заданная спектральная плотность внешнего случайного воздействия $f(t)$. Используя далее формулы (10.23) и (10.22), представим уравнение (10.118) в виде

$$\sigma_{x^0}^2 = hI_n(\sigma_{x^0}), \quad (10.119)$$

где h — постоянный множитель, выделяющийся при интегрировании. Отсюда и определяется искомая дисперсия $\sigma_{x^0}^2$ или среднеквадратическое значение σ_{x^0} медленно меняющейся случайной составляющей x^0 .

Уравнение (10.119) можно решить либо графически, найдя точку пересечения двух кривых (рис. 10.18):

$$\eta = \sigma_{x^0}^2 \text{ и } \eta = hI_n(\sigma_{x^0}), \quad (10.120)$$

либо аналитическим путем последовательных приближений, принимая решение, найденное в § 10.1,

за первое приближение. Подставив отсюда σ_{x^0} в (10.119), находим новое значение $\sigma_{x^0}^2$ (второе приближение) и т. д.

Когда σ_{x^0} найдено, по прежним формулам (10.24) и (10.25) вычисляются математическое ожидание (среднее значение) амплитуды автоколебаний \tilde{A} или вынужденных колебаний $\tilde{A}_в$ и дисперсия амплитуды σ_A^2 , чем завершается решение задачи.

Пятая задача. Возможен и принципиально другой вариант решения той же задачи о медленно меняющихся случайных воздействиях. В четвертой задаче решение $x(t)$ разбивалось на медленно меняющуюся x^0 и на колебательную x^* составляющие, причем обе они были случайными. Возможен и другой подход, который применялся в первых трех задачах предыдущего параграфа, где решение $x(t)$ разбивалось на регулярную \tilde{x} и случайную x^{cl} составляющие. При этом, в отличие от третьей задачи, будем считать регулярную составляющую \tilde{x} высокочастотной автоколебательной, а случайную составляющую \tilde{x}^{cl} медленно меняющейся, т. е. со спектром частот, лежащим значительно ниже частоты автоколебаний.

Тогда уравнение нелинейной системы

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t) \quad (10.121)$$

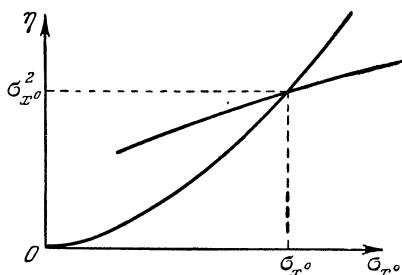


Рис. 10.18.

при медленно меняющемся случайном внешнем воздействии $f(t)$ в результате статистической линеаризации нелинейности (10.40) разобьется на следующие два уравнения:

$$Q(p) \tilde{x} + R(p) \tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x) = 0, \quad (10.122)$$

$$[Q(p) + R(p) q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x)] x^{cl} = S(p) f(t) \quad (10.123)$$

соответственно для регулярной и случайной составляющих.

Поскольку регулярная составляющая \tilde{x} предполагается автоколебательной:

$$\tilde{x} = A \sin \Omega t, \quad (10.124)$$

то для определения амплитуды A и частоты Ω автоколебаний необходимо произвести в уравнении (10.122) гармоническую линеаризацию нелинейности $\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x)$, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= q^{ct}(A, \sigma_x) \tilde{x}, \\ q^{ct}(A, \sigma_x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(A \sin \psi, \sigma_x) \sin \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (10.125)$$

В результате этого уравнение (10.122) примет вид

$$[Q(p) + q^{ct}(A, \sigma_x) R(p)] \tilde{x} = 0. \quad (10.126)$$

Как видим, эти уравнения формально совпадают с прежними (10.102) и (10.103), применявшимися в третьей задаче (§ 10.3). Поэтому здесь можно воспользоваться всеми указанными выше конкретными выражениями q^{ct} (10.104)—(10.114) для типовых нелинейностей $F(x)$. Существенное отличие от прежнего будет состоять в определении величины σ_x , входящей в эти формулы в соответствии с другим содержанием решаемой задачи.

Величина σ_x в данном случае характеризует медленно меняющуюся случайную составляющую x^{cl} , определяемую уравнением (10.123). Сложность последнего заключается в том, что входящее в него математическое ожидание \tilde{x} не постоянно, а изменяется по синусоиде (10.124). Однако поскольку x^{cl} медленно меняется, то решение можно упростить, заменив коэффициент q^{cl} постоянной величиной за период автоколебаний, равной среднему значению

$$q^{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q^{cl}(A \sin \psi, \sigma_x) d\psi. \quad (10.127)$$

Тогда уравнение (10.123) примет вид

$$[Q(p) + q^{cp}(A, \sigma_x) R(p)] x^{cl} = S(p) f(t). \quad (10.128)$$

Выражения коэффициента $q^{cp}(A, \sigma_x)$ были выведены [331] для типовых нелинейностей $F(x)$ по формуле (10.127) с использованием

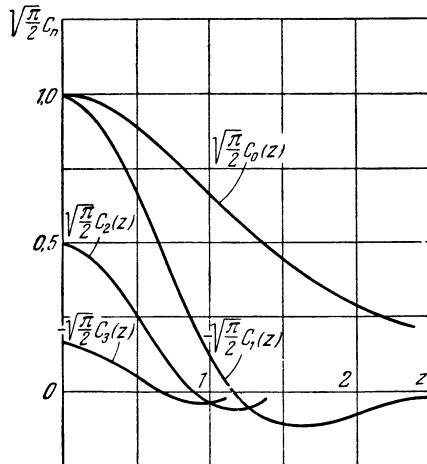


Рис. 10.19.

материала § 10.2, где даны для тех же нелинейностей выражения q^{cl} . При этом использовался второй способ определения q^{cl} (10.48).

1. Идеальная релейная характеристика (рис. 10.7, а)

$$q^{cp}(A, \sigma_x) = \frac{c}{\sigma_x} C_0(z), \quad (10.129)$$

где $C_0(z)$ представлена графически на рис. 10.19 (аналитическое выражение дается ниже), причем

$$z = \frac{A}{\sigma_x \sqrt{2}}.$$

2. Однозначная релейная характеристика с зоной нечувствительности (рис. 10.8, а)

$$q^{cp}(A, \sigma_x) = \frac{c}{\sigma_x} \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{2n} C_n(z), \quad (10.130)$$

где

$$b_1 = \frac{b}{\sigma_x \sqrt{2}},$$

а функции $C_n(z)$ даны также на рис. 10.19 (достаточно брать конечную сумму до $n=3$). Графики рис. 10.19 построены по формуле

$$C_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+n} [2(i+n)]!}{(2n)! (i!)^2 (i+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2i} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

3. Петлевая релейная характеристика общего вида (рис. 10.9, а):

$$q^{cp}(A, \sigma_x) = \frac{c}{\sigma_x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+m^{2n}}{2} b_1^{2n} C_n(z). \quad (10.131)$$

4. Характеристика типа насыщения (рис. 10.10, а)

$$q^{cp}(A, \sigma_x) = \frac{c}{\sigma_x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_1^{2n}}{2n+1} C_n(z). \quad (10.132)$$

5. Характеристика с зоной нечувствительности (рис. 10.11, б)

$$q^{cp}(A, \sigma_x) = k - \frac{kb}{\sigma_x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_1^{2n}}{2n+1} C_n(z) \quad (10.133)$$

(практически во всех случаях достаточно суммировать только до $n=3$).

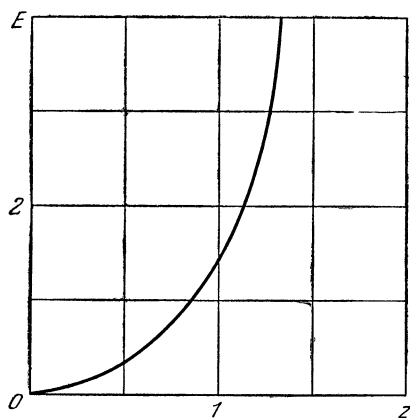


Рис. 10.20.

6. Квадратическая характеристика (рис. 10.11, в)

$$\left. \begin{aligned} F &= kx^2 \operatorname{sign} x = k |x| x, \\ q^{cp}(A, \sigma_x) &= k\sigma_x E(z), \end{aligned} \right\} \quad (10.134)$$

где $E(z)$ изображена на графике рис. 10.20, построенном по формуле

$$E(z) = z^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 + 2z^2 - 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i+1)!}{i! [(i+2)!]^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(i+1)} \right].$$

7. Степенные характеристики нечетных степеней (рис. 10.11, в)

$$F = kx^3, \quad q^{cp}(A, \sigma_x) = \frac{3k}{2}(A^2 + 2\sigma_x^2); \quad (10.135)$$

$$F = kx^5, \quad q^{cp}(A, \sigma_x) = \frac{15k}{2}\left(\frac{1}{4}A^2 + 2\sigma_x^2 A^2 + 2\sigma_x^4\right); \quad (10.136)$$

в общем виде

$$F = kx^{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$q^{cp}(A, \sigma_x) = \frac{k(2n+1)!}{2^n} \sum_{i=0}^n \frac{2iA^{2(n-i)}\sigma_x^{2i}}{i![(n-i)!]^2}. \quad (10.137)$$

После того как написано уравнение (10.128), применяется формула типа (10.118), а именно:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega) + q^{cp}(A, \sigma_x)R(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) d\omega, \quad (10.138)$$

откуда, используя (10.23), получаем уравнение для определения величины σ_x в зависимости от амплитуды автоколебаний A :

$$\sigma_x^2 = hI_n(A, \sigma_x). \quad (10.139)$$

Отсюда можно определить $\sigma_x(A)$ графически тем же способом, как на рис. 10.14, заменив там букву \tilde{x} на A , причем кривая 1 строится по уравнению

$$\sigma_x^2 = \zeta,$$

а кривые 2 для разных постоянных значений A — по уравнению:

$$hI_n(A, \sigma_x) = \zeta,$$

после чего абсциссы точек пересечения сносятся на правый график, где по оси абсцисс откладываются соответствующие значения A .

Найденная таким образом зависимость $\sigma_x(A)$ подставляется в уравнение (10.126), после чего из этого уравнения любым из методов § 2.3 могут быть определены амплитуды A и частота Ω автоколебаний. Решение задачи завершается подстановкой этого значения A в найденную выше зависимость $\sigma_x(A)$, что дает искомую величину среднеквадратического значения σ_x медленно меняющейся случайной составляющей x^{cl} .

Так выглядит второй вариант решения задачи о прохождении медленно меняющихся случайных воздействий через автоколебательную систему. Это же можно применить и для исследования прохождения медленно меняющихся случайных воздействий через нелинейную систему, работающую в режиме вынужденных колебаний (например,

при вибрационном сглаживании нелинейностей). В этом случае только уравнения (10.121), (10.124) и (10.126) меняются на следующие:

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t) + S_2(p)B \sin \Omega_b t, \quad (10.140)$$

$$\tilde{x} = A_b \sin(\Omega_b t + \varphi),$$

$$[Q(p) + q^{ct}(A_b, \sigma_x)R(p)]\tilde{x} = S_2(p)B \sin \Omega_b t. \quad (10.141)$$

Формулы же (10.125), (10.127) — (10.139) остаются прежними с заменой в них A на A_b . Уравнение (10.141) после отыскания $\sigma_x(A_b)$ решается методами главы IX.

Шестая задача. В тех случаях, когда нельзя рассчитывать на то, что спектр частот случайной составляющей процесса много выше или много ниже частот автоколебаний, применение методов статистической и гармонической линеаризации затрудняется. Все же часто в этих случаях может принести пользу прием, развитый А. А. Первозванским [331] на основе идей Райса [307] об определении плотности вероятности суммы синусоидального сигнала и случайной составляющей.

Пусть, как и прежде, решение нелинейного уравнения (10.121) ищется в виде

$$x = \tilde{x} + x^{cl}, \quad \tilde{x} = A \sin \psi, \quad (10.142)$$

причем оно рассматривается в целом как единый случайный процесс. Поскольку выбор фазы ψ произволен, она считается равномерно распределенной величиной. Плотность вероятности $w_c(x)$ суммарного случайного процесса (10.142) определяется на основании теории вероятности формулой

$$w_c(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi w(x - A \sin \psi) d\psi, \quad (10.143)$$

где w — нормальный закон распределения (10.42), а именно:

$$w(x - A \sin \psi) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - A \sin \psi}{\sigma_x} \right)^2}. \quad (10.144)$$

Статистическая линеаризация нелинейности $F(x, px)$ приводится здесь, в отличие от прежнего (10.40), для всего процесса в целом:

$$F = q^{sk}x = q^{sk}(\tilde{x} + x^{cl}), \quad (10.145)$$

где суммарный эквивалентный коэффициент усиления q^{sk} определяется из условия минимума среднеквадратического отклонения заменяющей функции от исходной, т. е. из условия

$$M[(F - q^{sk}x)^2] = \min,$$

откуда для однозначных нелинейностей $F(x)$ имеем:

$$q^{\text{нл}} = \frac{M[Fx]}{M[x^2]} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) x w_c(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w_c(x) dx}. \quad (10.146)$$

Подставив сюда (10.143) и изменив порядок интегрирования, в числителе получим:

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} F(x^{cл} + A \sin \psi) (x^{cл} + A \sin \psi) w(x) dx,$$

а в знаменателе

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} (x^{cл} + A \sin \psi)^2 w(x) dx.$$

Но из (10.125) и (10.41)

$$q^{cт}(A, \sigma_x) = \frac{2}{\pi A} \int_0^\pi \sin \psi d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} F(x^{cл} + A \sin \psi) w(x) dx,$$

а из (10.127) и (10.48)

$$q^{cр}(A, \sigma_x) = \frac{1}{\pi \sigma_x^2} \int_0^\pi d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} F(x^{cл} + A \sin \psi) x w(x) dx.$$

Кроме того, используем выражение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n w(x) dx = \begin{cases} (2i-1)!! \sigma_x^{2i} & (n=2i), \\ 0 & (n=2i-1) \end{cases} \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Из написанных соотношений вытекает, что

$$J_1 = \frac{1}{2} A^2 q^{cт}(A, \sigma_x) + \sigma_x^2 q^{cр}(A, \sigma_x), \quad J_2 = \frac{1}{2} A^2 + \sigma_x^2.$$

Поэтому формула (10.146) принимает окончательно вид

$$q^{\text{нл}} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{q^{cт}(A, \sigma_x) + \frac{2\sigma_x^2}{A^2} q^{cр}(A, \sigma_x)}{1 + \frac{2\sigma_x^2}{A^2}}. \quad (10.147)$$

Следовательно, чтобы получить конкретные выражения коэффициента $q^{\text{нк}}$ для типовых нелинейностей, можно воспользоваться уже готовыми выражениями $q^{\text{ст}}$ (10.104)—(10.114) и $q^{\text{сп}}$ (10.129)—(10.137).

В результате дисперсия $\sigma_x^2(A)$ случайной составляющей $x^{\text{сл}}$ будет определяться аналогично (10.138) формулой

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega) + q^{\text{нк}}(A, \sigma_x) R(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) d\omega \quad (10.148)$$

с применением того же графического приема, а амплитуда A и частота Ω автоколебаний — методами § 2.3 по характеристическому уравнению

$$Q(p) + q^{\text{нк}}(A, \sigma_x) R(p) = 0, \quad (10.149)$$

куда подставляется $\sigma_x(A)$ из (10.148). Определив отсюда A , найдем окончательно и величину σ_x .

Следует заметить только, что этими формулами задача не решается в «резонансном» случае, т. е. необходимо наложить условие, что спектральная плотность внешнего воздействия $S_f(\omega)$ равна нулю на частоте $\omega = \Omega$, равной частоте автоколебаний, иначе интеграл (10.148) может стать расходящимся, так как, согласно (10.149), знаменатель в нем обращается в нуль при $\omega = \Omega$. «Резонансный» случай рассмотрен особо в работе [338].

§ 10.5. Пример медленно меняющихся случайных процессов в автоколебательной системе

Проиллюстрируем на конкретных системах в числах методы исследования случайных процессов в нелинейных системах, изложенные в данной главе.

В настоящем параграфе рассматривается пример магнитоэлектрического акселерометра. Прибор представляет собой замкнутую автоматическую систему, работающую в вибрационном автоколебательном режиме. Схема ее изображена на рис. 10.21. Эта система была описана ранее в § 6.4, где был произведен ее расчет при измерении постоянной величины ускорения и, согласно § 5.3, может быть произведен расчет при заданном во времени изменении ускорения. Теперь предположим, что измеряемое этим же прибором ускорение¹⁾ является случайной функцией времени; например, это может быть боковое ускорение самолета, возникающее вследствие турбулентности атмосферы.

Согласно (6.54) динамика системы прибора с упрощением $F_2(\varphi) = \varphi$ описывается уравнением²⁾

$$[T_2^2 T_k p^3 + (T_2^2 + T_1 T_k) p^2 + (T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) p + 1 + k_2] x + k_1 F(x) = k_3 (T_k p + 1) f(t), \quad (10.150)$$

¹⁾ Но с учетом только одной нелинейности вместо двух в § 6.4.

²⁾ Здесь φ заменено на x .

где $T_1 = 0,6$ сек — постоянная демпфирования чувствительной катушки, $T_2^2 = 0,007$ сек² — инерционная постоянная чувствительной катушки, $T_k = 0,0001$ сек — электрическая ее постоянная, $T_e = 0,004$ сек — постоянная, связанная с противо-э. д. с., $k_1 = 0,7 \frac{1}{a}$,

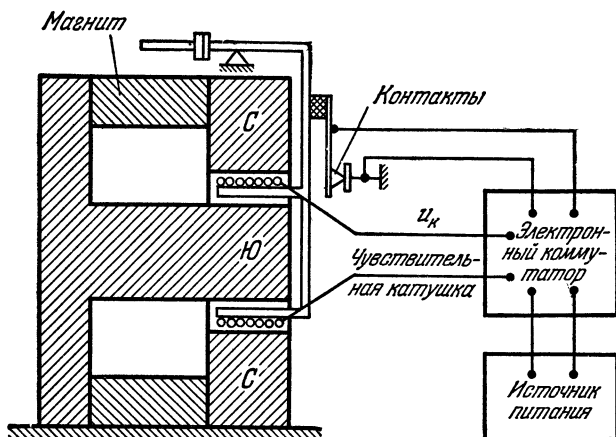


Рис. 10.21.

$k_2 = 0,0715 \cdot 10^{-3} \frac{1}{2 \cdot \text{см}}$, $k_3 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{сек}^2/\text{см}$ — передаточные числа, $F(x)$ — нелинейная характеристика типа идеального реле:

$$F = \text{sign } x, \quad (10.151)$$

$f(t)$ — измеряемое боковое ускорение самолета, причем

$$f(t) = 0,1 v(t), \quad (10.152)$$

($v(t)$ — скорость бокового ветра). Основываясь на данных литературы [323], будем считать ее стационарной случайной функцией времени, корреляционная функция которой $r_v(\tau)$ получена экспериментально (кривая 1 на рис. 10.22). Для $\tau \leq 15$ эта кривая хорошо аппроксимируется следующей кривой (кривая 2):

$$r_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_1 \tau, \quad (10.153)$$

где

$$\sigma_v^2 = 0,01 [\text{м/сек}]^2, \quad \alpha = 0,2 \text{ 1/сек}, \quad \omega_1 = 0,1 \text{ 1/сек}.$$

На основании (10.152) можем написать корреляционную функцию измеряемого ускорения

$$r_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_1 \tau, \quad \sigma_f^2 = 10^{-4}. \quad (10.154)$$

Отсюда по формуле (10.14) находим спектральную плотность внешнего случайного воздействия (измеряемого бокового ускорения самолета):

$$s_f(\omega) = 2\alpha\sigma_f^2 \frac{\omega^2 + \gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^2 - 4\omega_1^2\omega^2}, \quad (10.155)$$

где

$$\alpha = 0,2, \quad \sigma_f^2 = 10^{-4}, \quad \omega_1 = 0,1, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \omega_1^2 = 0,05. \quad (10.156)$$

Найдем сначала автоколебания системы при отсутствии внешнего воздействия ($f=0$):

$$x = A_c \sin \Omega_c t.$$

Используя гармоническую линеаризацию нелинейности (10.151),

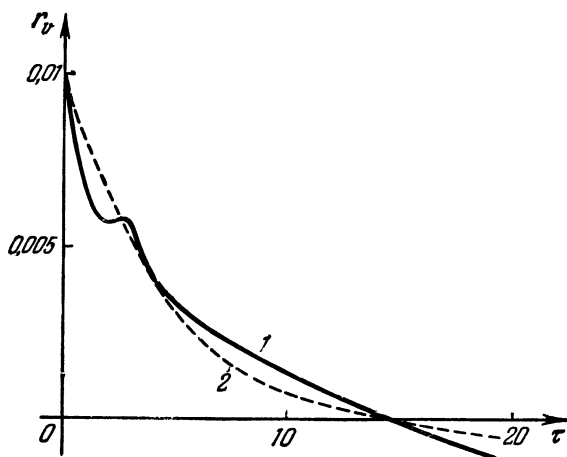


Рис. 10.22.

согласно главе III и формуле (10.150), получаем характеристическое уравнение

$$T_2^2 T_k p^3 + (T_2^2 + T_1 T_k) p^2 + (T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) p + 1 + k_2 + \frac{4k_1}{\pi A_c} = 0.$$

Подставив $p = j\Omega_c$ и выделив вещественную и мнимую части, будем иметь два уравнения:

$$\begin{aligned} 1 + k_2 + \frac{4k_1}{\pi A_c} - (T_2^2 + T_1 T_k) \Omega_c^2 &= 0, \\ (T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) \Omega_c - T_2^2 T_k \Omega_c^3 &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим частоту и амплитуду автоколебаний при отсутствии внешнего воздействия ($f=0$):

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e}{T_2^2 T_k}} = 929 \frac{1}{\text{сек}}, \quad (10.157)$$

$$A_c = \frac{4k_1}{\pi} \frac{T_2^2 T_k}{(T_2^2 + T_1 T_k)(T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) - T_2^2 T_k (1 + k_2)} = 1,463 \cdot 10^{-4}. \quad (10.158)$$

При такой частоте автоколебаний (10.157) случайное воздействие, описываемое спектральной плотностью (10.155), вполне можно считать медленно меняющимся. Поэтому для определения автоколебаний $x^* = A \sin \Omega t$ при наличии случайного воздействия в данной системе воспользуемся уравнением (10.7). Соответствующее ему характеристическое уравнение на основании (10.150) будет

$$T_2^2 T_k p^3 + (T_2^2 + T_1 T_k) p^2 + (T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) p + 1 + k_2 + k_1 q(A, x^0) = 0,$$

где, согласно § 5.6, для нелинейности (10.151) имеем:

$$q = \frac{4}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x^0}{A}\right)^2}. \quad (10.159)$$

Подставив в характеристическое уравнение $p = j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned} 1 + k_2 + k_1 q(A, x^0) - (T_2^2 + T_1 T_k) \Omega^2 &= 0, \\ (T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) \Omega - T_2^2 T_k \Omega^3 &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим прежнее значение частоты

$$\Omega = \Omega_c = \sqrt{\frac{T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e}{T_2^2 T_k}} = 929 \frac{1}{\text{сек}},$$

а также, учитывая (10.158), — новое значение амплитуды, зависящее от медленно меняющейся составляющей x^0 , а именно:

$$A = \frac{A_c}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2x^0}{A_c}\right)^2}}. \quad (10.160)$$

Очевидно, что входящие сюда величины ограничены пределами

$$|x^0| \leq \frac{A_c}{2}, \quad \frac{A_c}{\sqrt{2}} \leq A \leq A_c. \quad (10.161)$$

Для определения случайной медленно меняющейся составляющей $x^0(t)$ нужно использовать уравнение (10.6), которое для данной системы,

согласно (10.150), принимает вид

$$[T_2^2 T_k p^3 + (T_2^2 + T_1 T_k) p^2 + (T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) p + 1 + k_3] x^0 + k_1 F^0 = k_3 (T_k p + 1) f(t), \quad (10.162)$$

где, согласно § 5.6, для заданной нелинейности (10.151)

$$F^0 = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{A} \quad (|x^0| \leq A); \quad (10.163)$$

при $x^0 < -A$ будет $F^0 = -1$, а при $x^0 > A$ будет $F^0 = +1$.

Подставив сюда выражение A из (10.160), найдем функцию смещения (т. е. зависимость F^0 только от x^0 и от параметров системы)

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x^0 \sqrt{2}}{\sqrt{A_c^2 + A_c} \sqrt{A_c^2 - 4(x^0)^2}}$$

или, положив $\frac{2x^0}{A_c} = \sin \beta$, получим $\Phi = \beta/\pi$, т. е.

$$F^0 = \Phi(x^0) = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{2x^0}{A_c} \quad \left(|x^0| \leq \frac{A_c}{2}\right); \quad (10.164)$$

при $x^0 < -\frac{A_c}{2}$ будет $F^0 = -1$, а при $x^0 > \frac{A_c}{2}$ будет $F^0 = +1$, причем величина A_c , входящая в формулу (10.164), зависит, согласно (10.158), от параметров данной системы. Полученная функция смещения изображена на рис. 10.23.

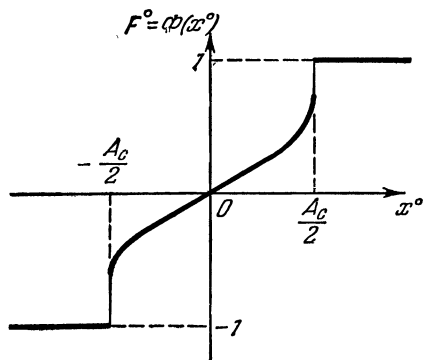


Рис. 10.23.

Это и является сглаженной при помощи автоколебаний нелинейной характеристикой для медленно меняющейся составляющей процесса $x^0(t)$ взамен чисто релейной (10.151).

Дальнейшее решение задачи по определению дисперсии $\sigma_{x^0}^2$ медленно меняющейся случайной составляющей $x^0(t)$, а также математического ожидания \tilde{A} и дисперсии σ_A^2 амплитуды A колебательной составляющей x^* проведем в двух вариантах: 1) путем обычной ли-

неаризации функции смещения, согласно § 10.1, и 2) путем статистической линеаризации ее (четвертая задача § 10.4). Эта задача была решена А. А. Первозванским [334].

Обычная линеаризация функции смещения (10.164) по формуле (10.11) для малых отклонений x^0 вблизи начала координат дает

$$F^0 = k_n x^0, \quad k_n = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \frac{2}{\pi A_c} = 0,435 \cdot 10^4. \quad (10.165)$$

Попутно проверим на этом примере совпадение результатов, получаемых из формул (10.11) и (10.12). Для этого вычислим k_n , согласно (10.12), путем частного дифференцирования по x^0 выражения F^0 (10.163) непосредственно без преобразования его к функции смещения. Получаем:

$$\begin{aligned} k_n &= \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0} = \\ &= \left(\frac{2}{\pi A} \right)_{x^0=0} = \frac{2}{\pi A_c}, \end{aligned}$$

что действительно совпадает с (10.165).

Статистическая же линеаризация функции смещения (10.164) по формуле (10.115) дает

$$F^0 = q^{cl}(\sigma_{x^0}) x^0, \quad (10.166)$$

где, согласно (10.116), (10.164) и (10.26), на участке $|x^0| \leq \frac{A}{2}$ имеем:

$$q^{cl} = \frac{1}{\pi \sigma_{x^0}^3 \sqrt{2}} \int_{-\frac{A_c}{2}}^{\frac{A_c}{2}} x^0 \arcsin \frac{2x^0}{A_c} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^0}{\sigma_{x^0}} \right)^2} dx^0$$

или

$$q^{cl}(\sigma_{x^0}) = \frac{8}{A_c \pi \sqrt{\pi}} z^3 P_1(z) \quad \left(|x^0| \leq \frac{A_c}{2} \right), \quad (10.167)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_1(z) &= \int_0^1 y \arcsin y e^{-z^2 y^2} dy, \\ z &= \frac{A_c}{2\sigma_{x^0} \sqrt{2}}, \quad y = \frac{2x^0}{A_c}, \end{aligned} \right\} \quad (10.168)$$

причем функция $P_1(z)$ заранее вычислена и представлена в виде графика (рис. 10.24).

Если же на указанную в (10.167) ограниченность величины x^0 рассчитывать нельзя, то получим:

$$q^{cl}(\sigma_{x^0}) = \frac{8}{A_c \pi \sqrt{\pi}} z^3 P_1(z) + \frac{2}{\sigma_{x^0}^3 \sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A_c}{2}}^{\infty} x^0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^0}{\sigma_{x^0}} \right)^2} dx^0$$

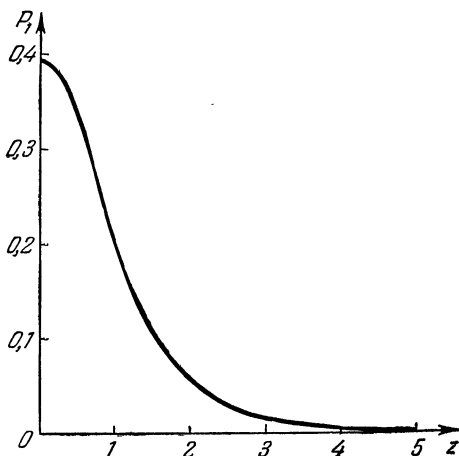


Рис. 10.24.

или

$$q^{cl}(\sigma_{x^0}) = \frac{4z}{A_c \sqrt{\pi}} \left[\frac{2z^2}{\pi} P_1(z) + e^{z^2} \right]. \quad (10.169)$$

Дисперсия медленно меняющейся случайной составляющей процесса $x^0(t)$, согласно (10.18), (10.17) и (10.162), при обычной линеаризации (10.165) определяется формулой

$$\sigma_{x^0}^2 = h \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{T_k j\omega + 1}{-T_2^2 T_k j\omega^3 - (T_2^2 + T_1 T_k) \omega^2 + (T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) \omega + 1 + k_2 + k_1 k_H} \right|^2 \times \\ \times \frac{(\omega^2 + \gamma^2) d\omega}{(\omega^2 + \gamma^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega^2},$$

где

$$h = 2\alpha \sigma_f^2 k_3^2 = 0,576 \cdot 10^{-10}. \quad (10.170)$$

Замечая, что с учетом (10.156)

$$(\omega^2 + \gamma^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega^2 = |(j\omega)^2 + 2\alpha(j\omega) + \gamma^2|^2, \quad (10.171)$$

представим весь знаменатель под интегралом в виде

$$|H(j\omega)|^2 = |a_0(j\omega)^5 + a_1(j\omega)^4 + a_2(j\omega)^3 + a_3(j\omega)^2 + a_4(j\omega) + a_5|^2,$$

где

$$a_0 = T_2^2 T_k = 0,7 \cdot 10^{-6}; \quad a_1 = T_2^2 + T_1 T_k + 2\alpha T_2^2 T_k = 0,706 \cdot 10^{-2};$$

$$a_2 = T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e + 2\alpha(T_2^2 + T_1 T_k) + \gamma^2 T_2^2 T_k = 0,607;$$

$$a_3 = 2\alpha(T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) + \gamma^2(T_2^2 + T_1 T_k) + 1 + k_2 + k_1 k_H = \\ = 1,314 + 0,7 k_H;$$

$$a_4 = \gamma^2(T_1 + T_k + k_2 T_k + T_e) + 2\alpha(1 + k_2 + k_1 k_H) = 0,459 + 0,28 k_H;$$

$$a_5 = \gamma^2(1 + k_2 + k_1 k_H) = 0,0536 + 0,035 k_H.$$

Числитель же весь под интегралом, как этого требует методика вычисления интеграла, указанная в § 10.1, запишем в виде

$$G(\omega) = |T_k j\omega + 1|^2 (\omega^2 + \gamma^2) = T_k^2 \omega^4 - (1 + T_k^2 \gamma^2) \omega^2 + \gamma^2 = \\ = b_0 \omega^4 + b_1 \omega^2 + b_2 \omega^0 + b_3 \omega^2 + b_4,$$

где

$$b_0 = b_1 = 0, \quad b_2 = T_k^2 = 10^{-8}, \quad b_3 = 1 + T_k^2 \gamma^2 \approx 1, \quad b_4 = \gamma^2 = 0,05.$$

Итак,

$$\sigma_{x^0}^2 = h \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{b_0 \omega^8 + \dots + b_4}{|a_0(j\omega)^5 + \dots + a_5|^2} d\omega = h I_5. \quad (10.172)$$

Воспользовавшись готовой формулой (10.22) для I_5 и подставив значения всех коэффициентов, получим выражение искомой дисперсии $\sigma_{x^0}^2$ в зависимости от крутизны функции смещения k_H в виде

$$\sigma_{x^0}^2 = \frac{0,295 \cdot 10^{-9} (k_H^2 - 0,869 \cdot 10^4 k_H - 0,148 \cdot 10^5)}{k_H^4 - 0,869 \cdot 10^4 k_H^3 - 0,432 \cdot 10^5 k_H^2 - 0,708 \cdot 10^5 k_H - 0,390 k_H^5} \cdot (10.173)$$

Подставив значение k_H (10.165), найдем дисперсию

$$\sigma_{x^0}^2 = 0,156 \cdot 10^{-16}$$

и среднеквадратическое значение

$$\sigma_{x^0} = 0,395 \cdot 10^{-8}. \quad (10.174)$$

Как видим, среднеквадратическое значение x^0 много меньше величины $\frac{A_c}{2} = 0,732 \cdot 10^{-4}$, фигурирующей на рис. 10.23. Поэтому расчет, произведенный с помощью обычной линеаризации (10.165), в данном примере является вполне оправданным.

Если же при других числовых данных величина σ_{x^0} будет больше, то полученное с помощью обычной линеаризации выражение типа (10.173) можно принять за первое приближение, а затем для его исправления применить статистическую линеаризацию (10.166). Для этого, как вытекает из сравнения (10.17) с (10.118), нужно будет только в выражение $\sigma_{x^0}^2$ (10.173) подставить $q^{cl}(\sigma_{x^0})$ вместо k_H с использованием формулы (10.167) или (10.169). Тогда получится уравнение относительно σ_{x^0} вида

$$\sigma_{x^0} = h I_5(\sigma_{x^0}),$$

которое легко решается графически (рис. 10.18).

Наконец, нужно найти математическое ожидание (среднее значение) \tilde{A} и дисперсию $\sigma_{\tilde{A}}^2$ амплитуды колебательной составляющей. По формулам (10.24) и (10.25) с учетом (10.160) имеем:

$$\tilde{A} = \frac{A_c}{2\sigma_{x^0}\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{A_c}{2}}^{\frac{A_c}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2x^0}{A_c}\right)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^0}{\sigma_{x^0}}\right)^2} dx^0,$$

$$\sigma_{\tilde{A}}^2 = \frac{1}{\sigma_{x^0}\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{A_c}{2}}^{\frac{A_c}{2}} \left(\frac{A_c}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2x^0}{A_c}\right)^2}} - \tilde{A} \right)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^0}{\sigma_{x^0}}\right)^2} dx^0$$

или

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{x^0} z^2 P_2(z), \\ \sigma_A^2 &= \frac{3}{\sqrt{\pi}} \sigma_{x^0}^3 z^3 P_3(z) - \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sigma_{x^0}^3 z^2 \tilde{A} P_2(z) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} z \tilde{A}^2 P_4(z), \end{aligned} \right\} \quad (10.175)$$

где

$$P_2(z) = \int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{1 - y^2}} e^{-z^2 y^2} dy, \quad z = \frac{A_c}{2\sigma_{x^0} \sqrt{2}}, \quad y = \frac{2x^0}{A_c},$$

$$P_3(z) = \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - y^2}) e^{-z^2 y^2} dy, \quad P_4(z) = \int_0^1 e^{-z^2 y^2} dy.$$

Для сравнительно малых значений z ($0 \leq z \leq 5$) функции $P_2(z)$, $P_3(z)$ и $P_4(z)$ представлены в виде графиков на рис. 10.25.

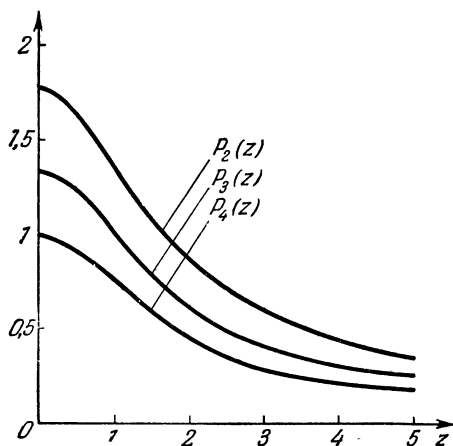


Рис. 10.25.

В рассматриваемом числовом примере с учетом (10.174) $z = 1,31 \cdot 10^4$, т. е. z значительно больше пяти, а y мало. В этом случае формулы (10.175) можно упростить, приняв

$$\tilde{A} = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} z^2 \int_0^\infty \sqrt{2} e^{-z^2 y^2} dy = 2\sqrt{2} \sigma_{x^0} z = A_c \quad (10.176)$$

и, далее,

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{A_c^2}{2} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - y^2}} - \sqrt{2} \right)^2 e^{-z^2 y^2} dy = \\ &= \frac{8z^3}{\sqrt{\pi}} \sigma_{x0}^2 \int_0^1 \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - y^2}} - \sqrt{2} \right)^2 e^{-z^2 y^2} dy.\end{aligned}$$

При малом y можно считать

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - y^2}} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{y^2}{8} \right),$$

а верхний предел интегрирования заменить бесконечностью. Тогда

$$\sigma_A^2 = \frac{8z^3}{\sqrt{\pi}} \sigma_{x0}^2 \int_0^\infty \left(-\frac{y^2 \sqrt{2}}{8} \right)^2 e^{-z^2 y^2} dy = \frac{z^3}{4\sqrt{\pi}} \sigma_{x0}^2 \int_0^\infty y^4 e^{-z^2 y^2} dy.$$

Но известно следующее выражение для гамма-функции:

$$\Gamma(u) = (z^2)^u \int_0^\infty t^{u-1} e^{-z^2 t} dt.$$

В рассматриваемом интеграле $t = y^2$, $u = \frac{5}{2}$. Поэтому

$$\sigma_A^2 = \frac{z^3}{4\sqrt{\pi}} \sigma_{x0}^2 \frac{1}{2z^5} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Известна также формула

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \prod_{k=1}^n (2k - 1),$$

откуда

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} 6.$$

Окончательно получаем:

$$\sigma_A^2 = \frac{3}{16z^2} \sigma_{x0}^2. \quad (10.177)$$

Итак, в данном примере, учтя (10.174), (10.176) и (10.158), имеем:

$$\sigma_{x0} = 0,395 \cdot 10^{-8}; \quad \tilde{A} = 1,463 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_A = 1,305 \cdot 10^{-13}.$$

В результате все искомые вероятностные характеристики решения $x = x^0 + x^*$, где $x^* = A \sin \Omega t$, найдены, причем, как было определено ранее, $\Omega = 929$ 1/сек.

§ 10.6. Пример влияния помех на динамику нелинейной системы

На нелинейную систему автоматического управления (рис. 10.26, а) действует случайная помеха $f(t)$, являющаяся высокочастотной по сравнению с медленно меняющимся полезным сигналом управления

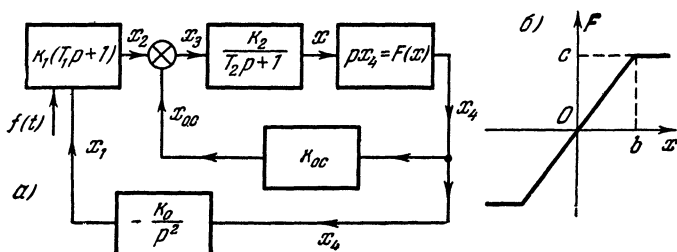


Рис. 10.26.

в данной системе. Проходя через нелинейное звено, помеха изменяет коэффициент усиления полезного сигнала в нем (вторая задача § 10.3). Требуется оценить влияние этого явления на динамические качества данной системы автоматического управления по полезному сигналу [336].

Уравнение замкнутой системы (рис. 10.26) в целом будет

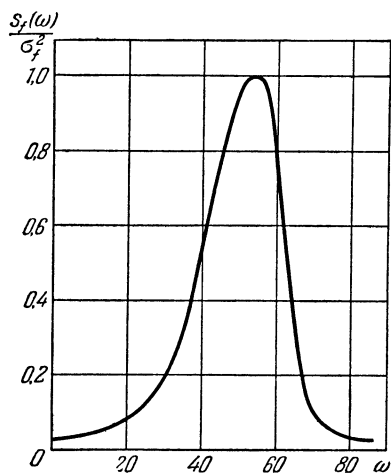


Рис. 10.27.

$$p^3(T_2 p + 1)x + (k_2 k_{oc} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0)F(x) = k p^3(T_1 p + 1)f(t), \quad (10.178)$$

где $k = k_1 k_2$, $F(x)$ — заданная нелинейность (рис. 10.26, б). При этом заданы: $k = 18$, $k_2 = 60$, $k_{oc} = 0,03$, $k_0 = 0,5$, $T_1 = 0,5$, $T_2 = 0,02$, $c/b = 4$.

Помеха имеет нормальный закон распределения и задана спектральной плотностью (рис. 10.27):

$$S_f(\omega) = \frac{2\beta\sigma_f^2}{(\omega_1^2 - \alpha^2\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2}, \quad (10.179)$$

где $\alpha = 0,05$, $\beta = 1,35$, $\omega_1^2 = 7,5$, $\mu = 0,03$. Меняя величину дисперсии помехи σ_f^2 , характеризующую «уровень помехи», будем определять динамические качества системы в зависимости от величины σ_f .

Произведя статистическую линеаризацию (10.40), разобьем уравнение системы (10.178) на два, соответственно для регулярной и случайной составляющих:

$$p^3 (T_2 p + 1) \tilde{x} + (k_2 k_{o.c} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) \tilde{F} = 0, \quad (10.180)$$

$$[p^3 (T_2 p + 1) + (k_2 k_{o.c} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) q^{cl}] x^{cl} = k p^3 (T_1 p + 1) f(t).$$

Поскольку передаточная функция линейной части системы

$$W_{\pi}(p) = \frac{k_2 k_{o.c} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0}{p^3 (T_2 p + 1)}$$

при заданных выше ее параметрах практически не пропускает¹⁾ частот, при которых спектральная плотность помехи (рис. 10.27) имеет существенное значение, то, согласно (10.97), дисперсия помехи на входе нелинейного звена будет

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2 s_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k(T_1 j\omega + 1)}{T_2 j\omega + 1} \right|^2 \frac{2\beta\sigma_f^2}{(\omega_1^2 - \alpha^2\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

Чтобы привести этот интеграл к стандартному виду (10.23), преобразуем сначала знаменатель спектральной плотности, а именно:

$$(\omega_1^2 - \alpha^2\omega^2)^2 + \mu^2\omega^2 = |\alpha^2(j\omega)^2 + \mu j\omega + \omega_1^2|^2.$$

Тогда получим:

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha^2 T_2, & a_1 &= \alpha^2 + \mu T_2, \\ a_2 &= \omega_1^2 T_2 + \mu, & a_3 &= \omega_1^2. \end{aligned}$$

В числителе же получим:

$$G(\omega) = |T_1 j\omega + 1|^2 = b_0 \omega^4 + b_1 \omega^2 + b_2,$$

где

$$b_0 = 0, \quad b_1 = T_1^2, \quad b_2 = 1.$$

В результате находим:

$$\sigma_x = k \sigma_f \sqrt{2\beta I_3}, \quad (10.181)$$

где, согласно (10.22):

$$I_3 = \frac{\alpha^2 + \mu T_2 - T_1^2 \omega_1^2}{2\mu \omega_1^2 (\alpha^2 + \mu T_2 + T_2^2 \omega_1^2)}. \quad (10.182)$$

¹⁾ Это определяется путем простого построения амплитудной частотной характеристики линейной части системы по данной ее передаточной функции.

Перейдем теперь к уравнению (10.180) для регулярной составляющей, т. е. для полезного сигнала. Функция \tilde{F} определяется в нем графиком рис. 10.10, б в зависимости от $\tilde{x}_1 = \frac{\tilde{x}}{b}$ и $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$. В начальной части все кривые этого графика близки к прямым. Поэтому можно провести их обычную линеаризацию в виде

$$\tilde{F} = k_n \tilde{x}, \quad (10.183)$$

где k_n — крутизна в начале координат (рис. 10.10, б), которая зависит от величины σ_1 . Для данной задачи получим:

σ_1	0	0,1	0,3	0,6	1,0	2,0	3,0	5,0	10	∞
k_n	4,0	4,0	4,0	3,2	2,3	1,4	1,0	0,6	0,4	0

Физически величина k_n является коэффициентом усиления полезного сигнала в нелинейном звене в присутствии помех, причем приведенная таблица дает зависимость этого коэффициента от уровня помехи, т. е. от среднеквадратического ее значения $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$, на входе нелинейного звена.

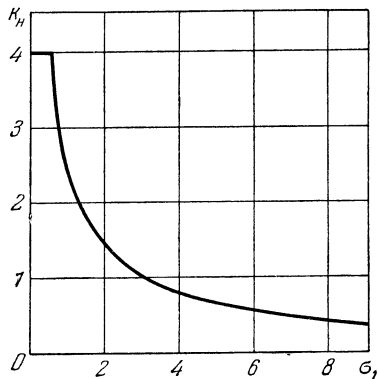


Рис. 10.28.

Как видим, увеличение уровня помехи ведет к существенному снижению коэффициента усиления полезного сигнала в нелинейном звене, что показано графически на рис. 10.28. Это составляет принципиальную особенность нелинейной системы, которая обуславливает зависимость всех ее статических и динамических качеств по полезному сигналу, в том числе и устойчивости, от уровня помех.

Найдем, например, зависимость устойчивости системы от уровня помех. Для этого, согласно (10.180) и (10.183), запишем характеристическое уравнение системы:

$$T_2 p^4 + p^3 + k_2 k_{o.c} k_n p^2 + k k_0 k_n T_1 p + k k_0 k_n = 0. \quad (10.184)$$

Условие устойчивости системы по критерию Гурвица принимает вид

$$k_n > \frac{1}{T_1 (k_2 k_{o.c} - k k_0 T_2)}. \quad (10.185)$$

При заданных в начале параграфа параметрах это дает $k_n > 1,17$. Это, согласно рис. 10.28, соответствует значению

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b} = 2,65.$$

Но, согласно (10.181):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b} = \frac{\sigma_f}{b_f} \sqrt{2\beta I_3}, \quad (10.186)$$

где обозначено

$$b_f = \frac{b}{k};$$

эту величину удобно принять для выражения среднеквадратического значения внешней помехи σ_f в относительных единицах, учитывая, что, согласно рис. 10.26, размерности переменных $f(t)$ и x связаны между собой именно через коэффициент $k = k_1 k_2$.

Вычислив величину I_3 по формуле (10.182) при заданных выше параметрах системы, из (10.186) находим:

$$\frac{\sigma_f}{b_f} = 0,00437.$$

Это означает, что только при уровне помех, не превышающем указанного значения, данная система остается устойчивой. Далее она теряет устойчивость по полезному сигналу.

Выясним теперь влияние параметров k и T_1 на устойчивость системы в присутствии помех. Для этого по формуле (10.185)

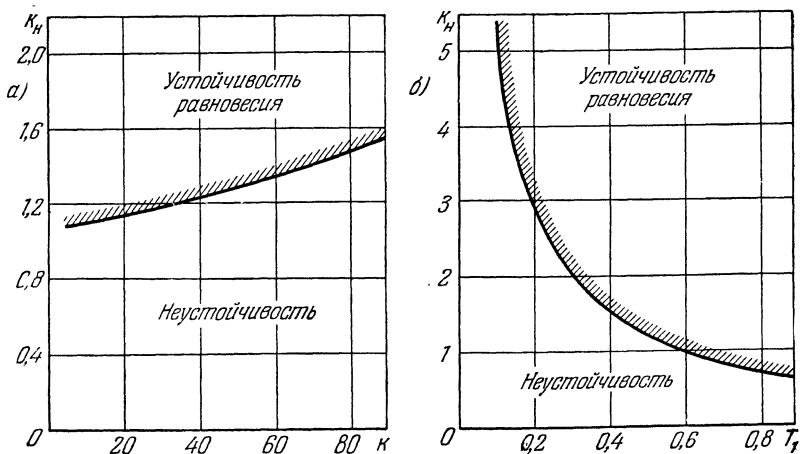


Рис. 10.29.

найдем сначала границы устойчивости системы на плоскостях параметров k , k_n и T_1 , k_n (рис. 10.29, а и б). На границе устойчивости для каждого значения k_n по графику рис. 10.28 (или по приведенной выше таблице) находим величину σ_1 , а по ней, согласно (10.186), и среднеквадратическое значение внешней помехи, при которой

теряется устойчивость системы

$$\frac{\sigma_f}{b_f} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\beta I_3}}. \quad (10.187)$$

Это позволяет перестроить найденные на рис. 10.29 границы устойчивости в новые координаты соответственно:

$$k, \frac{\sigma_f}{b_f} \text{ и } T_1, \frac{\sigma_f}{b_f}$$

(рис. 10.30, а и б). При этом надо иметь в виду, что величина I_3 , согласно (10.182), зависит от параметра T_1 , вследствие чего вычисле-

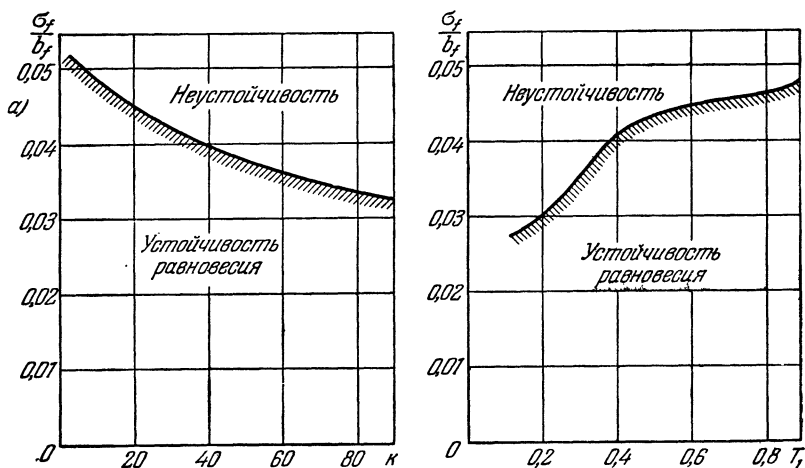


Рис. 10.30.

ние по формуле (10.187) при построении графика рис. 10.30, б, необходимо производить с учетом изменения I_3 при изменении T_1 .

Как видим, с увеличением параметра k опасный уровень помех снижается, а при увеличении параметра T_1 он растет. Это вполне естественно, поскольку T_1 является, согласно рис. 10.26, а, коэффициентом интенсивности введения производной, улучшающим стабилизацию системы.

Аналогично, далее, по линейному уравнению, вытекающему из (10.180) и (10.183),

$$[p^3(T_2 p + 1) + (k_2 k_{o.c} p^2 + k k_0 T_1 p + k k_0) k_n] \tilde{x} = 0,$$

по линейной теории автоматического регулирования можно исследовать также и все другие динамические качества данной нелинейной системы по полезному сигналу в присутствии помех, учитывая, однако, при этом все время, что величина коэффициента k_n зависит от уровня помех σ_f , от общей структуры и от некоторых параметров системы.

§ 10.7. Другие примеры исследования случайных процессов

Пример 1. Пусть динамика автоматической системы (рис. 10.31) описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка [317]:

$$(Tp + 1)x_1 = F(x), \quad x = y + f(t) - x_1, \quad (10.188)$$

где $F(x)$ — идеальная релейная характеристика

$$F(x) = c \operatorname{sign} x, \quad (10.189)$$

причем заданы $c = 0,1$, $T = 0,2$; $f(t)$ — стационарная случайная функция времени, имеющая спектральную плотность

$$s_f(\omega) = \frac{8\pi\sigma_f^2}{4\pi^2 + \omega^2}, \quad \sigma_f = 0,177, \quad (10.190)$$

с нулевым математическим ожиданием ($\tilde{f} = 0$). Требуется найти математическое ожидание x_1 и среднеквадратическое отклонение σ_{x_1}

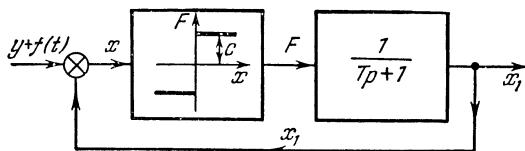


Рис. 10.31.

выходной величины x_1 (рис. 10.31) в установившемся режиме при $y = \text{const} = 0,2$. Это простейший пример решения первой задачи § 10.3.

Записав искомое решение уравнений (10.188) в форме

$$x_1 = \tilde{x}_1 + x_1^{cl}, \quad x = \tilde{x} + x^{cl} \quad (10.191)$$

и произведя, согласно (10.40), статистическую линеаризацию нелинейности, получим вместо (10.188) две системы уравнений:

$$(Tp + 1)\tilde{x}_1 = \tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad \tilde{x} = y - \tilde{x}_1, \quad (10.192)$$

$$(Tp + 1)x_1^{cl} = q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x)x^{cl}, \quad x^{cl} = f(t) - x_1^{cl}, \quad (10.193)$$

соответственно для регулярных (т. е. математических ожиданий) и случайных составляющих, причем

$$q^{cl}(\tilde{x}, \sigma_x) = \frac{c}{2\sigma_x} [\varphi^{(1)}(\tilde{x}, \sigma_x) + \varphi^{(2)}(\tilde{x}, \sigma_x)], \quad (10.194)$$

где $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ для данной нелинейности (10.189) определяются формулами (10.52). Это соответствует среднему арифметическому значению q^{cl} из двух его значений, соответствующих двум способам определения (10.46) и (10.48). На рис. 10.7, в эти функции изображены

графически. Там же (рис. 10.7, б) дан график выражения (10.49) функции $\tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x)$, фигурирующей в уравнении (10.192).

Из уравнения (10.192) для исследуемого установившегося режима ($\tilde{x}_1 = \text{const}$, $p\tilde{x}_1 = 0$) получаем:

$$\tilde{x} = y - \tilde{F}(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (10.195)$$

а из уравнения (10.193)

$$[Tp + 1 + q^{c.l}(\tilde{x}, \sigma_x)] x^{c.l} = (Tp + 1)f(t). \quad (10.196)$$

Из последнего по формуле (10.87) с учетом (10.190) приходим к уравнению для определения σ_x :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{Tj\omega + 1}{Tj\omega + 1 + q^{c.l}(\tilde{x}, \sigma_x)} \right|^2 \frac{8\pi\sigma_f^2}{4\pi^2 + \omega^2} d\omega,$$

или

$$\sigma_x^2 = h \cdot I_2(\tilde{x}, \sigma_x), \quad (10.197)$$

где

$$h = 8\pi\sigma_f^2, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega.$$

Замечая, что числитель под интегралом будет равен

$$G(\omega) = T^2\omega^2 + 1,$$

а в знаменателе стоит квадрат модуля функции

$$H(j\omega) = T(j\omega)^2 + [2\pi T + 1 + q^{c.l}(\tilde{x}, \sigma_x)]j\omega + 2\pi[1 + q^{c.l}(\tilde{x}, \sigma_x)],$$

согласно (10.21) и (10.22) получаем:

$$I_2 = \frac{2\pi T[1 + q^{c.l}(\tilde{x}, \sigma_x)] + 1}{2[2\pi T + 1 + q^{c.l}(\tilde{x}, \sigma_x)]}. \quad (10.198)$$

Решая систему уравнений (10.195) и (10.197) графически (рис. 10.13), с учетом формул (10.198) и (10.194) и графиков рис. 10.7, в находим:

$$\tilde{x} = 0,140; \quad \sigma_x = 0,160.$$

Для решения задачи требовалось найти \tilde{x}_1 и σ_{x1} . Из формул (10.192), (10.194) и графика рис. 10.7, в находим:

$$\tilde{x}_1 = y - \tilde{x} = 0,060, \quad q^{c.l} = 0,394;$$

а из уравнений (10.193)

$$(Tp + 1 + q^{c.l}) x_1^{c.l} = q^{c.l} f(t).$$

Поэтому, согласно (10.87), (10.190) и (10.21), (10.22), находим:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{q^{cl}}{Tj\omega + 1 + q^{cl}} \right|^2 \frac{8\pi\sigma_f^2}{4\pi^2 + \omega^2} d\omega = \\ &= \frac{(q^{cl}\sigma_f)^2}{(1 + q^{cl})(2\pi T + 1 + q^{cl})} = 1,51 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

откуда среднеквадратическое отклонение $\sigma_{x_1} = 0,0123$.

Пример 2. Определим автоколебания и условия их существования в следящей системе (рис. 10.32), динамика которой описывается уравнением третьего порядка:

$$(Tp + 1)^2 p x_1 = kF(x), \quad x = f(t) - x_1, \quad (10.199)$$

при высокочастотном случайном внешнем воздействии $f(t)$ с заданным среднеквадратическим значением σ_f [331]. Нелинейность $F(x) = \text{sign } x$

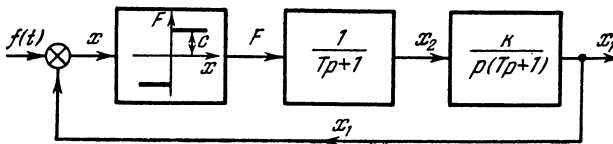


Рис. 10.32.

(рис. 10.32, где $c = 1$). Это соответствует решению одного из вопросов третьей задачи § 10.3.

Легко проверить (любым методом § 2.3), что при отсутствии внешнего воздействия ($f=0$) автоколебания имеют место в данной системе при любом значении коэффициента усиления k , причем частота их Ω_0 и амплитуда A_0 определяются выражениями:

$$\Omega_0 = \frac{1}{T}, \quad A_0 = \frac{2}{\pi} kT. \quad (10.200)$$

При наличии высокочастотных флуктуаций $f(t)$ автоколебания в системе определяются уравнением (10.103), которое в данном примере, согласно (10.199), принимает вид

$$[(Tp + 1)^2 p + kq^{ct}(A, \sigma_x)] \dot{x} = 0, \quad (10.201)$$

где, согласно (10.104):

$$q^{ct}(A, \sigma_x) = \frac{1}{A} B_0(z), \quad z = \frac{A}{\sigma_x \sqrt{2}}, \quad (10.202)$$

причем функция $B_0(z)$ изображается графиком рис. 10.16. В данном примере (рис. 10.32) имеем:

$$\sigma_x = \sigma_f, \quad (10.203)$$

так как линейная часть системы не пропускает высокочастотных флуктуаций. Этот же результат получится и из формулы (10.97), где

$$\left| \frac{S(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2 = 1,$$

ибо из уравнений (10.199) после исключения x_1 следует:

$$S(p) = Q(p) = (Tp + 1)^2 p.$$

Найдем автоколебания в системе при наличии высокочастотных внешних флуктуаций. Характеристическое уравнение для (10.201) с учетом (10.203) будет

$$T^2 p^3 + 2Tp^2 + p + kq^{\text{CT}}(A, \sigma_f) = 0.$$

Подставив в него $p = j\Omega$ и выделив вещественную и мнимую части получим:

$$\begin{aligned} kq^{\text{CT}}(A, \sigma_f) - 2T\Omega^2 &= 0, \\ \Omega - T^2\Omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения находим частоту автоколебаний

$$\Omega = \frac{1}{T}$$

(она совпадает с таковой при отсутствии флуктуаций), а из первого

$$q^{\text{CT}}(A, \sigma_f) = \frac{2}{kT}, \quad (10.204)$$

где, согласно (10.202) и (10.203), имеем:

$$q^{\text{CT}}(A, \sigma_f) = q^{\text{CT}}(z) = \frac{B_0(z)}{z\sigma_f\sqrt{2}}, \quad z = \frac{A}{\sigma_f\sqrt{2}}. \quad (10.205)$$

Согласно формуле для $B_n(z)$, приведенной в § 10.3, для $B_0(z)$ имеем выражение

$$B_0(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{z}{2}\right) + 72 \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \dots \right],$$

откуда вытекает, что

$$B_0(z) \rightarrow \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

и, значит, согласно (10.204):

$$q^{\text{CT}} = \frac{1}{\sigma_f} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{при } z = 0 \quad (A = 0).$$

График $\sigma_f q^{\text{CT}} \left(\frac{A}{\sigma_f} \right)$, определяемый формулой (10.205), дан на рис. 10.33, из которого видно, что

$$\frac{1}{\sigma_f} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \geq q^{\text{CT}} \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq A \leq \infty. \quad (10.206)$$

Отсюда, согласно (10.204), получаем условие существования автоколебаний в системе при действии на нее высокочастотных внешних флуктуаций:

$$\frac{1}{\sigma_f} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \geq \frac{2}{kT} \geq 0,$$

т. е. при заданных флуктуациях автоколебания в системе будут иметь место при коэффициенте усиления

$$k \geq \frac{\sigma_f \sqrt{2\pi}}{T}, \quad (10.207)$$

в то время как при отсутствии флуктуаций автоколебания имели место при любом значении k . Если же параметры системы k и T

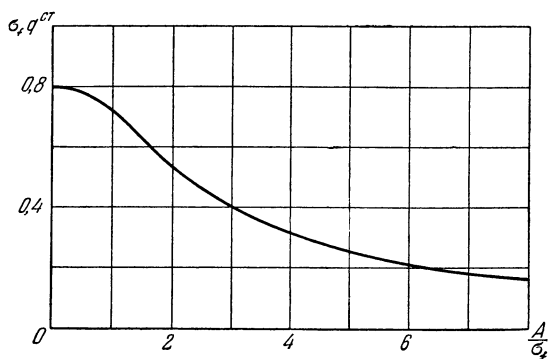


Рис. 10.33.

заданы, то условие существования автоколебаний (10.207) можно записать в виде

$$\sigma_f \leq \frac{kT}{\sqrt{2\pi}}, \quad (10.208)$$

т. е. автоколебания в системе будут иметь место (с наложенными на них флуктуациями) только при уровне внешнего случайного воздействия, не превышающем определенного порогового значения

$$\sigma_f^{\text{пор}} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi}}, \quad (10.209)$$

после чего ($\sigma_f > \sigma_f^{\text{пор}}$) автоколебания срываются. Это аналогично условию захватывания системы вынужденными колебаниями, рассматривавшемуся в главе IX.

Уравнение (10.204) позволяет легко с помощью графика рис. 10.33 находить амплитуду автоколебаний A для любых заданных значений k , T , σ_f в области существования автоколебаний.

На рис. 10.34 показаны осциллограммы, полученные на электронной моделирующей установке для системы (10.199) при $k=50 \text{ сек}^{-1}$, $T=0,1 \text{ сек}$, $\sigma_f^{\text{пор}}=2,0$ по формуле (10.209). В эксперименте было: а) $\sigma_f=0$; б) $\sigma_f=1,0$; в) $\sigma_f=2,2$. Из соответствующих осциллограмм

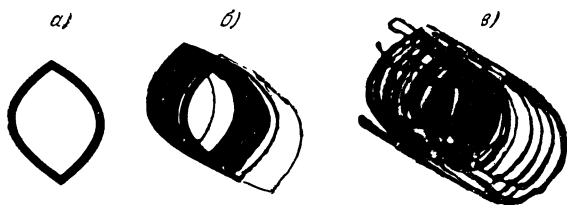
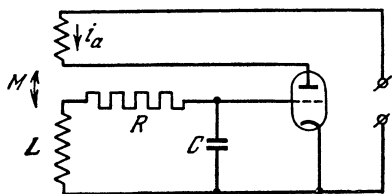


Рис. 10.34.

(рис. 10.34) хорошо видны деформация предельного цикла, определяющего автоколебания, и срыв автоколебаний при $\sigma_f > \sigma_f^{\text{пор}}$, чем подтверждаются результаты расчета.

Пример 3. Рассмотрим ламповый генератор [331] (рис. 10.35). Пусть внешнее случайное воздействие приложено к сеточному контуру генератора. При пренебрежении сеточным током колебания генератора описываются уравнением



$$(LCp^2 + RCp + 1)u - Mpi_a = f(t), \quad (10.210)$$

где u — напряжение на сетке, i_a — анодный ток. Нелинейная характеристика лампы:

Рис. 10.35.

$$i_a = b_1 u - \frac{1}{3} b_3 u^3. \quad (10.211)$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$(p^2 - \kappa p + \nu^2)u + \frac{1}{3} \gamma^2 p F(u) = \nu^2 f(t), \quad (10.212)$$

где

$$F(u) = u^3, \quad \nu^2 = \frac{1}{LC}, \quad \kappa = \frac{1}{LC} (Mb_1 - RL), \quad \gamma^2 = \frac{Mb_3}{LC}.$$

Напомним, что при синусоидальном внешнем воздействии $f = B \sin \Omega_b t$ условие захватывания (срыв автоколебаний) можно выразить в виде (см. [321], стр. 298)

$$B > \frac{\sqrt{2\kappa} |\nu^2 - \Omega_b^2|}{\gamma \nu^2}. \quad (10.213)$$

Теперь рассмотрим поведение генератора при случайном внешнем воздействии $f(t)$ в трех случаях: 1) высокочастотные внешние

флуктуации; 2) низкочастотное случайное внешнее воздействие; 3) промежуточный случай, что относится соответственно к задачам третьей, пятой и шестой §§ 10.3 и 10.4.

1. При высокочастотных внешних флуктуациях $f(t)$ для определения автоколебаний, согласно (10.103) и (10.212), имеем характеристическое уравнение

$$p^2 + \left[\frac{1}{3} \gamma^2 q^{\text{ст}}(A, \sigma_u) - \kappa \right] p + \nu^2 = 0, \quad (10.214)$$

откуда частота автоколебаний $\Omega \approx \nu$, а амплитуда определяется из условия

$$q^{\text{ст}}(A, \sigma_u) = \frac{3\kappa}{\gamma^2} \quad (10.215)$$

(условие наличия пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении). Но для данной нелинейности $F(u) = u^3$, согласно (10.112), имеем:

$$q^{\text{ст}} = \frac{3}{4} A^2 + 3\sigma_u^2, \quad (10.216)$$

причем среднеквадратическое значение флуктуаций напряжения σ_u определяется по формуле (10.97), которая с учетом (10.212) дает

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\nu^2}{-\omega^2 - \kappa j\omega + \nu^2} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (10.217)$$

т. е. σ_u не зависит от A . Поэтому из (10.215) и (10.216) находим амплитуду автоколебаний

$$A = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma^2} - \sigma_u^2}. \quad (10.218)$$

Отсюда условие срыва автоколебаний внешним случайным воздействием будет

$$\sigma_u > \frac{\sqrt{\kappa}}{\gamma}. \quad (10.219)$$

Чтобы сопоставить это условие для случайных флуктуаций с условием захватывания при синусоидальном воздействии (10.213), попытаемся из (10.219) вывести условие (10.213) как частный случай, воспользовавшись тем, что для синусоидального воздействия

$f = B \sin \Omega_B t$ можно изобразить спектральную плотность $s_f(\omega)$ в виде двух мгновенных импульсов при $\omega = \pm \Omega_B$ (рис. 10.36), площадью $\frac{\pi}{2} B^2$ каждый, что с помощью дельта-функции записывается в виде

$$s_f(\omega) = \frac{\pi}{2} B^2 [\delta(\omega - \Omega_B) + \delta(\omega + \Omega_B)]. \quad (10.220)$$

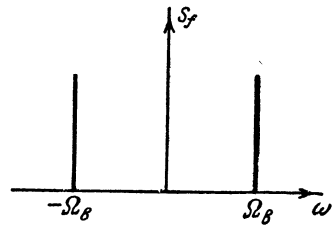


Рис. 10.36.

Учитывая, что при любой функции $x(t)$ будет

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0),$$

по формуле (10.217) находим:

$$\sigma_u^2 = \frac{B^2}{2} \frac{\nu^4}{(\nu^2 - \Omega_B^2)^2 + \kappa^2 \Omega_B^2} \approx \frac{B^2 \nu^4}{2\Omega_B^4},$$

так как при высокочастотных внешних вибрациях $\Omega_B \gg \nu$.

Подставив это в условие срыва автоколебаний (10.219), получим:

$$B > \frac{\sqrt{2\kappa} \Omega_B^2}{\gamma \nu^2},$$

что действительно совпадает с (10.213) при $\Omega_B \gg \nu$.

2. При низкочастотном (медленно меняющемся) случайном внешнем воздействии, согласно (10.126), получается прежнее уравнение (10.214) для определения автоколебаний, а значит, и прежнее соотношения (10.215) и (10.216). Однако среднеквадратическое значение случайной составляющей напряжения σ_u определяется здесь иначе, а именно, согласно (10.138) и (10.212), получаем:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\nu^2}{-\omega^2 + \left[\frac{1}{3} \gamma^2 q^{cp}(A, \sigma_u) - \kappa \right] j\omega + \nu^2} \right|^2 s_f(\omega) d\omega, \quad (10.221)$$

где по формуле (10.135) для заданной нелинейности $F(u) = u^3$ имеем:

$$q^{cp} = \frac{3}{2} A^2 + 3\sigma_u^2. \quad (10.222)$$

При заданной спектральной плотности $s_f(\omega)$ отсюда определяется функция $\sigma_u(A)$ графически, как было описано после формулы (10.139). Затем найденная функция $\sigma_u(A)$ подставляется в формулу (10.216), т. е.

$$q^{ct}(A) = \frac{3}{4} A^2 + 3\sigma_u^2(A),$$

после чего уравнение для определения амплитуды автоколебаний (10.215) принимает вид

$$\frac{1}{4} A^2 + \sigma_u^2(A) = \frac{\kappa}{\gamma^2}. \quad (10.223)$$

Отсюда же найдется и условие существования автоколебаний при низкочастотном (медленно меняющемся) внешнем случайном воздействии $f(t)$ как условие, при котором уравнение (10.223) дает вещественный положительный ответ для неизвестной A .

Попытаемся и в этом случае вывести как частный случай условия захватывания (10.213) для синусоидального воздействия $f = B \sin \Omega_B t$,

используя выражение его спектральной плотности (10.220). При этом из формул (10.221) и (10.222) находим при $\Omega_B \ll \nu$:

$$\sigma_u^2 = \frac{B^2 \nu^4}{2(\nu^2 - \Omega_B^2)^2 + [\gamma^2(A^2 + 2\sigma_u^2) - 2\kappa]^2 \Omega_B^2} \approx \frac{B^2}{2}.$$

Подставив это в (10.223), получим условие срыва автоколебаний

$$B > \frac{\sqrt{2\kappa}}{\gamma},$$

что совпадает с (10.213) при $\Omega_B \ll \nu$.

3. Допустим теперь, что внешнее случайное воздействие таково, что нельзя рассчитывать ни на то, что его спектр много выше, ни на то, что он много ниже частоты автоколебаний. Тогда для определения автоколебаний при наличии внешнего случайного воздействия воспользуемся характеристическим уравнением (10.149), которое, согласно (10.212), здесь принимает вид

$$p^2 + \left[\frac{1}{3} \gamma^2 q^{\text{ЭК}}(A, \sigma_u) - \kappa \right] p + \nu^2 = 0, \quad (10.224)$$

где, согласно (10.147), (10.216) и (10.222):

$$q^{\text{ЭК}}(A, \sigma_u) = \frac{\frac{3}{4} A^2 + 3\sigma_u^2 + \frac{2\sigma_u^2}{A} \left(\frac{3}{2} A^2 + 3\sigma_u^2 \right)}{1 + \frac{2\sigma_u^2}{A^2}}. \quad (10.225)$$

Из условия наличия пары чисто мнимых корней в уравнении (10.224) получаем уравнение для определения амплитуды автоколебаний в виде

$$q^{\text{ЭК}}(A, \sigma_u) = \frac{3\kappa}{\gamma^2} \quad (10.226)$$

или

$$\frac{A^4 + 8\sigma_u^2 A^2 + 8\sigma_u^4}{4(A^2 + 2\sigma_u^2)} = \frac{\kappa}{\gamma^2}. \quad (10.227)$$

При этом среднеквадратическое значение случайной составляющей напряжения σ_u определяется, согласно формулам (10.148) и (10.212), в виде

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\nu^2}{(j\omega)^2 + \left[\frac{1}{3} \gamma^2 q^{\text{ЭК}}(A, \sigma_u) - \kappa \right] j\omega + \nu^2} \right|^2 s_f(\omega) d\omega.$$

Используя условие (10.226), имеем:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\nu^2}{(j\omega)^2 + \nu^2} \right|^2 s_f(\omega) d\omega. \quad (10.228)$$

Поскольку определяемое отсюда при заданной спектральной плотности внешнего воздействия $s_f(\omega)$ среднеквадратическое значение σ_u не зависит от A , то из (10.227) находим амплитуду автоколебаний в виде

$$A^2 = \frac{2x}{\gamma^2} - 4\sigma_u^2 \pm \sqrt{4\frac{x^2}{\gamma^2} - 8\sigma_u^2\left(\frac{x}{\gamma^2} - \sigma_u^2\right)}. \quad (10.229)$$

Отсюда условие срыва автоколебаний при наличии внешнего случайного воздействия будет

$$\sigma_u > \frac{\sqrt{x}}{\gamma}. \quad (10.230)$$

Если применить это в частном случае для синусоидального внешнего воздействия $f = B \sin \Omega_B t$, то из (10.228) и (10.220) найдем:

$$\sigma_u^2 = \frac{B^2 \gamma^4}{2(\gamma^2 - \Omega_B^2)^2}.$$

Подставив это в условие срыва автоколебаний (10.230), получим точно то же самое условие (10.213), которое известно из теории нелинейных вынужденных колебаний.

Изложенные примеры иллюстрируют некоторые применения методов, описанных в данной главе.

В качестве заключения по всей книге в целом следует отметить, что изложенный в ней метод гармонической линеаризации (в последней главе в сочетании со статистической линеаризацией) позволяет решать многие задачи анализа и синтеза нелинейных автоматических систем. Несомненно, что в дальнейшем будут найдены еще новые возможности метода, в связи с чем весьма актуальным является его дальнейшее развитие как в теоретическом отношении, так и в приложениях к различным инженерным расчетам нелинейных автоматических и других динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВАМ I — IV

1. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Исследование динамической устойчивости синхронных машин, Киев, 1932.
2. В. С. Кулебакин, К теории автоматических вибрационных регуляторов, Вестник теоретической и экспериментальной электротехники, № 4, 1932.
3. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Новые методы нелинейной механики, ОНТИ, 1934.
4. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Символические методы нелинейной механики, Изд. АН УССР, 1934.
5. Б. Ван-дер-Поля, Нелинейная теория электрических колебаний, Связьтехиздат, 1935.
6. Ю. Б. Кобзарев, О квазилинейном методе трактовки явлений в генераторах, Журнал технической физики, № 2, 1935.
7. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР, 1937.
8. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1937.
9. К. С. Бобов, Теория работы вибрационных регуляторов напряжения, Автоматика и телемеханика, № 6, 1940.
10. В. А. Котельников, Продольная устойчивость самолета с автопилотом, Труды ЛИИ, № 2, 1941.
11. Л. С. Гольдфарб, О нелинейности регулируемых систем, Бюллетень ВЭИ, № 3, 1941.
12. Б. В. Булгаков, О применении методов Пуанкаре и Ван-дер-Поля к псевдолинейным колебательным системам, Прикладная математика и механика, № 4 и 6, 1942.
13. Б. В. Булгаков, Автоколебания регулируемых систем, Доклады АН СССР, т. 37, № 9, 1942.
14. Н. В. Бутенин, Автоколебания стэнда с автопилотом, Труды ЛКВВИА, вып. 3, 1943.
15. Б. В. Булгаков, Автоколебания регулируемых систем, Прикладная математика и механика, № 2, 1943.
16. В. А. Боднер, О выборе скорости перестановки лопастей автоматических ВИШ, Труды ВВИА, вып. 124, 1944.
17. Б. В. Булгаков, Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками, Прикладная математика и механика, № 3, 1946.
18. А. М. Летов, К задаче об автопилоте, Вестник Моск. университета, № 1, 1946.
19. Л. С. Гольдфарб, О некоторых нелинейностях в системах регулирования, Автоматика и телемеханика, № 5, 1947.
20. А. И. Лурье, Влияние силы трения в измерительном органе регулятора, Инженерный сборник, т. IV, вып. 1, 1947.
21. А. И. Лурье, Об автоколебаниях в некоторых регулируемых системах, Автоматика и телемеханика, № 5, 1947.

22. Я. Н. Ройтенберг, Автоколебания гироскопических стабилизаторов, Прикладная математика и механика, № 2, 1947.
23. Я. Н. Ройтенберг, Автоколебания силовых гироскопических стабилизаторов, Приборостроение, № 3 и 4, 1948.
24. В. А. Боднер, Анализ основных схем регулирования автоматических ВИШ, Труды ВВИА, вып. 221, 1948.
25. Л. С. Гольдфарб, О теории вибрационных регуляторов, Автоматика и телемеханика, № 6, 1948.
26. А. М. Летов, К теории изотропного регулятора, Прикладная математика и механика, № 4, 1948.
27. А. А. Фельдбаум, Введение в теорию нелинейных цепей, Госэнергоиздат, 1948.
28. Н. Н. Боголюбов, Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сборник трудов Института строит. мех. АН УССР, № 10, 1949.
29. Б. В. Булгаков и М. З. Литвин-Седой, Об одной задаче автоматического регулирования с нелинейной характеристикой, Автоматика и телемеханика, № 5, 1949.
30. Г. С. Поспелов, Побудительная стабилизация релейно-контактных систем автоматического регулирования, Труды ВВИА, вып. 335, 1949.
31. В. М. Старжинский, Об автоколебаниях следящего электропривода, Прикладная математика и механика, № 1, 1949.
32. Н. Н. Боголюбов, Теория возмущений в нелинейной механике, Сборник трудов Института строит. мех. АН УССР, № 14, 1950.
33. В. А. Боднер, Автоколебания в системе, содержащей компрессор, Инженерный сборник, т. VI, 1950.
34. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
35. И. Я. Лехтман, К расчету релейных следящих систем, Автоматика и телемеханика, № 1, 1951.
36. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, изд. 3, Гостехиздат, 1952.
37. Д. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, Изд. иностр. лит., 1953.
38. А. А. Харкевич, Автоколебания, Гостехиздат, 1953.
39. Н. М. Чумаков, Выбор параметров ограничителя скорости, Автоматика и телемеханика, № 1, 1953.
40. Б. Н. Наумов, Влияние воздействий по производным на частоту и амплитуду автоколебаний, Сборник по автоматике и телемеханике, Изд. АН СССР, 1953.
41. Е. К. Круг, Исполнительный механизм переменного тока, Сборник работ по автоматике и телемеханике, Изд. АН СССР, 1953.
42. М. А. Айзерман, Физические основы применения методов малого параметра, Автоматика и телемеханика, № 5, 1953.
43. Е. П. Попов, Учет влияния нелинейностей при расчете следящих систем, Автоматика и телемеханика, № 6, 1953.
44. Я. Г. Пановко, Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах, Инженерный сборник, т. 13, 1952.
45. Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, 1954.
46. Е. П. Попов, К приближенному исследованию автоколебаний и вынужденных колебаний, Доклады АН СССР, т. 95, № 5, 1954.
47. Е. П. Попов, Приближенное исследование автоколебаний и вынужденных колебаний нелинейных систем, Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1954.
48. Е. П. Попов, Теория автоматического регулирования, Изд. ЛКВИА, ч. 2, 1954.
49. Е. П. Попов, Динамика систем автоматического регулирования, главы 14 и 16, Гостехиздат, 1954.

50. Г. С. Поспелов, Основы автоматики, Изд. ВВИА, 1954.
51. М. З. Литвин-Седой, Об устойчивости периодических движений одной системы автоматического регулирования, Ученые записки Моск. университета, вып. 172, 1954.
52. Е. Н. Мирославлев, Нелинейные системы с корректирующими устройствами, Вестник Моск. университета, № 9, 1954 и № 1, 1958.
53. Ю. А. Голп, Линеаризация позиционной силы методом кусочно-линейной аппроксимации, Инженерный сборник, т. 18, 1954.
54. И. М. Смирнова, К приближенному исследованию условий устойчивости периодических режимов, Автоматика и телемеханика, № 2, 1954.
55. А. Г. Иосифьян и Б. М. Каган, Основы следящего привода, Госэнергоиздат, 1954.
56. Основы автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова, главы 24 (В. В. Петров), 32 (А. М. Летов), 33 (Л. С. Гольдфарб), 34 (М. А. Айзерман), 35 (Г. С. Поспелов), 37 (Я. З. Цыпкин), Машгиз, 1954.
57. Я. З. Цыпкин, Исследование влияния параметров нелинейных систем регулирования на устойчивость и автоколебания, Труды Всес. заочн. энергетического института, вып. 3, 1954.
58. Э. С. Шеррар, Стабилизация сервомеханизма, допускающего колебания большой амплитуды, Прикладная механика и машиностроение (сборник переводов), № 2, 1954.
59. Д. Тоу и Р. Шультайц, Статическое трение и трение скольжения в системах автоматического регулирования, Прикладная механика и машиностроение (сборник переводов), № 4, 1954.
60. Сборник «Автоматическое регулирование», статьи В. Оппельта, Е. Черри и У. Миллар, Д. Ливерсидж, Ж. Леб, Изд. иностр. лит., 1954.
61. Л. И. Манделъштам, Полное собрание трудов, т. IV, 1955.
62. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, изд. 2, Гостехиздат, 1955.
63. А. М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, 1955.
64. Е. П. Попов, О малом параметре в методе гармонической линеаризации, Известия АН СССР, ОТН, № 2, 1955.
65. Л. Ф. Клопов, Исследование релейной следящей системы с колебательным звеном, Труды ВВИА, вып. 581, 1955.
66. Д. Т. Макруер и Р. Г. Халлидей, Метод анализа и синтеза замкнутых систем, содержащих малую нелинейность, Машиностроение (сборник переводов), № 3, 1955.
67. Л. А. Залманзон, Об учете влияния нелинейности характеристик глухих камер пневморегуляторов, Автоматика и телемеханика, № 6, 1955.
68. Е. К. Круг и О. М. Минина, Об особенностях исследования динамических свойств нелинейных систем с неустойчивым звеном, Автоматика и телемеханика, № 6, 1955.
69. Труды 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования, т. 1, доклады М. А. Айзермана, И. Г. Малкина, Л. С. Гольдфарба, Э. М. Наджафова, Е. П. Попова, И. М. Смирновой, Л. А. Залманзона, Н. Н. Мясникова, Г. К. Круг, Г. С. Поспелова, Изд. АН СССР, 1955.
70. А. А. Андронов, Сборник трудов, Изд. АН СССР, 1956.
71. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
72. А. Г. Ивахненко, О применении условий инвариантности в слабо нелинейных системах автоматического регулирования, Доклады АН УССР, № 1, 1956.
73. Г. И. Монастыршин, О нелинейных уравнениях динамических систем, сборник «Вопросы теории автоматического регулирования», Оборонгиз, 1956; Автоматика, Изд. АН УССР, № 1, 1959.
74. Н. М. Чумаков, О нахождении областей устойчивости для некоторых типов нелинейных систем, Автоматика, Изд. АН УССР, № 1, 1956.

75. А. Ю. Ишлинский, Приближенный метод исследования колебательных систем, Прикладная механика, Изд. АН УССР, № 2, 1956.
76. А. Ю. Ишлинский, О прецессионных колебаниях нагруженного одноосного гироскопического стабилизатора, Автоматика, Изд. АН УССР, № 4, 1956.
77. Е. П. Попов, О применении метода гармонической линеаризации в теории регулирования, Доклады АН СССР, т. 106, № 2, 1956.
78. Л. И. Ганджа и В. Л. Севастьянов, Об автоколебаниях в электромеханической системе с электромашинным усилителем, Известия Томского политехн. ин-та, т. 82, 1956.
79. А. Я. Лернер, Автоколебания в системах с нелинейной скоростной связью, Сборник статей по автоматике и электротехнике, Изд. АН СССР, 1956.
80. А. А. Абдуллаев и Э. М. Наджафов, Методика расчета автоколебаний в пневматических регуляторах, Автоматика и телемеханика, № 3, 1956.
81. Я. З. Цыпкин, О связи между эквивалентным коэффициентом усиления нелинейного элемента и его характеристикой, Автоматика и телемеханика, № 4, 1956.
82. К. П. Суровихин, О влиянии коэффициента обратной связи на частоту и амплитуду автоколебаний, Автоматика и телемеханика, № 5, 1955.
83. Н. А. Королев, О периодических режимах в релейных системах с внутренней обратной связью, Автоматика и телемеханика, № 11, 1956.
84. В. А. Боднер, Автоматика авиационных двигателей, изд. 2, Оборонгиз, 1956.
85. А. А. Фельдбаум, Электрические системы автоматического регулирования, изд. 2, 1957.
86. А. Г. Ивахненко, Электроавтоматика, Киев, 1957.
87. Е. П. Попов, Автоматическое регулирование, изд. 3, Физматгиз, 1959.
88. Е. П. Попов, Лекции по теории автоматического регулирования, Изд. ЛКВВИА, 1957.
89. Итоги науки, Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления, Изд. АН СССР, 1957.
90. В. А. Климов, Исследование систем регулирования ТВД с учетом нелинейности сервомотора ВИШ, Труды ЛКВВИА, вып. 198, 1957.
91. Л. Л. Вознюк, Исследование устойчивости периодических решений уравнений высокого порядка, Укр. матем. журнал, № 3, 1957.
92. Н. П. Ермслин и В. А. Лифанов, Определение частоты и амплитуды автоколебаний в системе электродвигатель — регулятор, Известия Ленингр. электротехн. ин-та, вып. 31, 1957.
93. В. О. Кононенко, О колебаниях в нелинейных системах со многими степенями свободы, Доклады АН СССР, т. 105, № 2 и 4, 1955.
94. В. И. Туркин и Е. И. Хлыпало, Об учете нелинейности характеристик двигателей в следящих системах, Труды НИИ, Судпромгиз, вып. 2 (25) и 3 (26), 1957.
95. Е. Левинсон, Явление насыщения в следящих системах с тахометрической обратной связью, Сборник «Частотные методы в автоматике», Изд. иностр. лит., 1957.
96. Г. Честнат, Приближенный частотный метод представления насыщения и зоны нечувствительности, сборник «Частотные методы в автоматике», Изд. иностр. лит., 1957.
97. В. П. Казаков, Исследование динамики релейно-импульсных систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, № 1, 1957.
98. Ю. В. Долголенко, Приближенное определение частично-скользящих периодических режимов, Автоматика и телемеханика, № 1, 1957.

99. В. А. Котельников, Улучшение стабилизации систем авторегулирования при помощи запоминающего устройства, Автоматика и телемеханика, № 4, 1957.
100. Н. А. Королев, Импульсная стабилизация релейных систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, № 5, 1957.
101. И. В. Глатенок, К вопросу обоснования метода гармонического баланса, Вестник Моск. университета, № 1, 1958.
102. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 2, Физматгиз, 1958.
103. А. С. Шаталов, Инженерные методы исследования регулируемых систем, т. II, Изд. Арг. инж. акад., 1958.
104. Н. М. Чумаков и П. И. Чинаев, Основы автоматики, ч. II, Киев, 1958.
105. Л. А. Бессонов, Автоколебания в электрических цепях со сталью, Госэнергоиздат, 1958.
106. М. А. Айзерман, Лекции по теории автоматического регулирования, изд. 2, Физматгиз, 1958.
107. В. А. Бесекерский, В. П. Орлов, Л. В. Полонская, С. М. Федоров, Проектирование следящих систем малой мощности, Судпромгиз, 1958.
108. И. П. Пальтов, Сборник упражнений по теории автоматического регулирования, Изд. ЛКВВИА, 1958.
109. Е. П. Попов, Расчет нелинейных автоматических систем на основе гармонической линеаризации, Судпромгиз, 1959.
110. М. Е. Сулуквадзе, Влияние типичных нелинейностей на настройку автопилота, Автоматика и телемеханика, № 5, 1959.
111. Л. П. Кузьмин, Графоаналитический способ определения характеристик релейной системы, Автоматика и телемеханика, № 4, 1958.
112. В. А. Тафт, Об устойчивости периодических режимов в системах автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, № 6, 1958.
113. В. М. Романов, Прибор для определения амплитуды и фазы первой гармоники несинусоидальных колебаний, Известия высших учебных заведений, Приборостроение, № 3, 1958.
114. В. Хейссерман, Области устойчивости системы регулирования управляемого снаряда, Сб. «Вопросы ракетной техники», № 1, 1958.
115. Л. Этран, Анализ нелинейных систем регулирования для стабилизации снаряда, Вопросы ракетной техники (сборник переводов), № 6, 1958.
116. К. Мерфи, Исследование движения симметричных снарядов под действием нелинейных моментов, Вопросы ракетной техники (сборник переводов), № 2, 1958.
117. И. И. Кринецкий, Упрощенный расчет устойчивости регулирования нелинейных систем, Автоматика, Изд. АН УССР, № 1, 1958.
118. Б. Ю. Мандровский-Соколов, Улучшение работы следящей системы с помощью нелинейного корректирующего звена, Автоматика, Изд. АН УССР, № 3, 1958.
119. В. А. Бесекерский и В. Б. Диомидов, Передаточная функция релейного исполнительного механизма с двухфазным двигателем, Научно-техн. информ. по приборостроению, Судпромгиз, № 4, 1958.
120. В. И. Сергеев, Об одном способе расчета амплитуд автоколебаний, Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1958.
121. И. П. Пальтов, Анализ следящей системы топливомера с учетом нелинейностей, Приборостроение, № 12, 1958.
122. В. Н. Калинин и Б. М. Макарьев, О применении логарифмических частотных характеристик к анализу автоколебаний и устойчивости нелинейных систем, Сборник трудов слушателей ЛКВВИА, вып. 18, 1958. См. также Труды ЛКВВИА, вып. 312, 1959.
123. Н. К. Куликов, Нахождение периодических решений нелинейных уравнений, Известия высших учебных заведений, Математика, № 4, 1958.

124. О. Дж. М. Смит, Системы автоматического регулирования, Физматгиз, 1960 (в печати).
125. Дж. Тракселл, Синтез систем автоматического регулирования, Машгиз, 1959.
126. Д. П. Петелин, Приближенное определение автоколебаний в системе регулирования синхронного двигателя, Автоматика и телемеханика, № 1, 1959.
127. В. А. Бесекерский, О передаточной функции релейного исполнительного механизма, Известия АН СССР, ОТН, серия энергетики и автоматики, № 1, 1959.
128. Е. П. Попов, О выделении областей устойчивости нелинейных автоматических систем, Известия АН СССР, ОТН, серия энергетики и автоматики, № 1, 1959.
129. И. П. Пальтов, Сборник упражнений по теории автоматического регулирования, Изд. ЛКВВИА, 1958.
130. Г. С. Поспелов, Подавление автоколебаний дополнительными нелинейными элементами, Труды МАИ, вып. 112, 1959.
131. Н. К. Куликов, К исследованию свободных колебаний нелинейных систем, Известия АН СССР, ОТН, серия механики, № 2, 1959.
132. И. А. Бородина, Генерирование автоколебаний в системах регулирования тока, Известия АН СССР, ОТН, серия энергетики и автоматики, № 3, 1959; Труды НИИ, Судпромгиз, вып. 4 (35), 1959.
133. Н. В. Бутенин, Элементы нелинейной теории колебаний, Изд. ЛКВВИА, 1959.
134. N. Minorsky, Introduction to nonlinear mechanics, Ann. Arbour, 1947.
135. W. Oppelt, Locus curve method for regulators with Friction, J. Inst. Elec. Engrs, 94, part II A, 1947.
136. A. Tustin, A method of analysing effect of certain kinds of nonlinearity, J. Inst. Elct. Engrs, 94, part II A, 1947.
137. R. J. Kochenburger, A frequency response method for analyzing and synthesizing contactor servomechanisms, Trans. Amer. Inst. El. Engrs, 69, part I, 1950.
138. E. C. Johnson, Sinusoidal analysis of feedback-control systems containing nonlinear elements, Trans. AIEE, 71, part II, 1952.
139. N. B. Nichols, Backlash in a velocity lag servomechanism, Trans. AIEE, 72, part II, 1953.
140. R. J. Kochenburger, Limiting in feedback control systems, Trans. Amer. Inst. El. Engrs, 72, part II, 1953.
141. J. W. Schwarz, Piecewise linear servomechanisms, Trans. AIEE, 71, part II, 1953.
142. R. L. Cosgriff, Open — loop frequency response method for nonlinear servomechanisms, Trans. Amer. Inst. El. Engrs, 72, part II, 1953.
143. H. Lauer, Operating modes of a servomechanism with nonlinear friction, Journ. Frankl. Inst., № 6, 1953.
144. N. D. Greif, Describing function method of servomechanism analysis, Trans. Amer. Inst. El. Engrs, 72, part II, 1953.
145. J. M. Loeb, Recent advances in nonlinear servo theory, Trans. ASME, № 8, 1954.
146. J. M. Loeb, Das nichtlineare Verhalten von gefilterten Servomechanismen, Microtechnic, № 3 и 4, 1954.
147. C. H. Thomas, Stability characteristics of closed-loop systems with dead band, Trans. ASME, 76, 1954.
148. K. Magnus, Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme, VDI-Forschungsheft, № 451, 1955.
149. Z. Kotek, Nelineární Regulace, Souhrn Prací o Automatizaci, Praha, 1955.
150. K. Magnus, Eigenschwingungen hydraulischer Stellmotore, Regelungs-technik, № 11 и 12, 1955.

151. H. Chestnut, R. W. Mauer, Servomechanisms and regulating system design, New York — London, 1955.
152. W. Oppelt, Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, Aufl. 2, 1956.
153. K. Magnus, Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten, Ingenieur. Archiv, 5 Heft, 1956.
154. K. Magnus, Näherungskriterien für Stabilität und Gefährlichkeit in nichtlinearen Regelkreisen, Fachtagung Regelungstechnik, Heidelberg, 1956, Beitrag № 71.
155. K. Klotter, Über den Gebrauch von ersetzenden Übergangsfunktionen, Fachtagung Regelungstechnik, Heidelberg, 1956, Beitrag № 72.
156. R. J. Kochenburger, Nonlinearity in control systems, Control. Engng, № 3, 1956.
157. H. W. Hahneman, Berechnung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungssysteme, Z. Vereines deutsch. Ingr., 1956.
158. Nichtlineare Regelungsvorgänge, статьи K. Magnus, J. M. L. Janssen, J. C. Vermeulen, E. Pestel, Verlag R. Oldenburg, 1956.
159. K. N. Satyendra, Describing functions representing the effect of inertia, backlash etc., Applic. and Ind., № 26, 1956.
160. R. Boxer, S. Thaler, A simplified method of solving linear and nonlinear systems, Proc. IRE, № 1, 1956.
161. T. M. Stout, Block diagram transformations for systems with one nonlinear element, Applic. and Ind., № 25, 1956.
162. H. Becker, Über Nichtlinearitäten, Regelungstechnik, № 7, 1957.
163. B. P. Veitman, Der derzeitige Stand der Analyse und Synthese von Nichtlinearitäten, Regelungstechnik, № 3, 1957.
164. K. Magnus, Über den Zusammenhang verschiedener Näherungsverfahren, Z. angew. Math. und Mech., № 11—12, 1957.
165. E. Levinson, Gain-phase relations of nonlinear circuits, IRE Nat. Convention Record, part 4, 1958.
166. R. Herschel, Über die Stabilität von Regelsystemen mit quadratischen Abhängigkeiten, Regelungstechnik, № 7, 1959.
167. P. J. Bhatt, Describing functions for nonlinear servosystems, Control, № 7, 1959.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВАМ V И VI

168. Е. П. Попов, Автоколебания нелинейных систем при медленно меняющемся внешнем воздействии, Доклады АН СССР, т. 98, № 4, 1954.
169. Е. П. Попов, Динамика систем автоматического регулирования, § 67, Гостехиздат, 1954.
170. Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Киев, 1955.
171. Г. С. Поспелов, глава 35 в книге «Основы автоматического регулирования. Теория» под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.
172. Г. С. Поспелов, Вибрационная линеаризация релейных систем, Труды 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 1, 1955.
173. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
174. И. П. Пальтов, Устройство для интегрирования медленно меняющейся функции времени, Автоматика и телемеханика, № 4, 1956.
175. Б. А. Рябов, Режим автоколебаний в системах с несимметричной характеристикой, Автоматика, Изд. АН УССР, № 2, 1956.
176. А. Г. Ивахненко, Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования, Изд. АН УССР, Киев, 1957.

177. В. М. Кунцевич и П. И. Акинин, Приближенный метод определения частоты и амплитуды колебаний в системах экстремального регулирования, Автоматика, Изд. АН УССР, № 3, 1957.
178. В. А. Бесекерский, К вопросу плавности работы следящих систем в счетно-решающих схемах, Научно-техническая информация по приборостроению, № 2, Судпромгиз, 1957.
179. М. В. Старикова, К исследованию автоколебаний и устойчивости систем с несимметричной нелинейностью, Известия АН СССР, ОТН, № 9, 1957.
180. И. С. Моросанов, Методы экстремального регулирования, Автоматика и телемеханика, № 11, 1957.
181. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 2, Физматгиз, 1958.
182. В. В. Казакевич, Системы экстремального регулирования и способы улучшения их качества, Автоматическое управление и вычислительная техника (Труды совещания), Машгиз, 1958.
183. Е. П. Попов, О выборе параметров автоколебательных систем регулирования, Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 1, Машгиз, 1958.
184. И. П. Пальтов, Исследование автоколебаний системы регулирования скорости электродвигателя, Труды ЛКВВИА, вып. 258, 1958.
185. И. П. Пальтов, Сборник задач по теории автоматического регулирования, Изд. ЛКВВИА, 1958.
186. Труды конференции по теории и применению дискретных систем, статьи В. В. Казакевич, Ю. В. Долголенко, И. С. Моросанова, 1959.
187. Е. П. Попов, К теории вибрационного сглаживания нелинейных характеристик, Автоматическое управл. и вычисл. техника, вып. 2, Машгиз, 1959.
188. В. И. Сергеев, Об одном приближенном способе исследования автоколебательных систем при внешних воздействиях, Известия АН СССР, ОТН, серия механики и машиностроения, № 1, 1959.
189. М. В. Старикова, Несимметричные автоколебания при медленно меняющемся внешнем воздействии, Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 2, Машгиз, 1959.
190. J. M. Loe b, J. D. Le b e l, Les servomechanismes dyssymétriques, Annales des télécommun., № 10, 1954.
191. H. S. Tsien, S. Serdengecti, Analysis of Peak-Holding Optimizing Control, J. of the Aeronautical Sciences, № 8, 1955.
192. S. F. Smidt, W. C. Triplett, Use of nonlinearities to compensate for the effects of a rate-limited servo, NACA, Techn., Note 3387, 1955.
193. J. C. Lozier, A steady state approach to the theory of saturable servo-systems, Trans. IRA, 1956.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VII

194. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.
195. Н. Н. Боголюбов, Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сборник трудов Института строит. мех. АН УССР, № 10, 1949.
196. Н. Н. Боголюбов, Теория возмущений в нелинейной механике, Сборник трудов Института строит. мех. АН УССР, № 14, 1950.
197. А. М. Кац, О приближенном решении нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, Прикладная математика и механика, № 1, 1950.
198. Д. А. Башкиров, Графоаналитический метод построения переходных процессов в системах автоматического регулирования, изд. ЛКВВИА, 1952.

199. А. А. Красовский, Оценка отклонений в простейших релейных системах автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, № 2, 1953.
200. Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, 1954.
201. Основы автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова, главы 38 (Д. А. Башкиров), 39 (П. С. Матвеев), Машгиз, 1954.
202. В. В. Солодовников, Ю. И. Топчеев и Г. В. Крутикова, Частотный метод построения переходных процессов с приложением таблиц и номограмм, Гостехиздат, 1955.
203. В. К. Чичинадзе, Об одном методе улучшения динамических свойств некоторых систем регулирования, Автоматика и телемеханика, № 2, 1955.
204. Г. М. Уланов, О максимальном отклонении нелинейной системы автоматического регулирования, Доклады АН СССР, т. 102, № 4, 1955.
205. Труды 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования, статьи И. И. Кринецкого, Ю. В. Долголенко, Г. С. Поспелова, Г. К. Круг, Д. А. Башкирова, Б. М. Когана, Г. М. Уланова, Изд. АН СССР, т. 1 и 2, 1955.
206. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
207. Е. П. Попов, Одно обобщение асимптотического метода Н. Н. Боголюбова в теории нелинейных колебаний, Доклады АН СССР, т. 111, № 2, 1956.
208. Е. П. Попов, Приближенное исследование переходных процессов в нелинейных автоматических системах, Известия АН СССР, ОТН, № 9, 1956.
209. Е. П. Попов, Диаграммы затухания нелинейных процессов в автоматических системах, Автоматика, Изд. АН УССР, № 4, 1956.
210. Е. И. Хлыпало, Использование определителей Гурвица для оценки качества переходных процессов нелинейных систем, Бюллетень научной информации, № 2, Судпромгиз, 1956.
211. А. В. Башарин, Графический метод расчета переходных процессов в автоматизированном электроприводе, Изд. ЛЭТИ, 1956.
212. П. Е. Гренстед, Частотный метод анализа нелинейных систем, Машиностроение (сборник переводов), № 3, 1956.
213. Б. Н. Наумов, Приближенный метод построения переходных процессов в нелинейных системах, Сборник работ по автоматике и телемеханике, Изд. АН СССР, 1956.
214. Г. Е. Пухов, Комплексное исчисление и его применение, Таганрог, 1956.
215. Е. П. Попов и Е. И. Хлыпало, Оценка качества и выбор параметров нелинейных автоматических систем, Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1956.
216. А. А. Воронов, Приближенное определение процесса установления автоколебаний, Автоматика и телемеханика, № 7, 1957.
217. В. В. Петров и Г. М. Уланов, Общность скользящих, вибрационных и оптимальных режимов класса сервомеханизмов, Доклады АН СССР, т. 112, № 3, 1957.
218. Ю. В. Долголенко, Приближенное определение частично-скользящих периодических режимов, Автоматика и телемеханика, № 1, 1957.
219. Ю. И. Неймарк, О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, № 1, 1957.
220. Труды сессии АН СССР, Основные проблемы автоматического регулирования и управления, статьи Е. П. Попова и Г. Е. Пухова, 1957.
221. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 2, Физматгиз, 1958.
222. А. И. Лурье, О неустановившихся движениях в квазилинейных автономных колебательных системах, Труды Ленингр. политехн. института, № 192, 1958.

223. В. М. Кунцевич, О применении регулирования по возмущающим воздействиям в системах экстремального регулирования, Автоматика, Изд. АН УССР, № 1, 1958.
224. О. М. Крыжановский и В. М. Кунцевич, Анализ систем экстремального регулирования с помощью исследования переходных процессов, Автоматика, Изд. АН УССР, № 3, 1958.
225. И. И. Кринецкий, Исследование медленно затухающих переходных процессов в нелинейных системах, Автоматика, Изд. АН УССР, № 3, 1958.
226. С. М. Лихачев, Приближенное решение задачи о посадке гидросамолета на поверхность воды, Труды ЦАГИ, вып. 723, 1958.
227. М. В. Старикова, Исследование скользящего режима в авторегулируемой системе, Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1958.
228. Е. И. Хлыпало, Приближенное исследование переходных процессов в нелинейных системах второго класса, Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1958.
229. Б. Н. Наумов, Выбор характеристики нелинейной скоростной обратной связи, Автоматика и телемеханика, № 3, 1959.
230. С. М. Федоров, Применение показателя колебательности к расчету нелинейных следящих систем, Известия АН СССР, ОТН, серия энергетики и автоматики, № 2, 1959.
231. Е. П. Попов, Синтез нелинейных систем автоматического управления, Труды ЛКВВИА, вып. 299, 1959.
232. А. М. Легов, Проблема качества для нелинейных авторегулируемых систем, Известия АН СССР, ОТН, серия энергетики и автоматики, № 3, 1959.
233. P. E. W. Grensted, The frequency-response Analysis of nonlinear systems, Monograph № 126 (Inst. El. Engrs), 1955.
234. K. Chen, Quasilinearisation techniques for transient study of nonlinear feedback controlsystems, Applic and Ind., № 22, 1956.
235. P. R. Clement, Nonlinear compensation for saturating servos, Control Engng, № 9, 1956.
236. E. I. Ergin, Transient response of a nonlinear system by a bilinear approximation method, J. Appl. Mech., № 4, 1956.
237. T. M. Stout, Basic analysis methods for nonlinear control, Instrum. and Autom., № 2, 1957.
238. P. E. W. Grensted, Analysis of the transient response of nonlinear control systems, Trans. ASME, 80, 2, 1958.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VIII

239. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.
240. Г. С. Поспелов, Побудительная стабилизация релейно-контактных систем автоматического регулирования, Труды ВВИА, вып. 335, 1949.
241. Н. Н. Боголюбов, Теория возмущений в нелинейной механике, Сборник трудов Института строит. мех., № 14, 1950.
242. Е. П. Попов, Уточнение первого приближения при исследовании автоколебаний нелинейных систем, Доклады АН СССР, т. 98, № 3, 1954.
243. Е. П. Попов, Динамика систем автоматического регулирования, § 64, Гостехиздат, 1954.
244. Г. С. Поспелов, Основы автоматики, Изд. ВВИА, 1954.
245. Основы автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова, главы 35 (Г. С. Поспелов), 37 (Я. З. Цыпкин), Машгиз, 1954.
246. Е. П. Попов, О малом параметре в методе гармонической линеаризации, Известия АН СССР, ОТН, № 2, 1955.
247. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, § 43, Гостехиздат, 1955.

248. М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер, Об определении периодических режимов в нелинейных системах с кусочно-линейной характеристикой, Прикладная математика, и механика, № 5, 1956.
249. В. М. Брофеев, Некоторые вопросы теории и расчета релейных автоматических систем, Труды Ленингр. института авиац. приборостр., вып. 17, 1956.
250. В. А. Климов, Метод гармонической линеаризации при частичном задании формы колебаний, Труды ЛКВВИА, вып. 203, 1957.
251. Е. П. Попов, Исправление некоторых недостатков метода гармонического баланса, Труды ЛКВВИА, вып. 203, 1957.
252. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 2, Физматгиз, 1958.
253. К. К. Беля, Определение периодических режимов одного класса нелинейных систем, Труды ВВИА, вып. 697, 1958.
254. В. А. Троицкий, Об автоколебаниях в регулируемых системах с несколькими регулирующими органами, Труды Ленингр. политехн. института, № 192, 1958.
255. Е. П. Попов, Об определении высших гармоник несимметричных автоколебаний, Известия АН СССР, ОТН, серия механики и машиностроения, № 6, 1959.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IX

256. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.
257. А. И. Лурье и А. И. Чекмарев, Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой из двух прямых, Прикладная математика и механика, № 3, 1937.
258. В. А. Бесекерский, Применение вибраторов для устранения нелинейностей в автоматических регуляторах, Автоматика и телемеханика, № 6, 1947.
259. А. А. Красовский, О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейных систем, Автоматика и телемеханика, № 1, 1948.
260. Г. С. Поспелов, Побудительная стабилизация релейно-контактных систем автоматического регулирования, Труды ВВИА, вып. 335, 1949.
261. Н. В. Бутенин, К теории вынужденных колебаний в нелинейной системе с двумя степенями свободы, Прикладная математика и механика, № 4, 1949.
262. Н. В. Бутенин, К теории принудительной синхронизации в нелинейных следящих системах, Труды ЛКВВИА, вып. 39, 1951.
263. М. А. Айзерман, О построении резонансных графиков для систем с нелинейной обратной связью, Инженерный сборник, т. 13, 1952.
264. Я. Г. Пановко, Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах, Инженерный сборник, т. 13, 1952.
265. Ю. А. Митропольский, Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс, Инженерный сборник, т. 13, 1953.
266. Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, 1954.
267. В. Скотт, Введение в анализ нелинейных систем регулирования замкнутого цикла, сборник «Автоматическое регулирование», Изд. иностр. лит., 1954.
268. Д. С. Уест и Д. Л. Доус, Частотные характеристики одного класса нелинейных систем автоматического регулирования, Прикладная механика и машиностроение (сборник переводов), № 6, 1954.
269. Е. П. Попов, К приближенному исследованию автоколебаний и вынужденных колебаний, Доклады АН СССР, т. 95, № 5, 1954.

270. Е. П. Попов, Приближенное исследование автоколебаний и вынужденных колебаний нелинейных систем, Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1954.
271. Е. П. Попов, Динамика систем автоматического регулирования, § 68, Гостехиздат, 1954.
272. Г. С. Поспелов, Основы автоматики, Изд. ВВИА, 1954.
273. Основы автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова, главы 33 (Л. С. Гольдфарб), 35 (Г. С. Поспелов), 37 (Я. З. Цыпкин), Машгиз, 1954.
274. И. М. Смирнова, К приближенному исследованию условий устойчивости периодических режимов, Автоматика и телемеханика, № 2, 1954 и № 1, 1955.
275. Труды 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования, статьи Л. С. Гольдфарба, Е. П. Попова, Г. С. Поспелова, Изд. АН СССР, т. 1, 1955.
276. Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Киев, 1955.
277. В. О. Кононенко, О колебаниях в нелинейных системах со многими степенями свободы, Доклады АН СССР, т. 105, № 4, 1955.
278. Сборник «Памяти А. А. Андропова», статьи Н. В. Бутенина, М. А. Айзермана и И. М. Смирновой, 1955.
279. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
280. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
281. Г. Е. Пухов, Комплексное исчисление и его применение, Таганрог, 1956.
282. А. Г. Ивахненко, О применении условий инвариантности в слабо-нелинейных системах, Доклады АН УССР, № 1, 1956.
283. Я. Е. Гукайло и С. М. Федоров, Вибрационные усилители в следящих системах, Автоматика и телемеханика, № 10, 1956.
284. И. П. Минакова и К. Ф. Теодорчик, К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы, Доклады АН СССР, т. 106, № 4, 1956.
285. Частотные методы в автоматике, статьи Л. Т. Принц, М. Мэтьюз, Изд. иностр. лит., 1957.
286. Т. Хаяси, Вынужденные колебания в нелинейных системах, Изд. иностр. лит., 1957.
287. Б. Н. Петров и Г. М. Уланов, Вопросы теории комбинированного управления, Труды сессии АН СССР, Научно-технические проблемы автоматизированного электропривода, Изд. АН СССР, 1957.
288. В. В. Петров и Г. М. Уланов, Общность скользящих, вибрационных и оптимальных режимов класса сервомеханизмов, Доклады АН СССР, т. 112, № 3, 1957.
289. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 2, Физматгиз, 1958.
290. В. А. Бесекерский и др., Проектирование следящих систем малой мощности, Судпромгиз, 1958.
291. Н. К. Куликов, Об одном методе исследования установившихся вынужденных колебаний, Известия АН СССР, ОТН, серия механики и машиностроения, № 1, 1959.
292. А. Д. Максимов, К теории вибрационного сглаживания нелинейных характеристик, Автоматическое управление и вычислительная техника, вып. 2, Машгиз, 1959.
293. Е. П. Попов, Влияние вибрационных помех на устойчивость и динамические качества нелинейных автоматических систем, Известия АН СССР, ОТН, серия энергетики и автоматики, № 4, 1959.
294. Н. В. Бутенин, Элементы нелинейной теории колебаний, Изд. ЛКВИА, 1959.

295. N. Minorsky, Introduction to nonlinear mechanics, Ann. Arbaur, 1947.
296. R. J. Kochenburger, A frequency response method for analyzing and synthesizing contactor servomechanisms, Trans. Amer. Inst. El. Engrs, 69, part I, 1950.
297. J. C. West, P. Nikiforuk, The behavior of a remote-position-control servomechanism, Proc. Inst. Electr. Engrs, 101, part II, 1954.
298. J. C. West, J. L. Douce, R. K. Livesley, The dual input describing function and its use in the analysis of nonlinear systems, Proc. Inst. Electr. Engrs, 103, part B, 1956.
299. L. W. Hámos, Beitrag zur Frequenzanalyse von nicht-linearen Systemen, Fachtagung Regelungstechnik Heidelberg, 1956, Beitrag № 65.
300. J. C. West, P. N. Nikiforuk, The frequency response of a servomechanism, Trans. AIEE, part 2, 1956.
301. S. L. Mikhail, Contributions to the analysis of nonlinear feedback control systems, IRE Wescon convention Record, part 4, 1958.
302. Z. Bönn, Stability of forced oscillations in nonlinear feedback systems, IRE Trans. Automatic control, № PGAC-6, 1958.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ X

303. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Киев, 1945.
304. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. «Сов. радио», 1951.
305. С. Гольдман, Гармонический анализ, модуляция и шумы, Изд. иностр. лит., 1951.
306. В. В. Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, 1952.
307. С. Райс, Теория флуктуационных шумов, сборник «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Изд. иностр. лит., 1953.
308. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович и В. И. Тихонов, Прохождение случайных функций через нелинейные системы, Автоматика и телемеханика, № 4, 1952 и № 3, 1954.
309. И. Е. Казаков, Приближенный метод статистического исследования нелинейных систем, Труды ВВИА, вып. 394, 1954.
310. Сборник научных трудов ВВИА, статьи И. Е. Казакова и Б. Г. Доступова, т. 1, 1954.
311. Е. П. Попов, Автоколебания нелинейных систем при медленно меняющемся внешнем воздействии, Доклады АН СССР, т. 98, № 4, 1954.
312. Е. П. Попов, Динамика систем автоматического регулирования, § 67, Гостехиздат, 1954.
313. В. С. Пугачев, Общая теория случайных функций и ее применение в теории автоматического регулирования, Труды 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 2, 1955.
314. М. Пелегрен, Анализ работы сервомеханизмов и регуляторов при статистических воздействиях, Машиностроение (сборник переводов), № 7, 1955.
315. С. Н. Рытов, Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа, Журнал ЭТФ, вып. 3, 1955.
316. Труды ВВИА, вып. 592, статьи И. Е. Казакова, В. С. Пугачева, Б. Г. Доступова, 1956.
317. И. Е. Казаков, Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем, Автоматика и телемеханика, № 5, 1956.
318. А. Ю. Ишлинский, Об определении ошибок гиригоризонта на качке при коррекции релейного типа, Автоматика, Изд. АН УССР, № 3, 1956.

319. И. Н. Амиантов и В. И. Тихонов, Воздействие нормальных флуктуаций на типовые нелинейные элементы, Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1956.
320. В. И. Тихонов, Воздействие больших флуктуаций на электронное реле, Радиотехника и электроника, № 2, 1956.
321. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
322. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.
323. М. Пелегрин, Статистический расчет следящих систем, Изд. иностр. лит., 1957.
324. М. Мэтьюз, Метод оценки нелинейных следящих систем, сборник «Частотные методы в автоматике», Изд. иностр. лит., 1957.
325. И. Е. Казаков, О вероятностном анализе релейных систем, Сборник научных трудов ВВИА, т. II, 1957.
326. В. В. Солодовников, Анализ и синтез нелинейных систем при случайных воздействиях, сборник «Итоги науки. Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления», Изд. АН СССР, 1957.
327. Б. Г. Доступов, Приближенное определение вероятностных характеристик выходных координат нелинейных систем, Автоматика и телемеханика, № 11, 1957.
328. С. Я. Раевский, О динамической точности следящей системы, содержащей нелинейное звено, Автоматика и телемеханика, № 11, 1957.
329. В. Л. Лебедев, Случайные процессы в электрических и механических системах, Физматгиз, 1958.
330. В. А. Бесекерский и др., Проектирование следящих систем малой мощности, Судпромгиз, 1958.
331. А. А. Первозванский, Приближенный метод исследования автоколебательных систем при случайных воздействиях, Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1958.
332. А. Г. Ивахненко, Основные вопросы общей теории кибернетических систем автоматического управления, Автоматика, Изд. АН УССР, № 4, 1958.
333. В. В. Солодовников, А. М. Батков, А. А. Бредис, П. С. Матвеев, Методы математической статистики в теории систем автоматического управления, Автоматическое управление и вычислительная техника (Труды совещания), Машгиз, 1958.
334. А. А. Первозванский, Автоколебательные системы при медленно меняющихся внешних воздействиях, Известия АН СССР, ОТН, серия механики и машиностроения, № 1, 1959.
335. В. И. Сергеев, Об одном приближенном способе исследования автоколебательных систем при внешних воздействиях, Известия АН СССР, ОТН, серия механики и машиностроения, № 1, 1959.
336. Е. П. Попов, Об оценке качества нелинейных автоматических систем при случайных помехах, Автоматика и телемеханика, № 10, 1959.
337. О. Дж. М. Смит, Системы автоматического регулирования, Физматгиз, 1960 (в печати).
338. А. А. Первозванский, Автоколебательные системы регулирования при наличии случайных воздействий, Труды Ленингр. политехн. института, вып. 210, 1960.
339. G. C. Newton, Compensation of feedback control systems subject to saturation, J. Franklin Inst., № 4 и 5, 1952.
340. R. C. Boonton, The analysis of nonlinear control systems with random inputs, Proc. Sympos. Nonlinear circuit Analysis, vol. 2, 1953.
341. L. A. Zadeh, Optimum nonlinear filters, Journ. App. Physics, № 4, 1953.

- 342. R. C. Bo o t o n, Nonlinear control systems with random inputs, Trans. IRE, № 1 и 4, 1954.
 - 343. J. F. B a r r e t, J. E. C o a l e s, An introduction to the analysis of nonlinear control systems with random inputs, Proc. of IEE, № 3, 1956.
 - 344. Y. S a w a r a g i, S. T a k a h a s h i, Response of control systems containing zero-memory nonlinearity, Fachtagung Regelungstechnik Heidelberg, 1956, Beitrag № 47.
 - 345. J. C. W e s t, The use of frequency response analysis in nonlinear systems, Fachtagung Regelungstechnik, Heidelberg, 1956, Beitrag № 87.
 - 346. P. N. N i k i f o r u k, J. C. W e s t, Describing function analysis of a nonlinear servomechanism subjected to stochastic signals, Proc. of IEE, № 5, 1957.
 - 347. Y. S a w a r a g i, Y. S u n a h a r a, The statistical studies on the response of automatic control systems with a nonlinear element, Techn. Rep. Eng. Res. Inst. Kyoto Univ., № 5, 1958.
 - 348. N. W i e n e r, Nonlinear problems in random theory, New York, 1958.
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания в нелинейных системах 43

- , возбуждение 185
- несимметричные 353
- , подавление 255, 269
- симметричные 105
- , условия срыва 439, 771
- Автопилот курсовой 307
- Акселерометр магнитоэлектрический 750
- Амплитуда автоколебания 49, 247, 358, 439
 - гармоники относительная 590
 - вынужденных колебаний 77, 648
 - высших гармоник 44, 634
 - начальная 187
- Аппроксимация гистерезисной петли 221

Баланс гармонический 139

- энергетический 139
- Балансное реле 263
- Быстрозатухающие колебания 508, 520

Возбуждение автоколебаний жесткое 185

- — мягкое 185
- Воздействие внешнее 61, 353, 481, 653, 767
 - медленно меняющееся 417
 - случайное низкочастотное 772

Генератор ламповый 770

- Гироскоп демпфирующий 307
 - свободный 307
 - трехстепенный неуравновешенный 243
- Граница безопасная 324
 - устойчивости 193
 - колебательная 121
 - опасная 193
 - равновесия 157

Датчик топливомера 282

- угла крена 312
- угловой скорости 313
- Двигатель стабилизирующий 244
- Движение свободное 97
 - центра тяжести 377
- Дельта-функция 609
- Диаграмма качества 55, 527, 539, 559
- Дисперсия 717, 722
- Дрейф нуля 431

Зазор 22

- Закон распределения нормальный 714
- Запаздывание временное 276
 - координатное 276
 - нелинейное 89
- Застой 26
- Звено нелинейное 28
- Зона нечувствительности 17

Измеритель ускорений вибрационный 431

- Импульс мгновенный 119
- Инвариантность 697
 - полная 698
- Интеграл эллиптический 379
- Интерполяция 477
- Интерцептор 313

Колебания вынужденные 75

- двухчастотные 671
- , нарушение симметрии 415
- нелинейные затухающие 517
- нутационные 247
- пидообразные 80
- собственные 599
- Коммутатор электронный 431
- Компенсация 697
 - внешнего воздействия полная 697
- Контакты скользящие 449
 - соударяющиеся 449
- Коэффициент возврата 17
 - гармонической линеаризации 208, 404
 - демпфирования 292
 - средний 118, 119
 - усиления гармонического 45, 87
 - эквивалентный 84, 724
 - — случайной составляющей 723
 - формы нелинейности 633
- Критерий устойчивости периодического решения 123, 124, 125, 128, 129
- Крутизна кривой 83
 - нелинейной сглаженной характеристики 488

Линеаризация вибрационная 374

- гармоническая 45, 386
 - несимметричных кусочно-линейных функций 403
 - — повторная 669
 - релейных характеристик 201
 - — степенных нелинейных характеристик 404
 - — уточненная 592
 - обычная 83
 - прямоугольная 85
 - статистическая 721, 722
 - эквивалентная 84, 519

Медленность движений 378

- Метод гармонической линеаризации 38, 86
 - малого параметра 132
 - медленно меняющихся коэффициентов 136
 - первого приближения 598
 - припасовывания 40
 - трапециальных частотных характеристик 587
- Механизм мембранный исполнительный 203
 - релейный исполнительный 237

Многочлен операторный 436
 Момент вероятностный 722
 — реакции упора 416
 — стабилизирующего двигателя 244, 245

Нарушение симметрии колебаний 415
 Нелинейность 29
 — однозначная нечетная 87
 — остаточная 134
 — петлевая нечетно-несимметричная 88
 — произвольная 636
 — с неразделяющимися переменными 25
 — смешанная 94
 — со спадом 21
 — характеристики 85

Область автоколебаний 241
 — затухающих процессов 73
 — неустойчивости системы 187
 — отсутствия автоколебаний 50
 — притяжения 188, 189
 — расходящихся процессов 73
 — существования автоколебаний 50
 — устойчивости равновесия 156, 183, 241
 — — системы 187
 Огибающая колебаний 57
 — переходного процесса 582
 Ожидание математическое 718, 722, 723
 Опережение нелинейное 89
 Ошибка колебательной системы 463
 — статическая автоколебательной системы 421, 422
 — — нелинейной системы 658

Переменные внешние 16
 — внутренние 16
 Петля гистерезиса 17
 — форсирующего типа 89
 Плотность вероятности суммарного случайного процесса 748
 — спектральная 716
 Погрешность гармонической линеаризации 562
 Подавление автоколебаний 255, 269
 Показатель затухания 53, 130, 518
 Полоса пропускания 666
 Помеха внешняя вибрационная 666
 — случайная 735
 Пороговое значение автоколебаний 769
 Принцип компенсации 422
 Пространство параметров 188
 — фазовое 186
 Процесс квазистационарный 469
 — колебательный нестационарный 120
 — — неустановившийся 120, 735
 — переходный несимметричный 545
 — — симметричный 527
 — скользящий 550
 — случайный стационарный 712
 Прямая осредняющая 136

Регулятор центробежный 227
 Режим скользящий 71, 582
 — —, условия существования 584
 Реле балансное 263
 —, характеристика 17
 —, —, сглаженная 80
 —, —, электромагнитное нейтральное 147
 Решение периодическое, область существования 187
 — —, условие наличия 158
 — —, условия отсутствия 156
 — —, — устойчивости 120, 128, 131
 Ряд тригонометрический 511

Связь внутренняя обратная 351
 Сглаживание вибрационное 68, 371, 658, 700
 Сдвиг фазовый 221
 — фазы колебаний 133, 134
 Сигнал ложный 423
 — регулярный полезный 735
 Синхронизация принудительная 75
 Система автоколебательная 242
 — автоматическая нелинейная 15
 — — регулирования курса самолета 306
 — астатическая 354, 422
 — второго класса нелинейная 32
 — генерирования колебаний 346
 — одноконтурная 580
 — первого класса нелинейная 30
 — регулирования температуры релейная 263, 271
 — стабилизации замкнутая 245
 — статическая 422
 — третьего класса нелинейная 33
 Скорость выбега двигателя 238
 — медленно меняющаяся 355
 — прецессии 243
 — сервопривода 259
 Совокупность начальных условий 187
 Составляющая автоколебательная 69
 — аperiodическая 70
 — регулярная 723
 — средняя 80
 Срыв автоколебаний 439
 Стабилизация угловая 703
 Суперпозиция 644
 Схема интегрирующего устройства 442
 — мостовая 271
 — с динамическим торможением 197
 — с нелинейной гибкой обратной связью 580
 — электродвигателя 454

Точка изображающая 529
 Трение вязкое 281
 — линейное 27
 — сухое 281

Уравнение в вариациях 118
 — гибкой обратной связи 17
 — гироскопа 703
 — двигателя 237
 — динамики 599
 — дифференциальное в малых отклонениях 118
 — жесткой обратной связи 17
 — линейной автоматической системы 34
 — однородное дифференциальное 97
 — порождающей системы 147, 150, 151
 — рулевой машинки 308
 — самолета 21
 — трансцендентное 463
 — укороченное 137
 — фильтра 16
 — характеристическое замкнутой системы 107
 — чувствительного элемента тахометра 444
 Уровень помехи 760
 Ускорение боковое 751
 Условие захватывания 75, 77, 645
 — срыва автоколебаний 771
 — устойчивости достаточное 160
 — эквивалентной линеаризации 85
 Устойчивость по медленно меняющейся составляющей 380
 — практическая 193, 194
 — равновесия 160
 — системы 118, 184, 380

Фильтр 44, 52, 102

Флуктуация 135

Форма переходного процесса 53

Фотоумножитель 573

Функция аппроксимирующая 222

— времени случайная 713

— — центрированная 722

— корреляционная 716

— медленно меняющаяся 355

— передаточная линейной части 153

— — тахометра 452

— петлевая релейная 133

— смещения 357, 371, 656

— — (метод отыскания) 657

— — случайной величины 736

Характеристика амплитудная 92

— амплитудно-фазовая 89, 91

— вероятностная 718

— восстанавливающей силы 26

— гистерезисная криволинейная 499

— двухпозиционного поляризованного реле 198

— двухфазного индукционного двигателя 24, 285

— звена с зоной нечувствительности 203, 205

— — с насыщением 206

— — с переменным коэффициентом усиления 207

— механическая двухфазного асинхронного двигателя 318, 333

— нелинейная без зоны нечувствительности 397

— — зазора 23

— — несимметричная кусочно-линейная 408

— — с зоной нечувствительности 394, 396

— — с опережающими петлями 229

— — с переменным коэффициентом усиления 399

— — с петлей гистерезиса 401

— петлевая 499

— реле сглаженная 482

— релейная 196

Характеристика релейная идеальная 18, 198, 200, 390, 394

— — общего вида 196, 387, 391

— — при смещенной опережающей петле 232

— — с зоной нечувствительности 208, 211, 390, 393

— — с опережающими петлями 230, 232

— — с петлей гистерезиса 389, 390, 392, 393

— — ступенчатая 389, 392

— — трапецидальными опережающими петлями 232

— — с треугольными опережающими петлями 234

— сглаженная 371, 486

— статическая несимметричная 416

— степенная несимметричная 406, 407

— — симметричная 405

— сухого трения 27

— типа двусторонней реакции упругого элемента 409

— фазовая 92

— частотная линейной части 153

— — экспериментальная 116

Центр колебаний 416

Цикл предельный неустойчивый 185

Частота 53

— автоколебаний 255, 269, 625

— колебаний 518

— линеаризующая 142

— порождающая 142

Часть системы линейная 28

— — приведенная 29

— — теоретическая 116

— — экспериментальная 116

Эффект демпфирующий нелинейный 135

— раскачивающий нелинейный 135

